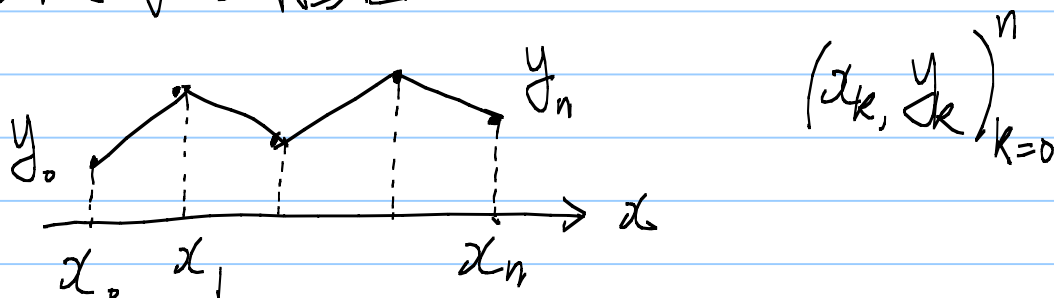


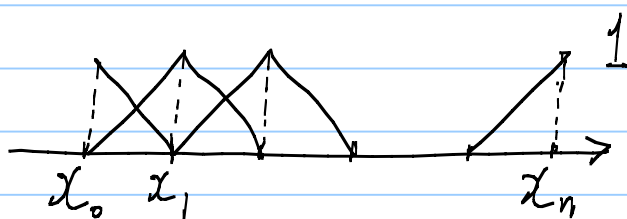
第三讲 Spline interpolation

一. 分段线性插值:



$$\mathcal{L}_1 f(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x), \quad l_k(x) \text{ 满足}$$

$$l_k(x_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n \quad \text{分片线性}$$



Tent functions.

误差估计:

$$\|\mathcal{L}_1 f - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{2!} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \|f''\|_{\infty} = \frac{h^2}{8} \|f''\|_{\infty}$$

$$\text{其中 } h = \max_k |x_k - x_{k-1}|$$

二. 三次样条插值 (Cubic spline interpolation)

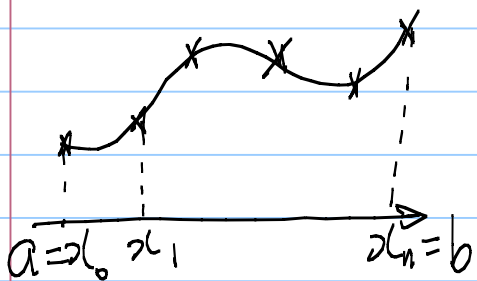
提法:

给定 $(x_k, f_k)_{k=0}^n$, 寻找 $S(x)$ s.t.

① $S(x_k) = f_k$,

② $S(x) \in C^2[a, b]$

③ $S(x)$ 分片三次多项式.



03-02

命题: $S(x)$ 的解“存在唯一” (添加边界条件后)

分析: 总自由度 $4n$

约束: 函数值 $2n$
 一阶导连续 $n-1$
 二阶导连续 $n-1$ } $4n-2$ 个

为使解唯一, 加边条:

(I) $S'(x_0) = d_0, S'(x_n) = d_n$ 指定边界弯曲程度

(II) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ 自然弯曲

(III) $S^{(k)}(x_0) = S^{(k)}(x_n), k=0,1,2$ 周期

pf: 由 $S''(x) \in C^0[a, b]$, 且 $S''(x)$ 分片线性, 令

$$S''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad x \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$h_j = x_j - x_{j-1}$$

$$\text{由 } S(x_k) = f_k \quad k=0,1,\dots,n$$

$$S(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j^3} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j^3} \\ + \left(f_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(f_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

$$\text{由 } S'(x_j-0) = S'(x_j+0) \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

$$S'(x_j-0) = \frac{h_j^- M_{j-1}}{6} + \frac{h_j^- M_j}{3} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j^-}$$

$$S'(x_j+0) = -\frac{h_{j+1}^- M_j}{3} - \frac{h_{j+1}^- M_{j+1}}{6} + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}^-}$$

联立得:

$$\frac{h_j^-}{6} M_{j-1} + \frac{h_j^- + h_{j+1}^-}{3} M_j + \frac{h_{j+1}^-}{6} M_{j+1} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}^-} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j^-}$$

