Lect 18 Laplace asymptotics

一. 引言:

Laplace 近似是对 Laplace 积分

$$I(x)=\int_a^b f(t)\,e^{x\phi(t)}\,dt$$

当 $x\to\infty$ 时渐近行为的一种方法其基本思想在大偏差理论中为根本.

二. Laplace 近似:

1. 基本 Laplace 近似: ϕ 实值, 足够光滑

思想: 如 $\phi(t)$ 在 $t=c$ ($c\in[a,b]$) 处达到最大, 且 $f(c)\neq 0$ 则仅在 $t=c$ 的局部对 $I(x)$ 当 $x\to\infty$ 的渐近性态有贡献.

定理: 积分

$$I(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{x\phi(t)}\,dt, \quad x\gg 1$$

$\phi(t)\in C^2(\mathbb{R})$, $\phi(0)=0$, $\phi(t)<0$ $(t\neq 0)$, s.t.

$$\phi(t)\leq -b, \quad \text{当 } |t|\geq c$$

其中 $b, c>0$, 设 $\phi(t)\to-\infty$ 足够快使得积分有定义.

$\phi''(0)<0$，则

$$I(x)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{-x h''(0)}},\quad x\to\infty$$

解：设 $\phi(t)=\frac{\phi''(0)}{2}t^2$，$\phi''(0)<0$，则

$$\int_R e^{x\phi(t)}dt=\sqrt{2\pi/-t\phi''(0)}$$

对一般情形，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $\forall\,|t|<\delta$

$$\left|\phi(t)-\frac{\phi''(0)}{2}t^2\right|\le\varepsilon t^2$$

则

$$\int_{-\delta}^{\delta}e^{\frac{x^2t}{2}(\phi''(0)-2\varepsilon)}dt\le\int_{-\delta}^{\delta}e^{x\phi(t)}dt$$

$$\le\int_{-\delta}^{\delta}e^{\frac{xt^2}{2}(\phi''(0)+2\varepsilon)}dt$$

对此 $\delta>0$，$\exists\eta>0$，s.t.

$$\phi(t)<-\eta,\quad 当\ |t|>\delta$$

故

$$\int_{|t|\ge\delta}e^{x\phi(t)}dt\le e^{-(x-1)\eta}\int_R e^{\phi(t)}dt\sim O(e^{-\alpha x})$$

$\alpha>0,x>1$

对上界有

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x\phi(t)}dt \le \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{xt^2}{2}(\phi''(0)+2\varepsilon)}dt - \int_{|t|\ge\delta} e^{\frac{xt^2}{2}(\phi''(0)+2\varepsilon)}dt + O(e^{-\alpha x})$$

$$= \sqrt{2\pi}\left(x(-\phi''(0)-2\varepsilon)\right)^{-1/2} + O(e^{-\beta x}), \quad \beta>0$$

对下界类似，于是

$$\lim_{x\to\infty} I(x) \Big/ \sqrt{2\pi}\left(-x\phi''(0)\right)^{-1/2} = 1 \qquad \#$$

注：一般情形如 $\phi(0)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\log I(x) = \sup_t \phi(t).$$

2. 一般形式与实际操作：

设 $I(x) = \int_a^b f(t)\, e^{x\phi(t)}dt$

设 $\phi(t)$ 在 $t=c\in[a,b]$ 处最大，$f(c)\neq 0$，则

$$I(x) \sim I(x;\varepsilon) = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t)\,e^{x\phi(t)}dt \qquad c\in(a,b)$$

如 $c=a$ 或 b，则为单边形式，舍去部分为指数无穷小.

例1: $I(x)=\int_0^{10}(1+t)^{-1}e^{-xt}dt$, $x\to\infty$

Laplace近似:

$$I(x)\sim I(x;\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}(1+t)^{-1}e^{-xt}dt$$

由 $\varepsilon\ll 1$, $(1+t)^{-1}\sim 1$

$$I(x;\varepsilon)\sim\int_0^{\varepsilon}e^{-xt}dt=(1-e^{-\varepsilon x})/x\sim 1/x.$$

注: 由 $\int_0^{10}\to\int_0^{\varepsilon}$ 为对 $(1+t)^{-1}$ 作Taylor展开, 再由 $\int_0^{\varepsilon}\to\int_0^{\infty}$ 是方便计算; 每次偏差为指数无穷小.

