Lect 20 Method of Steepest Descent

一. 最速下降法:

MSD是近似形如

$$I(x)=\int_C h(t)\, e^{x\rho(t)}\, dt \qquad x\to\infty$$

其中C为复平面上的积分线, $h(t)$, $\rho(t)$ 均解析.

基本方法:

step1: 由 $h(t)$, $\rho(t)$ 的解析性将C变形为 C',

s.t. 在 C' 上 $\rho(t)$ 虚部为常数.

step2: 由

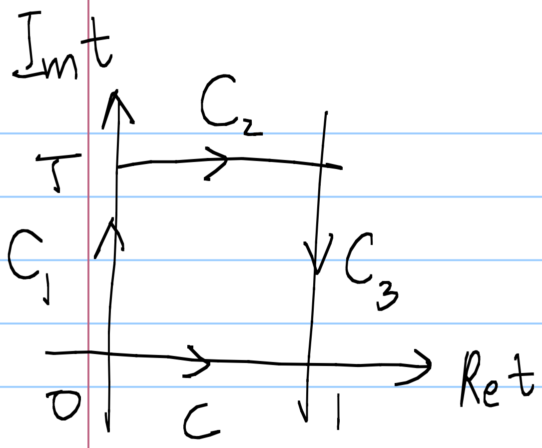
$$I(x)=\int_{C'} h(t)\, e^{x(\phi(t)+i\psi)}\, dt$$

$$=e^{ix\psi}\int_{C'} h(t)\, e^{x\phi(t)}\, dt$$

step3: 由 $\phi(t)$ 为实函数, 利用Laplace近似.

二. 基本MSD:

例1: $I(x)=\int_0^1 \ln t\; e^{ixt}\, dt, \qquad x\to\infty$



此时 $\rho(t) = it$，取 $t = u + iv$

$$\rho(t) = iu - v$$

为使 $\rho(t)$ 虚部为常数 即 $u = \text{Const}$.

① $t=0$, $u=v=0$ 过 $t=0$ 的曲线 $t = iv$, $\operatorname{Im}\rho(t) \equiv 0$

② $t=1$, $u=1$, $v=0$, 过 $t=1$ 的曲线 $t = 1+iv$, $\operatorname{Im}\rho(t) \equiv 1$

构造曲线 C_1, C_2, C_3 如上图，由Cauchy定理：

$$I(x) = \int_C \ln t \, e^{ixt} \, dt = \int_{C_1+C_2+C_3} \ln t \, e^{ixt} \, dt$$

对 C_2：
$$\int_{C_2} \ln t \, e^{ixt} \, dt = \int_{Ti}^{Ti+1} \ln t \, e^{ixt} \, dt$$

$$= \int_0^1 \ln(Ti+s) \, e^{ix(Ti+s)} \, ds$$

$$= e^{-xT} \int_0^1 \ln(Ti+s) \, e^{ixs} \, ds \longrightarrow 0 \quad (T \to \infty)$$

故
$$I(x) = \int_{C_1} + \int_{C_3} = I_1(x) + I_3(x)$$

20-03

$$I_1(x)=\int_0^{\infty} \ln(is)\, e^{ix(is)}\, i\,ds \qquad (t=is)$$

$$=-\frac{\pi}{2x}-i\frac{\ln x}{x}+\frac{i}{x}\underbrace{\int_0^{+\infty}\ln y\, e^{-y}\,dy}_{\parallel\ \gamma}$$

Euler常数

$$I_3(x)=i\int_{+\infty}^{0}\ln(1+is)\, e^{ix(1+is)}\,ds, \quad t=1+is$$

$$=ie^{ix}\int_{+\infty}^{0}\ln(1+is)\, e^{-xs}\,ds$$

$$\sim ie^{ix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n(n-1)!}{x^{n+1}}$$

Watson引理

故 $I(x)\sim-\frac{i\ln x}{x}-\frac{i\gamma+\pi/2}{x}+ie^{ix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n(n-1)!}{x^{n+1}}$.

三、关于最速下降路径的分析:

对 $I(x)=\int_c e^{xf(t)}h(t)\,dt$，设 $f(t)=\phi(t)+i\psi(t)$

为 $t=u+iv$ 的解析函数，则 ϕ,ψ 满足 C-R方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial\phi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

20-04

则有 $\nabla\phi\cdot\nabla\psi=0$

考虑过 $\vec{t_0}$ 的 $\phi(t)$ 的最速降线 $\vec{t}(s)=(u(s),v(s))$，则

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{t}}{dt}=-\nabla\phi(\vec{t}(s))\\ \vec{t}\big|_{s=0}=\vec{t}_0\end{cases}$$

过 $\vec{t_0}$ 的常相曲线对应于 $\psi(\tilde{t}(s))=Const.$

即 $\dfrac{d\psi(\tilde{t}(s))}{dt}=0$，而 $\dfrac{d\psi(\vec{t}(s))}{ds}=\nabla\psi\cdot\dfrac{d\vec{t}}{ds}=$
$-\nabla\psi\cdot\nabla\phi=0$

