1、证明Euler-Maclaurin公式：

(1) 证明

$$\frac{1}{2}[f(k)+f(k+1)]-\int_k^{k+1}f(t)dt=\int_k^{k+1}(t-k-\tfrac{1}{2})f'(t)dt$$

(2) 证明：

$$F(n)=\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\int_0^n f(t)dt+\int_0^n B_1(t-[t])f'(t)dt$$

(3) 证明：

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)\,t^n/n!$$

且 $B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$，$B_n(0)=B_n(1)$ $(n\geq 2)$

(4)

$$F(n)=\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\int_0^n f(t)dt+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\frac{B_{j+1}}{(j+1)!}[f^{(j)}(n)-f^{(j)}(0)]+\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\int_0^n B_{m+1}(t)f^{(m+1)}(t)dt$$

(5) 令 $m\to\infty$，证明E-M公式.

2. 求和的渐近分析:

① $\sum_{k=0}^{\infty}(k+x)^{-\alpha}$ $\alpha>1$

② $\sum_{k=0}^{\infty}(k^2+x^2)^{-2}$

③ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k/k$

④ $\sum_{k=1}^{n}\sin k/k$

⑤ $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k^2+x^2)}\sim\frac{\ln x}{x}+\frac{\gamma}{x^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n B_{2n}}{2n x^{2n+2}}$$

γ为Euler常数

$$\int_0^{\infty}e^{-u}\ln u\,du=-\gamma.$$