

Homework 04

便笺标题

2011/3/19

1. 通过计算直径为1的圆的内接和外切正多边形的周长来计算圆周率 π 。内接 n 边形周长 $p_n = n \sin(\pi/n)$, 外切的周长 $q_n = n \tan(\pi/n)$.

(1) 通过对 $\sin, \tan$ 作 Taylor 展开, 证明 p_n, q_n 具形式

$$p_n = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots$$

$$q_n = b_0 + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots$$

$$h = 1/n, \quad a_0, b_0 = ?$$

(2) 若 $p_6 = 3.0000$, $p_{12} = 3.1058$, 使用 Richardson 外推给出对 π 的更好近似.

若 $q_6 = 3.4641$, $q_{12} = 3.2154$, 使用外推给出更好近似.

(3) 利用 Richardson 外推计算 $\pi = 3.1415926$ 至 3.1415927 之间需算至少多少边形 (对 p_n, q_n 都进行计算测试).