

1. 证明单边 Laplace 引理:

设 $\phi(t)$ 在 $t=0$ 处极大, $\phi(t) \in C^1(0, +\infty)$, $\phi'(0) < 0$, $\phi(t) < \phi(0)$
 $\forall t > 0$. $\phi(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) s.t. $\int_0^{\infty} e^{\phi(t)} dt$ 收敛,

证明

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{x\phi(t)} dt \sim (-x\phi'(0))^{-1} e^{x\phi(0)}.$$

2. 说明

$$\Gamma(x) \sim x^{x-1/2} e^{-x} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots \right)$$

3. 求近似: ($x \rightarrow \infty$)

a. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin t} e^{-x \sin^4 t} dt$

b. $\int_0^1 \sqrt{t(1-t)} (t+a)^{-x} dt$

c. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan t} e^{-xt^2} dt$

d. $\int_0^{\pi^2/2} ds \int_0^{\pi^2/2} dt e^{x \cos \sqrt{s+t}}$