

第一讲 引言

一、缘起:

1. 北京大学数学学院应用数学方向培养方向推行的系列课程之一. (与Weinan E共同设计本课程)

2. 何谓应用数学?

A. 没有统一的定义: 纯数学本身就不应与应用数学划分鸿沟. 英文: Applied Mathematics.

“分析学”是纯数学还是应用数学?

“代数学”? “几何学”? “概率论”?

• 粗糙定义:

以数学为工具, 解决自然科学和工程实际中的问题.

• Cambridge 的“应用数学与理论物理系”值得思考.

• 新中国的“数学力学系”

• 应用数学不应与自然科学和实际应用脱离, 其试图解决的问题或者在理论上阐释自然的

规律,或者在实际上可应用于实践.

B. 最伟大的应用数学家们: (早其无应用数学)

T. Von Karman, J. Von Neumann

R. Courant, A. Turing, J. Keller, etc.

C. 应用数学教学应包括的内容(个人意见):

a. 分析学 (ODE, PDE, 泛函, 变分, 动力系统, 渐近分析...)

b. 数值计算 (数值分析, 数值代数, 最优化, 微分方程数值解, ...)

* C. 物理学 (经典, 流体, 统计, 量子)

* d. 随机数学 (概率论及统计)

4. 本课程为引论, 仅介绍

A. 数值方法

B. 基本渐近分析.

二. Why?

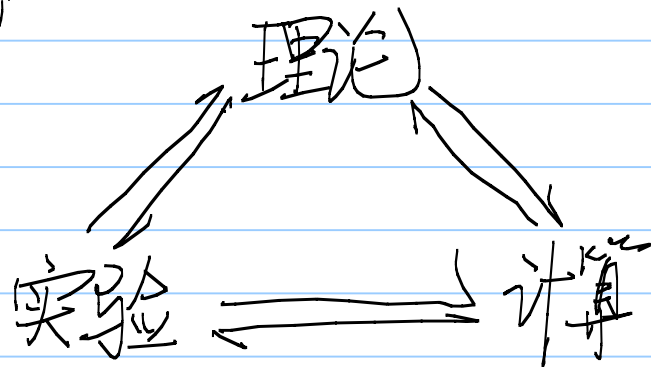
1. 为什么要研究计算方法?

01-03

A. 重要性:

传统模式: 理论 $\longleftrightarrow$ 实验

现代模式:



B. 计算的优势:

a. 定量化:

典例: 数值天气预报, 油藏发现
飞机外型设计, 模拟核反应,
新药设计, ...

b. 价格低廉:

c. 实验的有益补充:

湍流研究.

2. 为什么要研究渐近分析:

A. 所考察问题有小参数 (ε 或 ε^{-1}), 如流体力学

中的 Burgers 方程 (1D)

01-04

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = \varepsilon \partial_{xx} u & x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases}$$

$\varepsilon \ll 1$, 能否对 $u^\varepsilon(t, x)$ 作近似推论?

B. 自然界的问题包含多个尺度, 能否对其进行一定的分析了解其定性行为? 在通常的教学中, 往往过于强调形式化的方面如解的存在唯一性, 而忽略了定性的方面如解的大致形状? 是否有过渡层? 解在不同尺度上的行为?

C. 渐近分析由 Poincaré 研究天体力学中常微分方程近似周期解而提出并为应用数学家广泛采用.

3. 计算数学的历史:

数值分析 (60') $\longrightarrow$ 科学计算 (80') $\longrightarrow$ 计算科学 (21 世纪)

Numerical
Analysis

Scientific
Computing

Computational
Science

4. 当代计算机及算法:

01-05

A. www.top500.org 2010年11月

Top1: 天津超算中心: 天河-1A

$R_{\max} = 2.566$ PFlops ($10^6 G$)
186368 Cores

Top2: 美国 Oak ridge Nat. Lab. $R_{\max} = 2.33$ PFlops

B. 二十世纪十大算法 (由 Computational Science and Engineering 杂志评选)

Metropolis algorithm

Simplex method

Krylov Subspace iteration method

Matrix decomposition method

Fortran compiler

QR algorithm

Quicksort

FFT

Integer relation detection

01-06

Fast multipole method

三. What?

Part I: 数值方法:

1. 插值与逼近
2. 数值积分
3. 线性代数方程组及特征值问题
4. 非线性方程组
5. FFT
6. Monte Carlo

Part II: 渐近分析

1. Laplace method
2. Stationary phase method
3. Saddle point approximation
4. Infinite sum

四. 其它:

01-07

1. References:

张平文, 李铁军: 数值分析

高立, 徐树方, 张平文: 数值代数

A. Quarteroni et al., Numerical Mathematics

Bender and Orszag, Advanced mathematical methods for scientists and engineers: asymptotic methods and perturbation theory.

2. 考核方式:

平时 20%, 上机 20%, 期末 60%

3. 软件资源:

Matlab, Numerical Recipes 等.

4. 应用数学教学实验室:

<http://www.math.pku.edu.cn/misc/amt-l>

5. 联系方式:

tieli@pku.edu.cn, 62757592, 理1-1549.