Lect 21 Asymptotics for sums

一. 截断法:

例1: $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2x^2}$ $x\to\infty$

$= 1+e^{-x^2}+e^{-4x^2}+\cdots$

从任一项开始,如

$$\sum_{n=k}^{+\infty} e^{-n^2x^2} = e^{-k^2x^2}\sum_{n=k}^{+\infty} e^{-(n^2-k^2)x^2}$$

而求和级数中相邻两项之比

$$e^{-[(n+1)^2-k^2]x^2}\Big/e^{-(n^2-k^2)x^2} = e^{-(2n+1)x^2} \ll e^{-x^2} \ll 1,$$

故 $\sum_{n=k}^{\infty} e^{-n^2x^2} \sim e^{-k^2x^2}$

从 $S(x)$ 可从任一项截断得渐近性。

二. Riemann和法:

由Riemann和近似积分作渐近分析:

例2: $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ $x\to\infty$

截尾级数收敛

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} x S(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$S(x) \sim \pi / 2x$$

<u>例3</u>: $S(x) = \sum_{1\le n<x} n^{\alpha}$ $\qquad x\to\infty$

$$\frac{S(x)}{x^{\alpha+1}} = \sum_{1\le n<n} \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 t^{\alpha}\, dt$$

$$S(x) \sim \begin{cases} x^{\alpha+1}/\alpha+1, & \alpha > -1 \\ \ln x, & \alpha = -1 \\ \zeta(-\alpha), & \alpha < -1 \end{cases}$$

$\zeta(\cdot)$为Riemann ζ函数.

三. Laplace近似:

例4: $$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^k},\quad x\to\infty$$

首先寻找最大项:

$$\frac{x^{n-1}/[(n-1)!]^k}{x^n/(n!)^k}=n^k/x$$

故最大项在n接近$[x^{1/k}]$.

令 $n=x^{1/k}(1+s)$, s间隔$x^{-1/k}$

当n充分大时,由Stirling公式

$$\begin{aligned}n! &\sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}\\ &= x^{n/k}e^{n\ln(1+s)}\cdot e^{-x^{1/k}(1+s)}\cdot\sqrt{2\pi}\\ &\quad\cdot x^{1/2k}\cdot(1+s)^{1/2}\end{aligned}$$

于是有

$$x^n/(n!)^k \sim x^{-1/2}(2\pi)^{-k/2}(1+s)^{-k/2} \cdot e^{-kx^{1/k}[(1+s)\ln(1+s)-(1+s)]}$$

$$= e^{kx^{1/k}} x^{-1/2} \cdot (2\pi)^{-k/2}$$

$$\cdot e^{-kx^{1/k}[(1+s)\ln(1+s)-s]} \cdot (1+s)^{-k/2}$$

当$|s|\ll 1$时

$$-(1+s)\ln(1+s)-s \sim -\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{2} \sim -\frac{s^2}{2}$$

$$\sum_n x^n/(n!)^k \sim f(x) \sum_{|s|\ll 1} e^{-kx^{1/k}\cdot s^2/2}$$ s间隔$x^{-1/k}$

$$\sim f(x)\left[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{-kx^{1/k}s^2/2} \cdot x^{-1/k}\right] \cdot x^{1/k}$$

$$\sim f(x)\cdot(2\pi)^{1/2}\cdot k^{-1/2}\cdot x^{1/2k}$$

其中 $f(x) = e^{kx^{1/k}} \cdot x^{-1/2} \cdot (2\pi)^{-k/2}$

对其中舍去及引入项的分析不难发现其为指数无穷小、(相比 $x^{1/2k}$).

四. Euler-Maclaurin 求和公式:

考察 $F(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)$, $n\to\infty$

Euler-Maclaurin公式:

$$F(n)\sim \frac{1}{2}f(n)+\int_0^n f(t)\,dt + C + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{B_{j+1}}{(j+1)!}f^{(j)}(n),$$

$n\to\infty$

其中

$$C=\lim_{m\to\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^j}{(j+1)!}B_{j+1}f^{(j)}(0)+\frac{1}{2}f(0)$$

$$+\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\int_0^\infty B_{m+1}(t-[t])\,f^{(m+1)}(t)\,dt\Bigg]$$

这里 $B_n(x)$为 Bernoulli 多项式

$$B_n(x)\triangleq \left[te^{xt}/(e^t-1)\right]^{(n)}\Big|_{t=0}$$

$B_0(x)=1$, $B_1(x)=x-1/2$, $B_2(x)=x^2-x+1/6$, $\cdots$

$B_n=B_n(0)$, $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=1/6$, $\cdots$

$$B_{2n+1}=0 \quad (n\geq 1)$$

21-06

例5: $F(n)=\sum_{k=1}^{n} 1/k$, $n\to\infty$

取 $f(t)=\frac{1}{t+1}$, $F(n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$

$$F(n)\sim \ln n + C + \frac{1}{2n} - \frac{B_2}{2n^2} - \frac{B_4}{4n^4} - \cdots$$

$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n\right)$ 为Euler常数.

例6: $F(n)=\ln n! = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$

$f(t)=\ln(1+t)$, 故

$$F(n)\sim (n+\tfrac{1}{2})\ln n - n + C + \frac{B_2}{1\cdot 2n} + \frac{B_4}{3\cdot 4n^3} + \cdots$$

$C=\frac{1}{2}\ln 2\pi$ (由Stirling公式).