数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

4 一阶逻辑：证明论

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

完全性定理

一阶语言 $\mathscr{L}$

在 $\mathscr{L}$ 上，一阶逻辑 $K_{\mathscr{L}}$

◇ 证明论：$\Gamma \vdash \mathscr{A}$

◇ 模型论：$\Gamma \models \mathscr{A}$

K 的基本性质

- 可靠性：$\Gamma \vdash \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \mathscr{A}$ （命题 4.6）
- 完全性：$\Gamma \vdash \mathscr{A} \Leftarrow \Gamma \models \mathscr{A}$

回顾

证明的目标 Gödel 完全性定理

若 $\mathscr{L}$ 的公式 $\mathscr{A}$ 是（逻辑）有效的，则 $\mathscr{A}$ 是 K 的定理

若 $\models \mathscr{A}$，则 $\vdash \mathscr{A}$

回顾 命题级完全性定理的 Henkin 证法

命题 2.34（L 的完全性定理）

若 $\mathscr{L}_0$ 的公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}$ 是 L 的定理

若 $\models_L \mathscr{A}$，则 $\vdash_L \mathscr{A}$

证

设若 $\nvdash \mathscr{A}$，据 命题 2.30，包含 $\sim\mathscr{A}$ 作为公理的扩充 L^* 是一致的，据 命题 2.33，存在一个赋值 v，赋予 L^* 的每个定理的值为 T，特别地，$v(\sim\mathscr{A}) = T$，这与 $\mathscr{A}$ 是重言式矛盾 □

命题 2.30

令 L^* 是 L 的一个一致扩充，令 $\mathscr{A}$ 是 L 的一个公式且不是 L^* 的定理，则 L^{**} 也是一致的，这里 L^{**} 是 L 的一个扩充，它由 L^* 补充 $\sim\mathscr{A}$ 为公理而得

命题 2.32

令 L^* 是 L 的一致扩充，则存在 L^* 的一个一致完全扩充

命题 2.33

若 L^* 是 L 的一个一致扩充，则存在一个赋值，使得 L^* 的每个定理取值都为 T

定义 4.49

K 的一个扩充是通过修改或扩大的公理集使得 K 的所有定理仍是定理（可能引入新的定理）而得的形式系统 $\diamondsuit$

给定 K 的两个扩充 K_1 和 K_2，K_1 是 K_2 的扩充，若 K_1 所有定理类包含 K_2 所有定理类

定义 4.50 (一阶系统)

一个一阶系统是指 $K_{\mathscr{L}}$ 的一个扩充，其中 $\mathscr{L}$ 为一个一阶语言 $\diamondsuit$

命题 4.51 (参见 命题 2.30)

令 S 是一致的一阶系统，且闭式 $\mathscr{A}$ 不是 S 中的定理，则把 $\sim\mathscr{A}$ 作为一个公理加进 S 的扩充 S^* 也是一致的 $\diamondsuit$

证：（类似 命题 2.30 的反证法）

设若 S^* 是不一致的

存在公式 $\mathscr{B}$，使得 $\vdash_{S^*} \mathscr{B}$ 且 $\vdash_{S^*}\sim\mathscr{B}$

由于 S^* 是 K 的一个扩充

$\vdash_{S^*} \sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$ （命题 4.4）

$\vdash_{S^*} \mathscr{B}\to\mathscr{A}$

$\vdash_{S^*} \mathscr{A}$ （MP）

在 S^* 存在一个 $\mathscr{A}$ 的证明，这样的一个证明是在 S 中从 $\sim\mathscr{A}$ 出发的一个演绎

证（续）

$$\sim\mathscr{A} \vdash_S \mathscr{A}$$

因 $\sim\mathscr{A}$ 是闭的，据演绎定理

$$\vdash_S \ \sim\mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

由 $\vdash_S (\sim\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ （命题 4.4），用 MP

$$\vdash_S \mathscr{A}$$

这与 $\mathscr{A}$ 不是 S 的定理的假设矛盾 □

注

对定理不需要自由变元（命题 4.29，亦见命题 3.48），$\mathscr{A}$ 是闭式，可应用演绎定理

定义 4.52

一个一阶系统 S 是完全的，若对每个闭式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或 $\sim\mathscr{A}$ 是 S 的定理 $\diamondsuit$

注

K 不是完全的，例如 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$ 和 $\sim\forall x_1 A_1^1(x_1)$ 都不是 K 中的定理（例 4.8）

