

Homework 06

便笺标题

2011/3/19

1. 令 $P(x)$ 为 n 次多项式, 满足:

$$\int_a^b P(x) x^k dx = 0, \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

(1) 证明 $P(x)$ 在开区间 (a, b) 中有 n 个实单根 (提示: 考虑 $Q_k(x) = (x-x_1) \cdots (x-x_k)$, 其中 x_i 为 $P(x)=0$ 在 $[a, b]$ 中的根)

(2) 证明: $[a, b]$ 上 n 点积分公式若以 $P(x)=0$ 的根为节点, 代数精度可达 $2n-1$ 阶.

2. 证 $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_n \leq b$ 为 $[a, b]$ 的任意划分, 证明:

$\exists!$ 的 $r_0, r_1, \dots, r_n$ s.t.

$$\sum_{k=0}^n r_k P(x_k) = \int_a^b P(x) dx \quad \forall P(x) \in \mathbb{P}_n$$