第6讲 Gaussian Quadrature

一、代数精度：

1.定义：

数值积分 $I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx I_n(f) \triangleq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ ①

x_k：求积节点　　A_k：求积系数

定义：$E_n(f)=I(f)-I_n(f)$

如 $\forall f\in \mathbb{P}_d$，$E_n(f)=0$，则称 d 次代数精度.

RMK：求积公式有 $2(n+1)$ 个自由度，直观上最多 $2n+1$ 次代数精度。"某种意义上"，代数精度越高求积越准确.

2.插值型积分：

定义：称格式为插值型的，如 $E_n(f)=0$，$\forall f\in\mathbb{P}_n$.

RMK：插值型积分等价于求积公式由对 $x_0,\cdots,x_n$ 的插值函数积分得到。

pf：$\Rightarrow$）取 f 为 $L_n(g)=\sum_{k=0}^{n} g(x_k)l_k(x)$

故 $I_n(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=\sum_{k=0}^{n} A_k g(x_k)$

$I(f)=\sum_{k=0}^{n} g(x_k)\int_a^b l_k(x)\,dx$ 由g的任意性有

$$A_k=\int_a^b l_k(x)\,dx,$$

$\Leftarrow$) $\forall f\in\mathbb{P}_n$, 则 $L_n(f)=f$, 故 $I(f)=I_n(f)$. #

定理: $\forall\ 0\le k\le n+1$, ① 为 $d=n+k$ 次代数精度 $\Longleftrightarrow$

(1) ① 为插值型的.

(2) $\omega_{n+1}(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$ 满足 $\int_a^b \omega_{n+1}(x)p(x)\,dx=0$, $\forall p\in\mathbb{P}_{k-1}$.

证: $\Rightarrow$) (1) √

(2) 由(1)且 $\omega_{n+1}(x_k)=0$, $k=0,1,\cdots,n$

则由 $\deg(\omega_{n+1}(x)p(x))\le n+k$

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)p(x)\,dx=\sum_k A_k\,\omega_{n+1}(x_k)\,p(x_k)=0$$

$\Leftarrow$) $\forall g(x)\in\mathbb{P}_{n+k}$,

$$g(x)=\omega_{n+1}(x)g_1(x)+g_2(x)\qquad g_2\in\mathbb{P}_n,\ g_1\in\mathbb{P}_{k-1}$$

$g(x_k)=g_2(x_k)$, $\qquad k=0,1,\cdots,n$

$\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b g_2(x)\,dx=\sum_k A_k g_2(x_k)=\sum_k A_k g(x_k)$ #

06-03

3. Newton-Cotes求积：

A. N-C为插值型的，至少有n次代数精度；

B. 如n n为偶数，则至少有n+1次代数精度.

解：只须证 $\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx = 0$，设 $x = a + th$

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx = \int_{-k}^{k}(t+k)(t+k-1)\cdots(t-k)\,dt\cdot h^{n+2}$$

$$n=2k \qquad = \int_{-k}^{k} t(t^2-k^2)\cdots(t^2-1)\,dt\cdot h^{n+2} = 0$$

二. Gauss积分：

1. 定义：Gauss积分是具有2n+1次代数精度的积分公式.
(n+1个点). 其中 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ 称高斯点.

2. Gauss积分的构造：

不妨 $[a,b]=[-1,1]$，$\omega(x)=1$.

定理：当且仅当 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ 为n次Legendre多项式的零点时，①为Gauss积分公式.

解：只需证明对 $\forall p(x)\in \mathbb{P}_n$，有

$$\int_{-1}^{1} \omega_{n+1}(x)\, p(x)\,dx = 0$$

由 $\{x_k\}_k$ 为 Legendre 多项式的零点及正交多项式的性质得证.

称上述积分为 Gauss-Legendre 求积.