命题 4.53 (Lindenbaum 引理，参见 命题 2.32)

若 S 是一致的一阶系统，则存在一个 S 的一致完全扩充 $\diamondsuit$

证 (类似 命题 2.32的证法)

据命题 3.25，令 $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots$ 是 $\mathscr{L}$ 的所有闭式 的枚举

构造 K 的扩充的序列 $S_0, S_1, S_2, \cdots$ 如下

令 $S_0 = S$

对 $n > 0$，从 S_{n-1} 构造 S_n 如次

若 $\vdash_{S_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$，则 $S_n = S_{n-1}$

否则，加 $\sim\mathscr{A}_{n-1}$ 作为一个新公理进 S_{n-1} 得到 S_n

每个 S_n 都是 K 的一致扩充 ($n \geq 0$) (命题 4.51)

定义 S_∞ 是一阶系统

它把至少在这些 S_n 之一为公理的一切公式都当作公理

证（续）

断言 S_∞ 是一致的

设若不然

存在公式 $\mathscr{A}$，使得 $\vdash_{S_\infty} \mathscr{A}$ 且 $\vdash_{S_\infty} \sim\mathscr{A}$

必存在 n，使得在 S_∞ 的证明中出现于 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 的公理都作为 S_n 的公理

$\vdash_{S_n} \mathscr{A}$ 且 $\vdash_{S_n} \sim\mathscr{A}$

这与 S_n 是一致的相矛盾

证（续）

断言 S_∞ 是完全的

令 $\mathscr{A}$ 是 S 的一个公式（按 S 的构造是为闭式）

$\mathscr{A}$ 一定在序列 $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots$ 中出现

不妨设 $\mathscr{A}$ 就是 $\mathscr{A}_k$

若 $\vdash_{S_k} \mathscr{A}_k$，则 $\vdash_{S_\infty} \mathscr{A}_k$

否则，$\sim\mathscr{A}_k$ 是 S_{k+1} 的一条公理

$\vdash_{S_{k+1}} \sim\mathscr{A}_k$

$\vdash_{S_\infty} \sim\mathscr{A}_k$

总之，$\vdash_{S_\infty} \mathscr{A}$ 或 $\vdash_{S_\infty} \sim\mathscr{A}$，故 S_∞ 是完全的 □

令 $\mathscr{L}$ 是一个固定但未具体指定（任意）的一阶语言

$\mathscr{L}^+$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个（常元）扩展

（见定义 3.18，即在 $\mathscr{L}$ 中引入一个常元系列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$）

注

- 由于新引入的常元，通过扩展可引入新的公式（公理、定理）
  例：$\sim\forall x_1 A_1^1(x_1)\rightarrow\sim A_1^1(b_1)$ 是 $\mathscr{L}^+$ 的公理（$A_1^1(x_1)$ 中不含函项符）
- $\sim\forall x_1 A_1^1(x_1)\rightarrow\sim A_1^1(b_1)$ 等价于
  $\exists x_1 \sim A_1^1(x_1)\rightarrow\sim A_1^1(b_1)$，可写成更一般的形式
  $\exists x_i \sim\mathscr{A}(x_i)\rightarrow\sim\mathscr{A}(t)$，$x_i$ 是 $\mathscr{A}(x_i)$ 中唯一自由变元，t 是闭项（考虑 $\mathscr{L}$ 的闭项扩展）
  ——若存在对象不具有性质 $\mathscr{A}$，则必有一个对象（取闭项）使 $\mathscr{A}$ 不可证
  即找个 t 替代（约束）变元 x_i
  若 $\vdash_S \exists x_i \sim\mathscr{A}(x_i)\rightarrow\sim\mathscr{A}(t)$，这样的 S（可替代系统）具有特殊的意义

命题 4.54

若 S 是一个 $K_{\mathscr{L}}$ 的一致扩充，则新（一阶）系统 S^+ 作为 S 在 $\mathscr{L}^+$ 的扩充亦是一致的 $\diamondsuit$

证

设若 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是 S^+ 的定理，它们的证明作为一个有限的公式序列

仅含有限个 $b_0, b_1, \cdots, b_n$

其（在 S^+ 的）证明可通过用（$\mathscr{L}$ 中没用过的）变元（或常元）替换（$\mathscr{L}^+$ 中）相应的常元（如某些 b_i）为 S 中的证明，因这样的符号替换符合表达式的语法（演算中只考虑符号不需语义解释）

