Lect 8 Solving linear system: I

一、引言：Why?

1. 求解线性代数方程组是整个数值计算的核心问题之一，其来源包括：

A. 求解PDE离散得到的方程组；

B. 求解非线性代数方程组；

C. 电路分析

2. 通常方法：

A. 直接法 (direct methods)

B. 迭代法 (iteration methods)

二、直接法简介

1. Gauss消去法：A可逆：$A \cdot X = b$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & a_{1n}^{(n)} & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \cdots & a_{2n}^{(n)} & b_2^{(n)} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

计算复杂度 $O(\frac{2}{3}n^3)$

对应于矩阵分解 $A=L\cdot U$, $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

· 如A为对称矩阵，可有Cholesky分解，$A=L\cdot L^T$, $O(\frac{1}{3}n^3)$

· 如A三对角

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ a_2 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & d_n \end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

追赶法 (Thomas algorithm)

$\alpha_1=d_1$, $\beta_i=a_i/\alpha_{i-1}$, $\alpha_i=d_i-\beta_i c_i$, $i=2,\cdots,n$

$O(n)$ 复杂度

08-03

- 以上要求顺序主子式 >0，否则要作 $A=PLU$，P 为置换阵

此时采用主元技术（pivoting），列主元或全主元.

2. 基本矩阵分析：

A. 向量范数：（norm）

2-范数：$\|x\|_2=\left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2}$

∞-范数：$\|x\|_\infty=\max_j |x_j|$

1-范数：$\|x\|_1=\sum_j |x_j|$

p-范数：$\|x\|_p=\left(\sum_j |x_j|^p\right)^{1/p}$，　$1\le p<\infty$

B 矩阵范数：

$\|A\|\triangleq\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$　（由 $\|\cdot\|$ 诱导的范数）

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}=\sigma_{max}(A)$　（A 对称时，$\|A\|_2=\rho(A)$）

$\|A\|_\infty=\max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

$\|A\|_1=\max_j \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$，$\|A\|_F\triangleq\left(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

$\|\cdot\|_F$ 不是诱导范数（因 $\|I\|_F\neq 1$）

08-04

性质:

$\|A\| \geq 0$, 且 $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$

$\|kA\| = |k| \cdot \|A\|$

$\|A+B\| = \|A\| \cdot \|B\|$

$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \rightarrow$ 仅对诱导范数.

C. 稳定性分析: 均设A可逆

条件数: $Cond(A) \triangleq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

RMK: ① $Cond(A) \geq 1$

② $Cond_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$ (A对称正定)

$$\left.\begin{aligned} &A \cdot X = b \\ &A \cdot (X+\delta X) = b + \delta b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta X = A^{-1} \delta b$$

$$\|\delta X\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\| = \|A^{-1}\| \cdot \|AX\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$ ($b \neq 0$ 假设)

$$\Rightarrow \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq Cond(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$Cond(A)$为误差放大的度量. 如$Cond(A) \gg 1$, 稳定性差.

三. 迭代法:

1. 基本思想:

08-05

求解 $g(x)=0 \longrightarrow x=f(x)$ 作不动点迭代.

2. Jacobi迭代:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1}+a_{12}x_2^{k}+\cdots+a_{1n}x_n^{k}=b_1 \\ a_{21}x_1^{k}+a_{22}x_2^{k+1}+\cdots+a_{2n}x_n^{k}=b_2 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1^{k}+a_{n2}x_2^{k}+\cdots+a_{nn}x_n^{k}=b_n \end{cases}$$

设 $A=D-L-U$, 则有矩阵表示:

$$D\cdot X^{k+1}-(L+U)\cdot X^{k}=b$$

$$\Rightarrow \quad X^{k+1}=D^{-1}(L+U)\cdot X^{k}+D^{-1}b$$

记 $B_J=D^{-1}(L+U)$ 为Jacobi迭代矩阵.

2. Gauss_Seidel迭代

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1}+a_{12}x_2^{k}+\cdots+a_{1n}x_n^{k}=b_1 \\ a_{21}x_1^{k+1}+a_{22}x_2^{k+1}+\cdots+a_{2n}x_n^{k}=b_2 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1^{k+1}+a_{n2}x_2^{k+1}+\cdots+a_{nn}x_n^{k+1}=b_n \end{cases}$$

则 $(D-L)\cdot X^{k+1}-U\cdot X^{k}=b$

$$X^{k+1} = (D-L)^{-1}U \cdot X^k + (D-L)^{-1}b$$

记 $B_{GS} = (D-L)^{-1}U$ 为G-S迭代矩阵.

3.SOR迭代:

$$x_1^{k+1} = \omega\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}x_2^k}{a_{11}} - \cdots - \frac{a_{1n}x_n^k}{a_{11}}\right) + (1-\omega)X_1^k$$

$$x_2^{k+1} = \omega\left(\frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}x_1^{k+1}}{a_{22}} - \cdots - \frac{a_{2n}x_n^k}{a_{22}}\right) + (1-\omega)X_2^k$$

$\cdots$

$$x_n^{k+1} = \omega\left(\frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}x_1^{k+1}}{a_{nn}} - \cdots - \frac{a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1}}{a_{nn}}\right) + (1-\omega)X_n^{k+1}$$

则 $$X^{k+1} = \omega\left[D^{-1}b + D^{-1}L \cdot X^{k+1} + D^{-1}UX^k\right] + (1-\omega)X^k$$

$$X^{k+1} = (I-\omega D^{-1}L)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U\right]X^k + \omega D^{-1}b$$

记 $B_\omega = (I-\omega D^{-1}L)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U\right]$ 为迭代阵.

