数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

10 一阶逻辑 VI

10.1

证明：$K_{\mathscr{L}}$ 的扩充 S 是不一致的当且仅当 $\mathscr{L}$ 的每个公式都是 S 的定理。

10.2

令 S 是一个一致一阶系统，使得对每个 S 的闭式 $\mathscr{A}$，若包含 $\mathscr{A}$ 作为补充公理获得的（一阶）系统是一致的，则 $\mathscr{A}$ 是一个 S 的定理。证明 S 是完全的。

10.3

令 $\mathscr{L}$ 是一个具有无穷多个谓词符的一阶语言，证明 $K_{\mathscr{L}}$ 具有无穷多个不同的一致扩充。

10.4

令 Γ 是一个 $\mathscr{L}$ 的公式集，M 是一个 Γ 的模型，证明若 $\Gamma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$，则 $\mathscr{A}$ 在 M 中为真；反之亦然？

10.5

令 S 是一个 $K_{\mathscr{L}}$ 的一致扩充，M 是一个 S 的模型，定义一个 S 的扩充 $\hat{S}$ 如下：包含所有 $\mathscr{L}$ 的在 M 中为真的闭原子和在 M 中不为真的闭原子的否定式作为补充公理，证明 $\hat{S}$ 是一致的。问 $\hat{S}$ 必是完全的吗？

10.6

以下选做一题，若选第三题可选做一小题。

(1) 令 K_1 和 K_2 是同一个一阶语言 $\mathscr{L}$ 的两个一阶理论，假设对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 M，M 是 K_1 的模型当且仅当 M 不是 K_2 的模型。证明 K_1 和 K_2 是有限公理化，即存在有限公式集 Γ 和 Δ，使得对任一公式 $\mathscr{A}$，$\vdash_{K_1} \mathscr{A}$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$，$\vdash_{K_2} \mathscr{A}$ 当且仅当 $\Delta \vdash \mathscr{B}$。[提示：反证]

(2) 一个公式集 Γ 称为一阶理论 K' 的独立公理化，若（a）所有 Γ 中的公式是 K' 的定理；（b）对任一 K' 的定理 $\mathscr{A}$，$\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$；（c）对 Γ 的任一公式 $\mathscr{B}$，$\Gamma - \{\mathscr{B}\} \nvdash_K \mathscr{B}$。证明每个一阶理论 K' 都有一个独立公理化。[提示：考虑演绎系列]

(3) 一个（一阶）理论 K^* 称为替罪羊理论（scapegoat theory），若对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathscr{A}(x)$，存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K^*} (\exists x)\neg\mathscr{A}(x) \to \neg\mathscr{A}(t)$。$K^*$ 称有见证性（witness property），若对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathscr{A}(x)$ 有 $\vdash_{K^*} (\exists x)\neg\mathscr{A}(x)$，则存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K^*} \neg\mathscr{A}(t)$（这样的理论通常是可构造的）。证明以下命题：

   (a) 一个理论是替罪羊理论，当且仅当它有见证性；

   (b) 一个理论是替罪羊理论，当且仅它当对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathscr{A}(x)$，存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K^*} (\exists x)\mathscr{A}(x) \to \mathscr{A}(t)$；

   (c) 没有谓词演算是替罪羊理论（如 K 不是替罪羊理论）。