即最速降线与常相曲线重合！

当 $\rho'(t)\neq0$ 时 即 $\rho'(t)=\dfrac{\partial\phi}{\partial u}-i\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\neq0$ 即

$\nabla\phi\neq0$ 时 最速降线可无穷延伸，否则如在 $\tilde{t}_0$ 点停止则由 $\nabla\phi(\tilde{t}_0)\neq0\Rightarrow\dfrac{d\vec{t}}{ds}\neq0$ 矛盾！因而最值仅在端点出现；当 $\rho'(t)=0$ 时，称为鞍点，此时由于右端 $=0$ 可导致从不同初值出发会相交，最值可

20-05

鞍在曲线中间取到

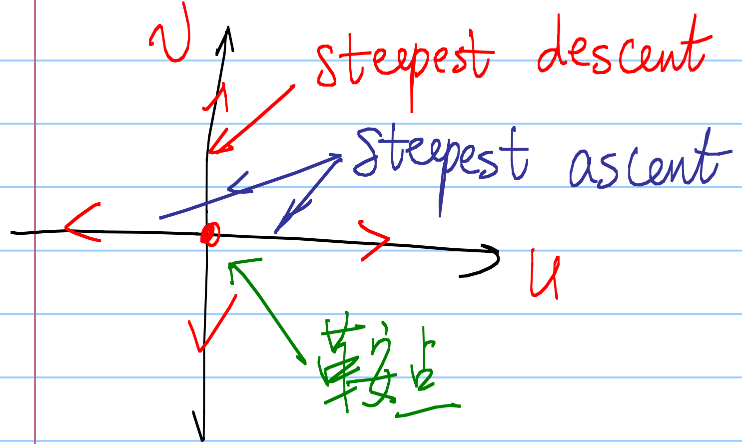
例3: $\rho(t)=t^2$, 鞍点 $t=0$

令 $t=u+iv$, $\rho(t)=u^2-v^2+i2uv$

常相曲线 $\psi(t)=0 \Rightarrow u=0$ 或 $v=0$

$u=0 \Rightarrow \phi(t)=-v^2$ 在 $t=0$ 最大

$v=0 \Rightarrow \phi(t)=u^2$ 在 $t=0$ 最小.



例4: $\rho(t)=i\cosh t = i\cdot\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$

$\rho'(t)=0 \Rightarrow t=0$ 为鞍点

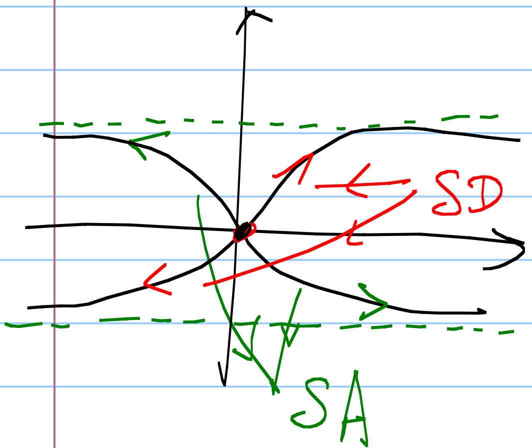
令 $t=u+iv$, $\rho(t)=\underbrace{-\sinh u\sin v}_{\phi(t)}+i\,\underbrace{\cosh u\cos v}_{\psi(t)}$

$\rho(0)=i$

20-06

常相曲线 $\psi(t)=\cosh u\cos v=1$

$$\Rightarrow \frac{u'}{v'}=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{(1-\cosh u)^{-2}}}{\sinh u}\sim\frac{u}{u}=1$$



事实上 $t=\pm i n\pi$ 也为鞍点

例5: $\rho(t)=\sinh t-t$

$\rho'(t)=0\Rightarrow t=0$, $\rho''(0)=0$, $\rho'''(0)=1$,

称 $t=0$ 为3阶鞍点.

令 $t=u+iv$, $\rho(t)=(\sinh u\cos v-u)+i(\cosh u\sin v-v)$

常相曲线 $\cosh v\sin v-v=0$

四. 带鞍点的SDA:

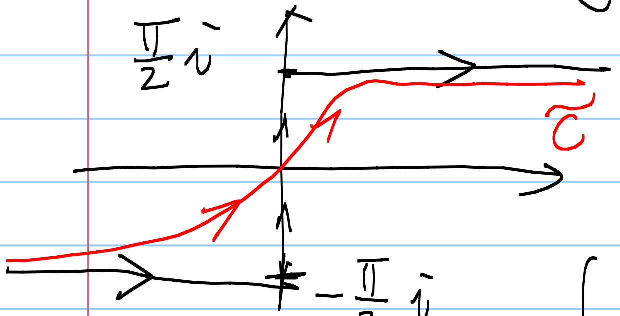
例6: $$I(x)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{i\pi}\int_{-i\pi/2}^{i\pi/2}e^{ix\cosh t}\,dt$$

