应用数学导论　　12-01

便笺标题　　2011/4/24

Lect 12 Two-point BVP

一. Why?

两点边值问题是椭圆型PDE的最简单的原型，是介绍PDE方法的良好模型.

二. 模型问题:

1. BVP: 设 $f(x)\in C^2[0,1]$

$$\begin{cases} -u''(x)=f(x) & x\in(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

方程的通解 $u(x)=C_1+C_2x-\int_0^x F(s)\,ds$

其中 $F(s)=\int_0^s f(t)\,dt$，分部积分得:

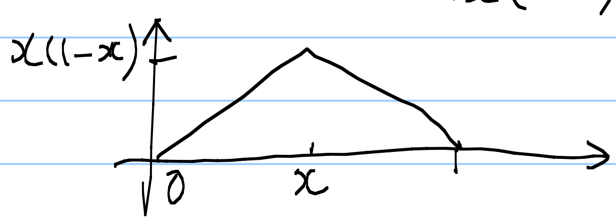
$$\int_0^x F(s)\,ds=\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$

由边条 $\Rightarrow$ $C_1=0$, $C_2=\int_0^1(1-s)f(s)\,ds$

$u(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds$，其中

$$G(x,s)=x(1-s)-\chi_{[0,x]}(s)(x-s)=\begin{cases} s(1-x) & 0\le s\le x \\ x(1-s) & x\le s\le 1 \end{cases}$$

为Green函数.



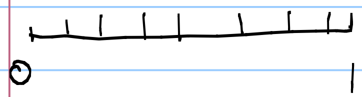
12-02

满足

$$\begin{cases} -\partial_{xx} G(x,s) = \delta(x-s) \\ G(0,s)=G(1,s)=0 \end{cases}$$

三. 有限差分:

1. 离散



$\{x_j\}_{j=0}^{n}$ $x_j = jh$, $h=1/n$

$\{u_j\}_{j=0}^{n}$ 为 $u(x_j)$ 的近似.

中心差分.

$$-\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2} = f(x_j)=f_j \qquad j=1,\cdots,n-1$$

$u_0=u_n=0$

得 $A_h U_h = f_h$

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad U_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad f_h = h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

2. 分析:

· 定义 $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ 则 $\mathcal{L}u=f$

有极值原理:

$$\|u\|_\infty = \left\|\int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds\right\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \left\|\int_0^1 G(x,s)\,ds\right\| \le \frac{1}{8}\|f\|_\infty$$

· 定义 $(\mathcal{L}_h w_h)_j = -(w_{j+1}-2w_j+w_{j-1})/h^2$, $j=1,\cdots,n-1$

12-03

为离散Laplacian，其中w_h是定义在格点上的离散值函数.

·记V_h为定义在离散点$\{x_j\}_{j=0}^n$上的离散函数，而V_h^0为边值为0的离散函数集.

有限差分方法求解$u_h \in V_h^0$ s.t.

$$(\mathcal{L}_h u_h)_j = f(x_j) \qquad j=1,\cdots,n-1$$

·相容性：

定义局部截断误差

$$\tau_h(x_j) = (\mathcal{L}_h u)_j - (\mathcal{L}u)_j$$

$$= \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\eta) - (\mathcal{L}u)_j - f(x_j)$$

$$= O(h^2)$$

定义离散L_h^∞范数：

$$\|v_h\|_{h,\infty} \triangleq \max_{0\le j\le n} |v_h(x_j)|$$

则$\|\tau_h\|_{h,\infty} \le \frac{h^2}{12}\|f''\|_\infty$　如$f\in C^2[0,1]$则

$$\|\tau_h\|_{h,\infty} \to 0 \quad (h\to 0)$$

·令$e_h = u - u_h$，则$\mathcal{L}_h e_h = \mathcal{L}_h(u-u_h)$

$= L_h u - f = \tau_h$

定义离散Green函数 $G^k \in V_h^0$ 为:

$$L_h G^k = e^k \quad \text{其中 } e_k = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$$

