

数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

10 一阶逻辑 VI

10.1

证明： $K_{\mathcal{L}}$ 的扩充 S 是不一致的当且仅当 \mathcal{L} 的每个公式都是 S 的定理。

10.2

令 S 是一个一致一阶系统，使得对每个 S 的闭式 \mathcal{A} ，若包含 \mathcal{A} 作为补充公理获得的（一阶）系统是一致的，则 \mathcal{A} 是一个 S 的定理。证明 S 是完全的。

10.3

令 \mathcal{L} 是一个具有无穷多个谓词符的一阶语言，证明 $K_{\mathcal{L}}$ 具有无穷多个不同的一致扩充。

10.4

令 Γ 是一个 \mathcal{L} 的公式集， M 是一个 Γ 的模型，证明若 $\Gamma \vdash_{K_{\mathcal{L}}} \mathcal{A}$ ，则 \mathcal{A} 在 M 中为真；反之亦然？

10.5

令 S 是一个 $K_{\mathcal{L}}$ 的一致扩充， M 是一个 S 的模型，定义一个 S 的扩充 \hat{S} 如下：包含所有 \mathcal{L} 的在 M 中为真的闭原子和在 M 中不为真的闭原子的否定式作为补充公理，证明 \hat{S} 是一致的。问 \hat{S} 是完全的吗？

10.6

以下选做一题，若选第三题可选做一小题。

- (1) 令 K_1 和 K_2 是同一个一阶语言 \mathcal{L} 的两个一阶理论, 假设对 \mathcal{L} 的任一解释 M , M 是 K_1 的模型当且仅当 M 不是 K_2 的模型。证明 K_1 和 K_2 是有限公理化, 即存在有限公式集 Γ 和 Δ , 使得对任一公式 \mathcal{A} , $\vdash_{K_1} \mathcal{A}$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_K \mathcal{A}$, $\vdash_{K_2} \mathcal{A}$ 当且仅当 $\Delta \vdash \mathcal{A}$ 。[提示: 反证]
- (2) 一个公式集 Γ 称为一阶理论 K' 的独立公理化, 若 (a) 所有 Γ 中的公式是 K' 的定理; (b) 对任一 K' 的定理 \mathcal{A} , $\Gamma \vdash_K \mathcal{A}$; (c) 对 Γ 的任一公式 \mathcal{B} , $\Gamma - \{\mathcal{B}\} \not\vdash_K \mathcal{B}$ 。证明每个一阶理论 K' 都有一个独立公理化。[提示: 考虑演绎系列]
- (3) 一个 (一阶) 理论 K^* 称为替罪羊理论 (scapegoat theory), 若对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathcal{A}(x)$, 存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K^*} (\exists x)\neg\mathcal{A}(x) \rightarrow \neg\mathcal{A}(t)$ 。 K^* 称有见证性 (witness property), 若对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathcal{A}(x)$ 有 $\vdash_{K^*} (\exists x)\neg\mathcal{A}(x)$, 则存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K^*} \neg\mathcal{A}(t)$ (这样的理论通常是可构造的)。证明以下命题:
- (a) 一个理论是替罪羊理论, 当且仅当它有见证性;
 - (b) 一个理论是替罪羊理论, 当且仅当它对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathcal{A}(x)$, 存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K^*} (\exists x)\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{A}(t)$;
 - (c) 没有谓词演算是替罪羊理论 (如 K 不是替罪羊理论)。