

数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

9 一阶逻辑 V

9.1

证明

$$(a) \forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K \forall x_2 \forall x_3 A_1^2(x_2, x_3)$$

$$(b) \forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K \forall x_1 A_1^2(x_1, x_1)$$

9.2

令 $\mathcal{A}(x_i)$ 是一个 \mathcal{L} 的公式，其中 x_i 自由出现，设 x_j 不在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中出现（自由或约束出现），证明

$$\vdash_K \exists x_i \mathcal{A}(x_i) \leftrightarrow \exists x_j \mathcal{A}(x_j)$$

9.3

对下列公式，给出子句范式：

$$(b) \forall x_1 (A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2))$$

$$(c) \forall x_1 (A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow (\exists x_2 A_1^1(x_2) \rightarrow \exists x_3 A_1^2(x_2, x_3))$$

9.4

令 $\mathcal{A}(x_1)$ 是一个其中 x_2 不出现的公式， $\mathcal{B}(x_2)$ 是一个其中 x_1 不出现的公式，设 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 不含量词。

证明公式

$$\exists x_1 \mathcal{A}(x_1) \rightarrow \exists x_2 \mathcal{B}(x_2)$$

是可证等价于有 Π_2 和 Σ_2 式的前束范式。

9.5

定理：一个等腰三角形有两个等角。要求用一阶逻辑给出该定理的形式化前提、结论和证明。

[提示：设常元 a, b, c 表示三角形的三个顶点，令谓词符 $T(x, y, z)$ 表示点 x, y, z 组成一个三角形， $C(u, v, w, x, y, z)$ 表示三角形 uvw 与三角形 xyz 全等， $S(u, v, x, y)$ 表示线段 uv 与线段 xy 相等， $A(u, v, w, x, y, z)$ 表示角 uvw 与 xyz 为等角。]