$k = 1, \cdots, n-1$

我们有 $(G^k)_j = h\, G(x_j, x_k) \quad j = 1, \cdots, n-1$

则由 $L_h u_h = f$

$$\Rightarrow u_h = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) G^k = L_h^{-1} f$$

$$= h \sum_{k=1}^{n-1} G(x_j, x_k) f(x_k)$$

- 稳定性:

对 $L_h u_h = f$ 则

$$|u_h(x_j)| \le h \sum_{k=1}^{n-1} G(x_j, x_k) |f(x_k)|$$

$$\le \|f\|_{h,\infty} \underbrace{\left(h \sum_{k=1}^{n-1} G(x_j, x_k)\right)}_{} = \frac{1}{2} x_j (1 - x_j)$$

$$\le \frac{1}{8} \|f\|_{h,\infty}$$

12-05

即 $\|u_h\|_{h,\infty} \le \frac{1}{8}\|f\|_{h,\infty}$

. 收敛性:

由 $\mathcal{L}_h e_h = \tau_h \Rightarrow \|e_h\|_{h,\infty} \le \frac{1}{8}\|\tau_h\|_{h,\infty}$

$$\le \frac{h^2}{96}\|f''\|_\infty$$

四. 有限元离散:

1. 边值问题的变分形式:

~~形式上~~ $\mathcal{L}u = f$ $\quad$ $\mathcal{L}$ 为线性自伴算子

$\downarrow$

$$AX = b \Longleftrightarrow \min_X \Phi(X) = \frac{1}{2}X^TAX - X^Tb$$

$$\min_u \frac{1}{2}(u, \mathcal{L}u) - (f, u) \triangleq J(u) \qquad u \in V \sim \text{Hilbert空间}$$

$$\forall v \in V, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = 0$$

$\Downarrow$

$$a(u, v) \triangleq (\mathcal{L}u, v) = (f, v)$$

如 $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ 则 $a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx$

偏微分方程的变分求解法将PDE化为变分形式:

12-06

寻找 $u \in V$ 为Hilbert空间, s.t.

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

$$\triangleq (f, v) \sim L^2\text{-内积}$$

对BVP取 $V = H_0^1(0,1) \triangleq \{u \mid u \in L^2(0,1),\ u' \in L^2(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

2. Galerkin方法:

取V的子空间 V_h (有限维), 之后:

寻找 $u_h \in V_h$ s.t.

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

如 $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 为 V_h 一组基, 则

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x), \quad v_h = \sum_{j=1}^N v_j \varphi_j(x)$$

$$a(u_h, v_h) = \sum_{j,k=1}^N u_j v_k\, a(\varphi_j, \varphi_k) = u^T A v$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^N \qquad a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

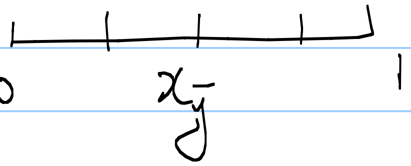
$$(f, v_h) = \sum_{j=1}^N v_j (f, \varphi_j) = f^T v \qquad f_j = (f, \varphi_j)$$

故化为求解 $u\in\mathbb{R}^N$ s.t.

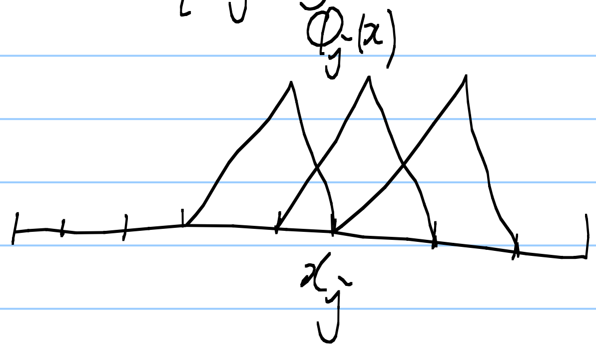
$$u^T A v = f^T v \quad \forall v\in\mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow u^T A = f^T \Rightarrow A^T u = f$$

3.有限元方法：



取$\{\varphi_j(x)\}$为分片线性基函数



则

$$a(\varphi_j,\varphi_k) = \begin{cases} 2/h & j=k \\ -1/h & |j-k|=1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$f_j = (f,\varphi_j) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)\,dx \sim O(h)$$

求解线性代数方程组即可得.