例如，$\sim\forall x_1 A_1^1(x_1)\to\sim A_1^1(b_1) \Rightarrow \sim\forall x_1 A_1^1(x_1)\to\sim A_1^1(x_2)$

$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是 S 的定理，这是不可能的 $\square$

命题 4.55

令 S 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的一个一致扩充，则存在一个 $\mathscr{L}$ 的解释，使得 S 中的每个定理在此解释下为真 $\diamondsuit$

证

令 $\mathscr{L}^+$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个（项）扩展，S^+ 和 K^+ 分别是 S 和 $K_{\mathscr{L}}$（在 S^+ 上）的扩充

S^+ 是一致的

定义一个一阶系统系列 $S_0, S_1, \cdots$ 如下

首先，枚举 $\mathscr{L}^+$ 中仅含一个自由变元的公式，如

$$\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \mathscr{F}_2(x_{i_2}), \cdots$$

其中 $x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots$ 不必是不同的

选择 $b_0, b_1, \cdots$ 中的一个（可能可枚举无穷）子序列 $c_0, c_1,$

证（续）

(1) c_0 不在 $\mathscr{F}_0(x_{i0})$ 出现

(2) 对 $n>0$，$c_n \notin \{c_0, \cdots, c_{n\text{-}1}\}$ 且不在 $\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \cdots, \mathscr{F}_n(x_{i_n})$ 中任一公式中出现

这是因为每个公式仅含 $b_0, b_1, \cdots$ 中的有限个出现（若有的话）

对每个 k，记 $\mathscr{G}_k$ 为以下公式

$$\sim(\forall x_{i_k})\mathscr{F}_k(x_{i_k}) \rightarrow \sim \mathscr{F}_k(c_k)$$

令 S_0 为 S^+

令 S_1 是通过在 S_0 中引入 $\mathscr{G}_0$ 作为一个新公理得到的扩充

对 $n>1$，令 S_n 是通过在 $S_{n\text{-}1}$ 中引入 $\mathscr{G}_{n\text{-}1}$ 作为一个新公理得到的扩充

注

$\mathscr{G}_k$: 若一个性质 $\mathscr{F}$ 至少对一个对象不成立，则存在一个对象的指称（即一个常元 c_k）使得该性质不成立。满足 $\vdash \mathscr{G}_k$ 的系统可称为可替代系统（亦称替罪羊系统，c_k 扮演替罪羊的角色）

注

证明的过程是欲证每个 S_n 是一致的，由此从 S_i 系列获得一个一致的 S_∞，应用 命题 4.53 获得 S_∞ 的一个一致完全扩充，从而能够构造所需的解释

— 用 $\mathscr{G}_k$ 构造保持一致的 S_n 系列，据 命题 4.53，只要保持一致，就能获得一个完全扩充，这是关键技术（可替代）

证 (续)

S_0 是一致的

令 $n>0$，假设 S_n 是一致的，但 S_{n+1} 是不一致的

存在 $\mathscr{L}^+$ 的一个公式 $\mathscr{A}$，使得

$$\vdash_{S_{n+1}} \mathscr{A} \text{ 且 } \vdash_{S_{n+1}} \sim\mathscr{A}$$

因 $\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})$ 是重言式，有 $\vdash_{S_{n+1}} \mathscr{A}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})$ (对任何 $\mathscr{B}$)，用两次 MP

$$\vdash_{S_{n+1}}\sim\mathscr{B}, \text{ 对任何 } \mathscr{B}$$

特别地

$$\vdash_{S_{n+1}}\sim\mathscr{G}_n$$

证（续）

就有一个 S_{n+1} 的证明是在 S_n 中从 $\mathscr{G}_n$ 出发的演绎

$$\mathscr{G}_n \vdash_{S_n} \sim\mathscr{G}_n$$

$\mathscr{G}_n$ 是闭式，据演绎定理

$$\vdash_{S_n} \mathscr{G}_n \to \sim\mathscr{G}_n$$

有（类似 命题 4.51）

$$\vdash_{S_n} \sim\mathscr{G}_n$$

即

$$\vdash_{S_n} \sim(\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n}) \to \sim\mathscr{F}_n(c_n))$$

证（续）

注意到

$$\vdash_{S_n}\sim(\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n})\to\sim\mathscr{F}_n(c_n))\to(\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n}))$$

和

$$\vdash_{S_n}\sim(\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n})\to\sim\mathscr{F}_n(c_n))\to\mathscr{F}_n(c_n)$$