当权函数,区间不同时分别得到 Gauss-Chebyshev, Gauss-Hermite, Gauss-Laguerre 求积等。

· Gauss-Legendre 积分节点:

$n=0,\quad g_1(x)=x,\ \Rightarrow\ x_0=0$

$n=1,\quad g_2(x)=x^2-1/3\ \Rightarrow\ x_{0,1}=\pm\sqrt{3}/3$

3. Gauss 积分性质:

A. Gauss 积分具有最高代数精度:

解: 取 $p(x)=\omega_{n+1}^2(x)\in \mathbb{P}_{2n+2}$,

$I_n(p)=0,\quad I(p)>0$, 得证. #

B. 求积系数 A_k 恒大于 0, 且 $\sum\limits_k A_k=(b-a)$

解: 取 $f_k(x)=\left(\dfrac{\omega_{n+1}}{(x-x_k)}\right)^2\in\mathbb{P}_{2n}\quad k=0,1,\cdots,n.$

06-05

$$0 < \int_a^b f_k(x)dx = \sum_l A_l f_k(x_l) = A_k\left(\omega_{n+1}'(x_k)\right)^2$$

$\Rightarrow A_k > 0$。取 $f=1$ 即得后半部分

三. Euler-Maclaurin 公式:

A. 定理: 设 $f \in C^m[a,b]$ $(m \geq 2)$

$$T_h(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)$$

则

$$I(f) = T_h(f) - \sum_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \frac{b_{2j}h^{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\right]$$

$$+(-1)^m h^m \int_a^b \tilde{B}_m\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(m)}(x)dx$$

这里 $[\frac{m}{2}]$ 指小于或等于 $\frac{m}{2}$ 的最大整数, $b_{2j} = (2j)!B_{2j}(0)$ 为 Bernoulli 数.

定义: n 次 Bernoulli 多项式 $B_n(x)$ 指

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ B_n'(x) = B_{n-1}(x) \quad 且 \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$b_n = n!\,B_n(0)$ $(n=0,1,\cdots)$ 称 Bernoulli 数.

由 $\int_0^1 B_n(x)dx=0 \Longleftrightarrow B_n(0)=B_n(1)$, $n=2,3,\cdots$

注: $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$.

命题: Bernoulli多项式有对称性: ($x=\frac{1}{2}$为对称点)

$$B_n(x)=(-1)^n B_n(1-x),\quad n=0,1,2,\cdots$$

定义: $\tilde{B}_n(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为$B_n(x)$的周期扩张, 即

$$\tilde{B}_n(x)=B_n(x)\qquad x\in[0,1]$$

且 $\tilde{B}_n(x+1)=\tilde{B}_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Euler-Maclaurin公式证略.

B. ~~谱精度~~:

~~如f~~ 周期 $f^{(2j-1)}(a)=f^{(2j-1)}(b)$, 误差 $\sim O(h^m)$

命题: 如 $f\in C_{2\pi}^{2m+1}$ (周期2π的C^{2m+1}函数), 则复合梯形的求积精度

$$E(f)\leq C\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m+1}\int_0^{2\pi}|f^{(2m+1)}(x)|dx$$

解: 由E_M公式:

$$|E(f)| \le h^{2m+1} \int_0^{2\pi} |\tilde{B}_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x)| dx$$

由 $\tilde{B}_{2m+1}$ 的 Fourier 展式

$$|\tilde{B}_{2m+1}(y)| \le 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^{2m+1}} \quad \forall y \in \mathbb{R} \ \#.$$

定理：如 $f \in C^{\infty}_{2\pi}$，则 ∃ 带状区域 $D = \mathbb{R} \times (-a, a) \subset \mathbb{C}$ $(a>0)$，s.t. f 在 D 上解析，且

$$|E(f)| \le 4\pi M / (e^{2\pi a/h} - 1)$$

其中 $M = \sup_{z \in D} |f(z)|$

RMK：以上即谱精度或指数收敛，比任意代数阶都快.

参考书：R. Kress, Numerical Analysis.

注：由 $B_n(x)$ 的奇偶性，

$$\tilde{B}_{2m+1}(x) = 2(-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{(2\pi k)^{2m+1}}, \quad m = 0, 1, \cdots$$