对三种边条有

$$(I) \quad 2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - d_0 \right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n} \left(d_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n} \right)$$

$$(II) \quad M_0 = M_n = 0$$

$$(III) \quad M_0 = M_n,$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_1 + h_n}{3} M_n + \frac{h_n}{6} M_{n-1} \\ &= \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n} - \frac{f_1 - f_0}{h_1} \end{aligned}$$

03-04

记为 $A \cdot M = b$

$$(I) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_j = \rho_{j+1} / (\rho_j + \rho_{j+1}), \quad \mu_j = \rho_j / (\rho_j + \rho_{j+1})$$

$$(II) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(III) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-1} & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_k, \mu_k > 0, \quad \lambda_k + \mu_k = 1$$

A 为严格对角占优阵, $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

$\Rightarrow \det A > 0$. 得证. (求解用追赶法)

03-05

• 三次样条的能量极小性质:

引理: $\forall f \in C^2[a, b]$, 满足插值条件及边条之一, 有

$$\int_a^b (f'' - S'')^2 dx = \int_a^b (f'')^2 dx - \int_a^b (S'')^2 dx$$

证: 左 - 右 = $-2 \int_a^b (f - S)'' \cdot S'' dx$

$$= -2 \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f - S)'' \cdot S'' dx$$

$$= -2 \sum_k \left\{ (f - S)' \cdot S'' \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f - S)' S'' dx \right\}$$

$$= 0 \quad (\text{利用三边条及 } S''' = \text{Const}, x \in [x_{k-1}, x_k])$$

物理上, 弯曲杆的弹性势能

$$E = \int_0^L |k|^2 ds \quad k \text{ 为曲率}$$

$$= \int_a^b \frac{(g'')^2}{(1 + g'^2)^3} dx$$

当 $\|g'\|_\infty \ll 1$ 时, $E \approx \int_a^b (g'')^2 dx$

由上述引理知以下极小化问题

03-06

$$S(x) = \underset{g \in C^2[a,b]}{\text{argmin}} \int_a^b (g'')^2 dx$$

g 满足插值条件
及其中之一种边条

- 误差估计: (以下仅针对步距节点证明)

定理: 设 $f \in C^4[a,b]$, $S(x)$ 满足 边条(I) 的三次样条插值函数 (步距节点), 则

$$\|f - S\|_{\infty} \leq \frac{h^4}{16} \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

引理: 在步距条件下, $\|S''\|_{\infty} \leq 3 \|f''\|_{\infty}$

证明可参见 R. Kress, Numerical Analysis.

证: 设 $L_1: C[a,b] \rightarrow$ 分片线性插值函数.

令 $r(x) = f(x) - S(x)$, 则

$$\|r\|_{\infty} = \|r - L_1 r\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{8} \|r''\|_{\infty}, \text{ 且 } L_1 r = 0$$

设某三次样条函数 ω 满足 $\omega'' = L_1 f''$, 则

$$\|r''\|_{\infty} = \|f'' - S''\|_{\infty} \leq \|f'' - L_1 f''\|_{\infty} + \|L_1 f'' - S''\|_{\infty}$$

03-07

$$\begin{aligned}
 \text{而 } \|L_1 f'' - S''\|_\infty &= \|\omega'' - S''\|_\infty = \|(\omega - S)''\|_\infty \\
 &\leq 3\|(\omega - f)''\|_\infty \quad (3/理) \\
 &= 3\|L_1 f'' - f''\|_\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \|r''\|_\infty \leq 4\|f'' - L_1 f''\|_\infty$$

$$\leq \frac{h^2}{2} \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\text{代入前式得 } \|r\|_\infty \leq \frac{h^4}{16} \|f^{(4)}\|_\infty. \quad \#$$

• 参数三次样条:

为使曲线不依赖坐标系的选取。可如下:

由 (x_i, y_i) 转化为弧长参数曲线

$$t_{i+1} = t_i + \left[(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 \right]^{1/2}, \quad t_0 = 0$$

分别对 $(t_i, x_i), (t_i, y_i)$ 作三次样条

得 $x(t), y(t)$, 则 $(x(t), y(t))$ 即我们
所要找的曲线。