应用数学导论　HW02

1. 证明单边Laplace引理：

设 $\phi(t)$ 在 $t=0$ 达极大，$\phi'(t) \in C'[0,+\infty)$，

$\phi'(0)<0$，$\phi(t)<\phi(0)$，$\forall t>0$.

$\phi(t) \to -\infty \ (t\to\infty)$，s.t.

$I(x)=\int_0^\infty e^{x\phi(t)}dt$ 收敛.

证明

$$I(x) \sim (-x\phi'(0))^{-1} e^{x\phi(0)}$$

2. 说明

$$\Gamma(x) \sim x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi} \left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots\right)$$

3. 求近似：$(x \longrightarrow \infty)$

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin t}\, e^{-x\sin^4 t}\, dt$

b. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,(t+a)^{-x}\, dt$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\, e^{-xt^2}\, dt$

d. $\int_0^{\frac{\pi^2}{2}} ds \int_0^{\frac{\pi^2}{2}} dt\; e^{x \cos \sqrt{s+t}}$