引入积分, $$\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty-i\frac{\pi}{2}}^{-i\frac{\pi}{2}}e^{ix\cosh t}\,dt$$

及 $\frac{1}{i\pi}\int_{i\frac{\pi}{2}}^{i\frac{\pi}{2}+\infty} e^{ix\cosh t}\,dt$

可得其积分收敛且绝虚，故

$$I(x) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{i\pi}\int_C dt\, e^{ix\cosh t}$$



由解析性质及 $\pm\frac{\pi}{2}i$ 为渐近线，

$$\int_C dt\, e^{ix\cosh t} = \int_{\tilde{C}} dt\, e^{x\rho(t)}$$

$\rho(t) = i\cosh t$，故

$$\int_{\tilde{C}} dt\, e^{ix\cosh t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt(s)\, e^{x\rho(t(s))}$$

$t(s) = u(s) + i\,v(s)$，　s 为 $\tilde{C}$ 的某个曲线参数。

$$\sim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{ds}\cdot e^{x\left\{\rho(t(0)) + \rho'(t(0))t'(0)s + \frac{1}{2}s^2\left[\rho''(t(0))(t'(0))^2 + \rho'(t(0))t''(0)\right]\right\}^2} ds$$

$$\sim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1+i)\, e^{x\left\{i + \frac{1}{2}s^2\left[i(1+i)^2\right]\right\}} ds$$

$t = (1+i)s$　（局部切向）

$\rho(t(0)) = \bar{i}$, $\rho''(t(0)) = \bar{i}$

$$\sim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1+i) e^{ix} \cdot e^{-xs^2} ds \sim (1+i) e^{ix} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{x}} .$$

即 $I(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \to \infty$

例7: $I(x) = \int_0^1 dt\, e^{-4xt^2} \cos(5xt - xt^3)$, $x \to \infty$

首先

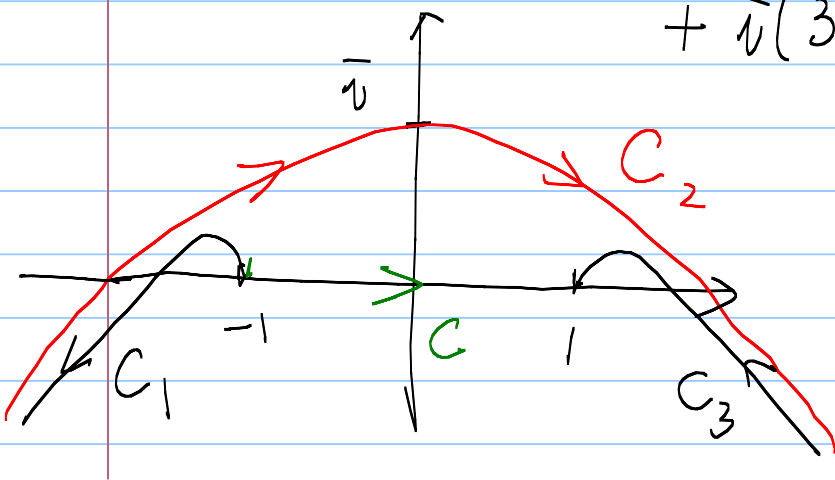
$$I(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dt\, e^{-4xt^2} \cdot e^{(5xt - xt^3)\bar{i}},$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2x} \int_{-1}^{1} e^{x\rho(t)} dt$$

$$\rho(t) = -(t-i)^2 - i(t-i)^3$$

令 $t = u + iv$, $\rho(t) = (-v^3 + 4v^2 - 5v + 3u^2 v - 4u^2 + 2)$

$$+ i(3uv^2 - 8uv + 5u - u^3)$$



过-1, 1的常相曲线为 C_1, C_3 如左图示. 但未连接.

需要另一条常相曲线 C_2 将二者连接. C_2 经过鞍点 $t=i$，且在 $t=i$ 处切向 $t'(s)=1$

$$I(x) = \int_{C_1+C_2+C_3} \frac{1}{2} e^{-2x} e^{x\rho(t)} dt$$

$$\int_{C_3} e^{x\rho(t)} dt \sim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{x\left[\rho(t(0)) + \frac{1}{2} s^2 \rho''(t(0)) (t'(0))^2\right]} t'(0)\, ds$$

$$\rho'(t(0)) = 0,\ t(0) = i,\ t'(0) = 1,\ \rho''(t(0)) = -2,\ \rho(t(0)) = 0$$

$$\sim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-xs^2} ds \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

可证 $\int_{C_1}$, $\int_{C_3}$ 相比 $\int_{C_2}$ 为指数小.

故 $I(x) \sim \frac{1}{2} e^{-2x} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.