是重言式特例，用 MP

$$\vdash_{S_n}\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n})$$

和

$$\vdash_{S_n}\mathscr{F}_n(c_n)$$

在 $\mathscr{F}_n(c_n)$ 的证明中，用 y 替换 c_n 的每次出现，因 c_n 不出现在从 S_n 推出 $\mathscr{F}_n(y)$ 的任一公理 $\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_1, \cdots, \mathscr{G}_{n\text{-}1}$ 中，y 是不在此证明中出现过的变元（这样的替换是符合语法的），这样，就获得一个在 S_n 中 $\mathscr{F}_n(y)$ 的证明

证（续）

故

$$\vdash_{S_n} \mathscr{F}_n(y)$$

由 Gen

$$\vdash_{S_n} \forall y \mathscr{F}_n(y)$$

由 命题 4.28（约束变元换名）

$$\vdash_{S_n} \forall x_{i_n} \mathscr{F}_n(x_{i_n})$$

这与 S_n 的一致性矛盾

换言之，对所有 $n \geq 0$，若 S_n 是一致的，则 S_{n+1} 也是一致的

据归纳法，S_n 对所有 n 都是一致的

证（续）

令 S_∞ 是一阶系统，它把至少在这些 S_n 之一中为公理的一切公式都当作公理

S_∞ 是一致的

因若不然，仅使用有限次它的公理就可导致矛盾，必然存在 n，使得出现的矛盾在 S_∞ 的证明中的公理都作为 S_n 的公理，导致 S_n 是矛盾的

据 命题 4.53，令 T 是 S_∞ 的一个一致完全的扩充

证（续）

构造所需的解释

定义 $\mathscr{L}^+$ 的一个解释 I 如下

(a) 论域 D_I 是 $\mathscr{L}^+$ 中所有闭项的（能枚举）集

(b) 个体常元是它们自身的解释

(c) 对 $d_1, \cdots, d_n \in D_I$

$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 可满足，若 $\vdash_T A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 不可满足，若 $\vdash_T \sim A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

（注意到，T 是完全的，$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 是闭的）

(d) 对 $d_1, \cdots, d_n \in D_I$，$f_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 赋值为 $\bar{f}_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

现需证明：T 中的每个定理在 I 下为真

（T 有一个以 T 的闭项构成论域 D_I 的模型 I）

注

D_I 是能枚举的，意味着所构造是能枚举的模型

引理 4.56

对 $\mathscr{L}^+$ 的任一闭式 $\mathscr{A}$，$\vdash_T \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{A}$ ◇

证

(结构归纳)

令 $\mathscr{A}$ 是原子，如 $A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$，$d_1, \cdots, d_n$ 是项

若 $\vdash_T \mathscr{A}$

$\vdash_T A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 在 I 中可满足

$I \models \mathscr{A}$

反之类似

假设结果对每个比 $\mathscr{A}$ 短的公式都成立

证（续）

(1) $\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{B}$

$\vdash_T \mathscr{A}$

$\vdash_T \sim\mathscr{B}$，即 $\mathscr{B}$ 不是 T 的定理

因 T 是一致的，由归纳假设，$\mathscr{B}$ 在 I 下不为真

因 $\mathscr{B}$ 是闭的，故 $\sim\mathscr{B}$ 在 I 下为真

$I \models \mathscr{A}$

反之亦然

证（续）

(2) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$

设若 $\mathscr{A}$ 在 I 下不为真

$\mathscr{B}$ 为真且 $\mathscr{C}$ 为假

$\vdash_T \mathscr{B}$ 且 $\nvdash_T \mathscr{C}$ （归纳假设）

因 T 是完全的

$\vdash_T \mathscr{B}$ 且 $\vdash_T \sim\mathscr{C}$

考虑 $\vdash_T \mathscr{B}\to(\sim\mathscr{C}\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$ 是一个重言式实例，用 MP 两次

$\vdash_T \sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$

$\vdash_T \sim\mathscr{A}$

因 T 是一致的，故 $\mathscr{A}$ 不是 T 的定理

反之亦然

证（续）

(3) $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{B}(x_i)$

若 x_i 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现，则 $\mathscr{B}$ 是闭的

$\vdash_T \mathscr{B}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{B}$ （归纳假设）