$\omega \in (0,1)$ 称 under-relaxation, $\omega \in (0,2)$, over-relaxation.

类似有JOR

$$X^{k+1} = \left[(1-\omega)I + \omega D^{-1}(L+U)\right]X^k + \omega D^{-1}b$$

4. 收敛性分析:

A. 1D情形: $ax=b$, $a=f-g$

$$x^{k+1}=f^{-1}gx^k+f^{-1}b$$

精确解 x^*, $x^*=f^{-1}gx^*+f^{-1}b$

定义 $e^k=x^k-x^*$ $\Rightarrow$ $e^{k+1}=f^{-1}ge^k$

$|e^k|\to 0 \Leftrightarrow |f^{-1}g|<1$.

B. 高维:

$$\left.\begin{aligned} X^{k+1}&=B\cdot X^k+g \\ X^*&=B\cdot X^*+g \end{aligned}\right\}\Rightarrow e^{k+1}=B\cdot e^k$$

$e^k\triangleq X^k-X^* \Rightarrow \|e^k\|\le\|B\|^k\cdot\|e^0\|$

一如 $\|B\|<1 \Rightarrow \|e^k\|\to 0$

定义矩阵A的谱半径:

$$\rho(A)=\max_{\lambda}|\lambda(A)|$$

定理: ① 对 $\forall$ 诱导范数有

$$\rho(A)\le\|A\|$$

② $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 诱导范数 $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ s.t.

$$\|A\|_{A,\varepsilon}\le\rho(A)+\varepsilon$$

解：① $\forall$ 特征值 λ：

$$|\lambda|\cdot\|v\| = \|Av\| \le \|A\|\cdot\|v\| \Rightarrow |\lambda| \le \|A\|$$

② 参考 Horn & Johnson, Matrix analysis.

定理：迭代法对任意初值收敛 $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$.

解：$\Rightarrow$) 反证，设

$$Be^0 = \lambda e^0 \qquad |\lambda| \ge 1$$

$$\Rightarrow \quad e^k = \lambda^k e^0 \Rightarrow \|e^k\| = |\lambda|^k \|e^0\| \not\to 0$$

$\Leftarrow$) 由前一定理，$\exists \|\cdot\|_{B,\varepsilon}$ s.t.

$$\|B\|_{B,\varepsilon} < \rho(B) + \varepsilon < 1 \quad (\varepsilon \text{充分小})，\text{得证}.$$

定理：设 $\|B\| = q < 1$，则

$$\|e^k\| \le \frac{q^k}{(1-q)} \cdot \|x^1 - x^0\|$$

解：显然有 $\|e^k\| \le q^k \cdot \|e^0\|$

$$e^0 = x^0 - x^* = x^0 - (I-B)^{-1}g = (I-B)^{-1}\left[(I-B)x^0 - g\right]$$

$$= (I-B)^{-1}(x^0 - x^1)$$

而 $\|(I-B)^{-1}\| \le \sum\limits_k \|B\|^k = (1-q)^{-1}$. #.

08-09

定理：如A严格对角占优(sDDM)，即

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

则 Jacobi，G-S 收敛。

证：对 Jacobi 迭代，$B = D^{-1}(L+U)$

$\forall |\lambda| \geq 1$，$\lambda I - B = D^{-1}(\lambda D - L - U)$

$\lambda D - (L+U)$ 依然 sDDM $\Rightarrow \det(\lambda I - B) \neq 0$. #

定理：SOR 收敛 $\Longrightarrow \omega \in (0,2)$.

证：$B_\omega = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U\right]$，

$\left|\prod_i \lambda_i\right| = |\det B_\omega| = |(1-\omega)^n|$

由 $\rho(B_\omega) < 1 \Rightarrow |1-\omega| < 1 \Rightarrow \omega \in (0,2)$.

定理：(Ostrowski) 如A对称正定，则 SOR 收敛 $\Longleftrightarrow \omega \in (0,2)$.

证：$\Rightarrow$) √

$\Leftarrow$) 设 λ 为 B_ω 特征值

$$(D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right] \cdot X = \lambda X$$

$$\Rightarrow \left[(1-\omega)D + \omega U\right] \cdot X = (D - \omega L) \cdot X \cdot \lambda$$

08-10

由于 $L=L^T$，用 $X^* \triangleq \overline{X}^T$ 左乘，并令

$$X^*DX=d>0, \quad X^*LX=\alpha+i\beta \Rightarrow X^*L^TX=\alpha-i\beta$$

得

$$(1-\omega)d+\omega(\alpha-i\beta)=\lambda\left(d-\omega(\alpha+i\beta)\right)$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2=\frac{[(1-\omega)d+\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2}{(d-\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2}$$

由于 $[(1-\omega)d+\omega\alpha]^2-(d-\omega\alpha)^2=\omega d(d-2\alpha)(\omega-2)$

而A正定 $\Rightarrow X^*AX=d-2\alpha>0$

故 $\omega\in(0,2)\Rightarrow|\lambda|^2<1$，得证. #

<u>RMK</u>：最佳松弛因子：（David M. Young）

$$\omega_{opt}=2\Big/\left(1+\sqrt{1-\rho(J)^2}\right) \quad J\text{为Jacobi迭代阵.}$$

可参考 徐树方编"数值线性代数".