例2: $\Gamma(x)$的 Stirling 公式:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x\to\infty)$$

此时 $f(t)=e^{-t}/t$, $\phi(t)=\ln t$, $t=\infty$时才最大!

不能直接使用. 由 $\frac{d}{dt}\left(e^{-t}t^{x}\right)=0\Rightarrow t=x$

取 $t=sx$ 得:

$$\Gamma(x)=x^{x}\int_0^{\infty}e^{-x(s-\ln s)}s^{-1}ds$$

此时 $\phi(s)=\ln s-s$，$f(s)=s^{-1}$

$s=1$ 时 $\phi(s)$ 最大，故

$$\Gamma(x)\sim x^{x}e^{-x}\sqrt{2\pi/x}\,,\qquad x\to\infty$$

3. Watson引理：

设 $I(x)=\int_0^b f(t)e^{-xt}\,dt \qquad b>0$

且 $f(t)\sim t^{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^{\beta n}$，$t\to 0+$；其中 $\alpha>-1$，

$\beta>0$ 以保证 $t=0$ 附近的收敛性.

有 $I(x)\sim I(x;\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}f(t)e^{-xt}\,dt$

且

$$\Big|I(x;\varepsilon)-\underbrace{\sum_{n=0}^{N}a_n\int_0^{\varepsilon}t^{\alpha+\beta n}e^{-xt}\,dt}_{I_N(x;\varepsilon)}\Big|\leq K\int_0^{\infty}t^{\alpha+\beta(N+1)}e^{-xt}\,dt$$

$$=K\cdot\Gamma(\alpha+\beta(N+1)+1)\Big/x^{\alpha+\beta(N+1)+1}$$

故

$$I(x)-\sum_{n=0}^{N}a_n\Gamma(\alpha+\beta n+1)\Big/x^{\alpha+\beta n+1}\sim o\left(x^{-\alpha-\beta N-1}\right)$$

即有Watson引理

$$I(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma(\alpha+\beta n+1)\Big/x^{\alpha+\beta n+1}.$$

例3: $I(x) = e^{-x}\int_0^{\infty}(t^2+2t)^{-1/2}e^{-xt}dt$

当 $|t|<2$ 时

$$(t^2+2t)^{-1/2}=(2t)^{-1/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2})}$$

故

$$I(x)\sim e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{[\Gamma(n+\frac{1}{2})]^2}{2^{n+1/2}n!\,\Gamma(\frac{1}{2})x^{n+1/2}},\quad x\to\infty.$$

4. 一般情形的Laplace近似:

设 $\phi(t)$ 在 $t=c\in(a,b)$ 处达最大, $f(c)\neq 0$, 则

$$I(x)=\int_a^b f(t)e^{x\phi(t)}dt\sim I(x;\varepsilon)=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}f(t)e^{x\phi(t)}dt$$

$$\sim\frac{2\Gamma(\frac{1}{p})(p!)^{1/p}}{p[-x\phi^{(p)}(c)]^{1/p}}f(c)e^{x\phi(c)},\quad\begin{cases}\phi^{(l)}(c)=0, & l=1,\cdots,p-1\\ \phi^{(p)}(c)<0, & p\text{偶数}\end{cases}$$

即 $\phi(t)=\phi(c)+\frac{1}{p!}(t-c)^p\phi^{(p)}(c)+o(|t-c|^p)$.

5. 高维的Laplace近似:

如 $I(x)=\int_Q e^{x\phi(t)}dt$, $Q=[-1,1]^d$

设$\phi(0)=0$, $\phi(t)<0$, ($t\in\Omega$), $\phi\in C^2(\Omega)$, 当$t\sim 0$时有

$$\phi(t)=-\frac{1}{2}t^T A t+o(|t|^2)$$

A对称正定, 则

$$I(x)\sim(2\pi)^{d/2}(\det A)^{-1/2}\,x^{-d/2}.$$

6. 一般情形的高阶Laplace展开:

参见Bender与Orszag书, 略.