已知 $\vdash_T \mathscr{B}$ 当且仅当 $\vdash_T \forall x_i \mathscr{B}$

$I \models \mathscr{B}$ 当且仅当 $I \models \forall x_i \mathscr{B}$

$\vdash_T \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{A}$

证（续）

若 x_i 在 $\mathscr{B}$ 中自由出现

因 $\mathscr{A}$ 是闭的，则 x_i 是 $\mathscr{B}(x_i)$ 中唯一的自由变元

$\mathscr{B}(x_i)$ 是 $\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \cdots$ 中的一个公式

如 $\mathscr{B}(x_i)$ 是 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$

$\mathscr{A}$ 是 $\forall x_{i_m}\mathscr{F}_m(x_{i_m})$

设 $I \models \mathscr{A}$，据 命题 4.5（由 公理 (K4)）

$I \models \forall x_{i_m}\mathscr{F}_m(x_{i_m}) \to \mathscr{F}_m(c_m)$

$I \models \mathscr{F}_m(c_m)$

$\mathscr{F}_m(c_m)$ 中的连接词和量词比 $\mathscr{A}$ 少，由归纳假设

$\vdash_T \mathscr{F}_m(c_m)$

证 (续)

欲证 $\vdash_T \mathscr{A}$，设若反之，即 $\vdash_T \sim \mathscr{A}$，因 T 是完全的

$$\vdash_T \sim\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$$

因 $\mathscr{G}_m$ 是 T 的公理

$$\vdash_T \sim\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m}) \rightarrow \sim \mathscr{F}_m(c_m)$$

用 MP

$$\vdash_T \sim \mathscr{F}_m(c_m)$$

这与 T 的一致性矛盾

证（续）

反之，令 $\vdash_T \mathscr{A}$，设若 $\mathscr{A}$ 在 I 下不为真

$$I \not\models \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$$

$$\text{存在 } d \in D_I \text{ 使得 } I \models \sim \mathscr{F}_m(d)$$

这是因为，存在 I 中的一个赋值不满足 $\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$，即存在一个赋值 v 不满足 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$，由于 $v(x_{i_m}) \in D_I$，即 $v(x_{i_m})$ 是闭项，设如 d，这样的 d 必是在 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ 中对 x_{i_m} 自由的，此外，$v(d) = d$，这样，$v(x_{i_m}) = v(d)$，据 命题 3.44，v 不满足 $\mathscr{F}_m(d)$，即 $\mathscr{F}_m(d)$ 不在 I 下为真

但因 $\vdash_T \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$ ，由 公理 (K4) 并用 MP

$$\vdash_T \mathscr{F}_m(d)$$

由归纳假设，$I \models \mathscr{F}_m(d)$

$\mathscr{F}_m(d)$ 与 $\sim \mathscr{F}_m(d)$ 不可能同时在 I 下为真

证（续）

因 T 是 S 的扩充，每个 S 的定理也是 T 的定理

每个 $\mathscr{L}^+$ 中作为 S 的定理的公式在 I 下为真

每个 S 的定理是 $\mathscr{L}$ 的公式，I 包含（满足）一些不在 $\mathscr{L}$ 中的公式

限制 I 如下：

排除对个体常元 $b_0, b_1, \cdots$ 以及基于它们的项的解释，保留 D_I 不变

由此获得一个 $\mathscr{L}$ 的解释

且 S 的每个定理在该解释下为真 □

注

命题 4.55 推论：若一个一阶系统 S 是一致的，则它有（其论域可枚举的）模型

命题 4.57 (完全性定理)

若 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}$ 是有效的，则 $\mathscr{A}$ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 中的定理 $\diamondsuit$

证

令 $\mathscr{A}$ 是有效的公式，$\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的全称闭式，则 $\mathscr{A}'$ 也是有效的（推论 3.49）

设若 $\mathscr{A}$ 不是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理，据 命题 4.29，$\mathscr{A}'$ 不是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理

据 命题 4.51，包含 $\sim\mathscr{A}'$ 作为公理的扩充 $K'_{\mathscr{L}}$ 是一致的

据 命题 4.55，存在一个 $\mathscr{L}$ 的解释使得 $K'_{\mathscr{L}}$ 中每个定理在此解释下为真

特别地，$\sim\mathscr{A}'$ 在此解释下为真

$\mathscr{A}'$ 为假（$\mathscr{A}'$ 肯定为闭的）

这与 $\mathscr{A}'$ 的有效性矛盾，故 $\mathscr{A}$ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理 $\square$

推论 4.58 (可靠与完全性定理)

对 $\mathscr{L}$ 中的任一公式 $\mathscr{A}$，$\vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\models \mathscr{A}$ ◇

