数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

11 一阶逻辑 VII

11.1

令 S 是一个带等词的一阶系统，设闭式 $\mathscr{A}$ 在 S 的所有规范模型中为真，证明 $\mathscr{A}$ 在 S 的所有模型中为真。

11.2

在带等词的一阶系统中，证明

(a) $\vdash (\forall x)(\mathscr{A}(x) \leftrightarrow (\exists y)(x = y \wedge \mathscr{A}(y)))$，$y$ 不出现在 $\mathscr{A}(x)$ 中

(b) $\vdash (\forall x)(\exists y)x = y$

11.3

描述一个关于域论的一阶系统，包括其一阶语言和公理（模式）集。

11.4

设一阶语言 $\mathscr{L}$ 有四个谓词符：$=, P, S, L$；$u = v$ 表示 u 和 v 是相同的，$P(u)$ 表示 u 是一个点，$S(u)$ 表示 u 是一条线，$L(u, v)$ 表示 u 在 v 之上。令 $\mathbb{G}$ 为（一阶）平面入射几何，其在带等词一阶系统（公理）基础上，增加以下（非逻辑）公理：

(1) $P(x) \to \sim S(x)$

(2) $L(x, y) \to P(x) \wedge S(y)$

(3) $S(x) \to (\exists y)(\exists z)(y \sim z \wedge L(y, x) \wedge L(z, x))$

(4) $P(x) \wedge P(y) \wedge x \sim y \to \left(\exists_1 z\right) (S(z) \wedge L(x, z) \wedge L(y, z))$

(5) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge \sim \mathscr{C}(x, y, z))$

这里 $\mathscr{C}(x, y, z)$ 是公式 $(\exists u)(S(u) \wedge L(x, u) \wedge L(y, u) \wedge L(z, u))$ 的缩写，表示 x, y, z 是共线的。

1. 把 (1-5) 翻译成普通几何语言。

2. 证明：$\vdash_{\mathbb{G}} (\forall u)(\forall v)(S(u) \wedge S(v) \wedge u \neq v \rightarrow (\forall x)(\forall y)(L(x,u) \wedge L(x,v) \wedge L(y,u) \wedge L(y,v) \rightarrow x = y))$，并把该定理翻译成普通几何语言。

3. 设 $R(u,v)$ 为 $S(u) \wedge S(v) \wedge \sim(\exists w)(L(w,u) \wedge L(w,v))$ 的缩写，$R(u,v)$ 表示 u 和 v 是不同的平行线。

   (a) 证明：$\vdash_{\mathbb{G}} R(u,v) \rightarrow u \neq v$；

   (b) 证明存在一个 $\mathscr{G}$ 的有限论域规范模型是的以下句子为真：

$$(\forall x)(\forall y)\left(S(x) \wedge P(y) \wedge \sim L(y,x) \rightarrow \left(\exists_1 z\right)(L(y,z) \wedge R(z,x))\right)$$

4. 证明存在一个 $\mathbb{G}$ 的模型使得以下句子为真：

$$(\forall x)(\forall y)(S(x) \wedge S(y) \wedge x \neq y \rightarrow \sim R(x,y))$$