推论 4.59

令 Γ 和 $\mathscr{A}$ 分别是 $\mathscr{L}$ 的任意公式集和公式，$\Gamma \vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\Gamma \models \mathscr{A}$ ◇

证

考虑 $K+\Gamma$，$\vdash_{K+\Gamma} \mathscr{A}$ 当且仅当 $\models_{K+\Gamma} \mathscr{A}$；注意到 $\vdash_{K+\Gamma} \mathscr{A}$ 即 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$，$\models_{K+\Gamma} \mathscr{A}$ 即 $\Gamma \models_K \mathscr{A}$ □

注

Gödel 于 1930 年证明

Henkin 证法（1949），Hasenjaeger 简化证法（1953）

其它证明：Rasiow&Sikorski（1951/1952），Beth（1951，用 Boolean 代数和拓扑方法），Hintikka（1955），Beth（1959）

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

模型和一致性

定义 4.60 (模型)

(1) 令 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式集，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释

若 Γ 中每个公式都在 I 下都为真，则称 I 是 Γ 的一个模型

(2) 若 S 是一个一阶系统，则 S 的一个模型是指使得 S 中每个定理都为真的一个解释 $\diamondsuit$

命题 4.61

令 S 是一个一阶系统，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释，且 S 中每个公理在 I 下都为真，则 I 是 S 的一个模型 $\diamondsuit$

证

类似 命题 4.6（可靠性定理） $\square$

注

一阶系统 S 的模型完全可通过 定义 4.60 (1) 来定义，其中 Γ 为全体公理集

命题 4.62

一个一阶系统 S 是一致的，当且仅当它有模型 $\diamond$

证

据 命题 4.55，即若 S 是一致的，则它有模型

反之，设若 S 有一个模型 I，且 S 是不一致的

存在公式 $\mathscr{A}$，$\vdash_S \mathscr{A}$ 和 $\vdash_S \sim\mathscr{A}$

由于 S 的所有定理在模型 I 中都为真，则 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 在 I 下都为真，这是不可能的 $\square$

注

亦称 Gödel 第二完全性定理（或 弱完全性定理）

例 4.63

任何一个一致但不完全的一阶系统 S 都至少有两个不同的模型

考虑 S 是不完全的，可找到闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 S 的定理，则分别以 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 构造两个 S 的一致扩充

注

- 一个公式在 S 的某个特殊的模型下为真，不一定是 S 的定理
- 可满足性与有效性的区别

命题 4.64

令 S 是一个一致一阶系统，$\mathscr{A}$ 是一个闭式

若 $\mathscr{A}$ 在 S 的每一个模型下都为真，则 $\mathscr{A}$ 为 S 中的定理 $\diamondsuit$

证

设若 $\mathscr{A}$ 不是 S 的定理，据 命题 4.51，补充 $\sim\mathscr{A}$ 作为一个公理得到 S 的扩充 S^* 也是一致的

存在 S^* 的一个模型 M 使得 $\sim\mathscr{A}$ 在 M 下为真

$\mathscr{A}$ 在 M 下为假

由于 M 也是 S 的模型，这与假设矛盾 $\square$

命题 4.65 (Löwenheim-Skolem 定理)

若一个一阶系统 S 有模型，则 S 具有一个其论域为可枚举集的模型 $\diamond$

证

若 S 有模型，据 命题 4.62，S 是一致的

由 命题 4.55 的证明可知

S 有一个特殊的模型，此模型的论域是可枚举集

此论域由闭项构成，这闭项集是可枚举（无穷）的

(命题 4.55 的证明中先构造一个 S 的扩展解释，然后又通过消除扩展常元还原为 S 的解释) $\square$

注

亦即 S 有基数 $\aleph_0$ 模型

引理*：令 $\mathfrak{m}$，$\mathfrak{n}$ 是两个基数使得 $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$，若 S 有一个基数 $\mathfrak{m}$ 模型，则 S 有一个基数 $\mathfrak{n}$ 模型

命题 *：对任何基数 $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$，任何一致的一阶系统 S 有一个基数 $\mathfrak{m}$ 模型

命题 4.66 (紧致性 (Compactness) 定理)

若一个一阶系统 S 的公理集的任意有限子集都有模型，则 S 也有模型 $\diamondsuit$

证

设若 S 的公理集的任意有限子集都有模型，但 S 没有模型

据 命题 4.62，S 是不一致的

存在公式 $\mathscr{A}$，$\vdash_S \mathscr{A}$ 和 $\vdash_S \sim\mathscr{A}$

不妨设这两个证明中涉及的公理集为 Γ

Γ 为一个有限公理子集

设 Γ 的模型为 I

$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 在 I 下都为真，这是不可能的 $\square$

推论 4.67

令 Γ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的一个无限公式集，当 Γ 的任意有限子集都有模型时，Γ 有模型 $\diamondsuit$

定义 4.68 (模型生成系统)

给定一个模型 I (一个模型赋予每个闭式真值)，定义一个形式系统 $S(I)$ 如下：把所有在 I 中为真的公式作为公理，即 $S(I)$ 的公理都是 $S(I)$ 的定理

命题 4.69

设 $S(I)$ 是由模型 I 生成的形式系统，则 $S(I)$ 是一致且是完全的

证

反证易见 □

注

设 S 是一个一致的一阶系统，则 S 有一个模型 I，在 I 下，$\mathscr{A}$ 为真或 $\sim\mathscr{A}$ 为真；又设 S 是不完全的，即存在闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 S 的定理。由 S 的 I 可生成一个新的一阶系统 $S(I)$，$S(I)$ 是完全的

问题

给定朴素算术作为模型，可否生成一个完全的一阶（算术）系统？

定义 4.70

一个 K 的不可判定句子是一个闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 K 的定理，即 $\nvdash \mathscr{A}$ 且 $\nvdash \mathscr{A}$

定义 4.71

一个一阶系统 S 是公理化的，若存在一种能行的方法判定任一给定的公式是否为公理

注

K 是公理化的

命题 4.72 (半可判定性)

$K_{\mathscr{L}}$ 是不可判定的，即不存在一种能行的方法判定任一公式是否为定理

$K_{\mathscr{L}}$ 是半可判定的，即若一个公式是定理，则存在一种能行的方法判定之

证

（半可判定性）K 是公理化的，能枚举 K 的（所有）定理如下能行（能枚举）过程：据命题 3.25（一阶表达式是能枚举的），设一个（定理）表，初始为空，枚举过程加定理入表

(1) 加 K 的第 1 条公理（实例），以及从这条公理用 MP 和 Gen 所得直接后承入表，Gen 仅用一次，引入变元 x_1

(2) 加 K 的第 k 条公理，以及从这条公理用 MP 和 Gen 所得直接后承入表，Gen 仅用一次，引入变元 $x_1, \cdots, x_k$

依此类推，因 K 是完全的，对任何公式（闭式）$\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或 $\sim\mathscr{A}$ 为定理，等到定理出现最终（所有定理）都会被加入表 □

注

- 若 K 是不一致的，任一公式都是定理，枚举过程可判定之
- 若一个一阶系统 S 是公理化且完全的，则 S 具有半可判定性
- 上述枚举过程不能判定任一（$\mathscr{L}$ 的）公式是否是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理（不可判定性，参见第七章：逻辑 $\Rightarrow$ 可计算性）

广义一阶逻辑 *

令 $\mathscr{L}_G$ 是广义一阶语言（其非逻辑符不可枚举），在 $\mathscr{L}_G$ 上建立的 FOL，其一阶系统称广义一阶系统

- $\mathscr{L}_G$ 的解释（模型）与 $\mathscr{L}$ 类似，有关命题在 $\mathscr{L}_G$ 上成立（检查证明可发现对不可枚举情形不受影响）
- 普通一阶语言 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}_G$ 的特形
- 有关结果涉及可枚举无穷可据（朴素）集论重新表述，如 Löwenheim-Skolem 定理：若 $\mathscr{L}_G$ 字符集的基数为 $\aleph_\alpha$，则 $\mathscr{L}_G$ 表达式（项和公式）是良序的且其模型的基数为 $\aleph_\alpha$（相应地，证明需用超穷归纳）
- 前束范式和子句式同样

二阶逻辑 *

给定一个二阶语言 $\mathscr{L}^2$，一个二阶模型 M（标准）解释如下：论域是非空集 D，s 是任一赋值（与一阶解释同），$\mathscr{D}$ 是所有 s 的集

- 对谓词变元 $\boldsymbol{R}_i^n$，$\langle t\rangle_n$ 为项系列，$s \models_2 \boldsymbol{R}_i^n\left(\langle t\rangle_n\right)$ 当且仅当 $\langle s(t_1), \cdots, s(t_n)\rangle \in s\left(\boldsymbol{R}_i^n\right)$
- $s \models_2 (\forall \boldsymbol{g}_i^n) \mathscr{A}$ 当且仅当 $s' \mathscr{A}$，对任一与 s 只除 $\boldsymbol{g}^n$ 赋值之外不同的 $s' \in \mathscr{D}$
- $s\left(\forall \boldsymbol{R}_i^n\right) \mathscr{A}$ 当且仅当 $s' \mathscr{A}$，对任一与 s 只除 $\boldsymbol{R}^n$ 赋值之外不同的 $s' \in \mathscr{D}$

二阶公理系统 *

二阶公理系统 S 是在一阶公理系统基础上增加以下公理（模式）和规则

- 公理

(S1a) $(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\mathscr{A}(\boldsymbol{R}_i^n) \to \mathscr{A}(\boldsymbol{W}_i^n)$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{W}^n)$ 是由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{R}_i^n)$ 通过用 $\boldsymbol{W}_i^n$ 替换 $\boldsymbol{R}_i^n$ 的所有自由出现获得，$\boldsymbol{W}_i^n$ 在 $\mathscr{A}(\boldsymbol{R}^n)$ 中对 $\boldsymbol{R}^n$ 自由

(S1b) $(\forall \boldsymbol{g}_i^n)\mathscr{A}(\boldsymbol{g}_i^n) \to \mathscr{A}(\boldsymbol{h}_i^n)$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{h}^n)$ 是由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{g}_i^n)$ 通过用 $\boldsymbol{h}_i^n$ 替换 $\boldsymbol{g}_i^n$ 的所有自由出现获得，$\boldsymbol{h}_i^n$ 在 $\mathscr{A}(\boldsymbol{g}^n)$ 中对 $\boldsymbol{g}^n$ 自由

(S2a) $(\forall \boldsymbol{R}_i^n)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall \boldsymbol{R}^n)\mathscr{B})$，$\boldsymbol{R}_i^n$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

(S2b) $(\forall \boldsymbol{g}_i^n)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall \boldsymbol{g}^n)\mathscr{B})$，$\boldsymbol{g}_i^n$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

- 模式

(C) $(\exists \boldsymbol{R}_i^n)(\forall \langle x\rangle_n)(\boldsymbol{R}_i^n(\langle x\rangle_n) \leftrightarrow \mathscr{A})$，$\mathscr{A}$ 的所有自由变元出现在 $\langle x\rangle_n$ 中，$\boldsymbol{R}^n$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现 （理解（comprehension） 模式）

(FD) $\left(\forall \boldsymbol{R}_i^{n+1}\right)[(\forall\langle x\rangle_n)(\exists_1 y)\boldsymbol{R}_i^{n+1}(\langle x\rangle_n, y) \to (\exists \boldsymbol{g}^n)(\forall\langle x\rangle_n)\boldsymbol{R}_i^{n+1}(\langle x\rangle_n, \boldsymbol{g}^n(\langle x\rangle_n))]$
（函项定义（function definition） 模式）

二阶公理系统 *

- 规则

(Gen2a) 若 $\mathscr{A}$，则 $(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\,\mathscr{A}$

(Gen2b) 若 $\mathscr{A}$，则 $(\forall \boldsymbol{g}_i^n)\,\mathscr{A}$

$\vdash_2$ 类似 $\vdash$ 定义

可靠性定理

对任一二阶公式 $\mathscr{A}$，若 $\vdash_2 \mathscr{A}$，则 $\models_2 \mathscr{A}$

不完全性定理

存在一个二阶公式 $\mathscr{A}$，若 $\models_2 \mathscr{A}$，但 $\nvdash_2 \mathscr{A}$

(没有公理系统使得其定理就是有效公式)

注

紧致性定理和 Löwenheim-Skolem 定理在二阶逻辑中也不成立

基于 Gödel 不完全性定理理解，参见第五、六章

一般二阶逻辑 *

- 对二阶逻辑 S 做一些限制可获得具有完全性定理的一般二阶逻辑，如 Henkin 二阶逻辑限制如下：二阶解释中 $\mathscr{D}$ 对二阶函项和谓词符的赋值 s 都用固定集，公理系统基本上保持不变
- Henkin 二阶逻辑比 S 弱
- 有些具有完全性定理的二阶逻辑可等价于一阶逻辑

注

二阶（高阶）逻辑不仅在数学中有很多应用，许多定理自动证明系统使用高阶逻辑