数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

9 一阶逻辑 V

9.1

证明

(a) $\forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K \forall x_2 \forall x_3 A_1^2(x_2, x_3)$

(b) $\forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K \forall x_1 A_1^2(x_1, x_1)$

9.2

令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是一个 $\mathscr{L}$ 的公式，其中 x_i 自由出现，设 x_j 不在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中出现（自由或约束出现），证明

$$\vdash_K \exists x_i \mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow \exists x_j \mathscr{A}(x_j)$$

9.3

对下列公式，给出子句范式:

(b) $\forall x_1 (A_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2))$

(c) $\forall x_1 (A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 A_1^1(x_2) \to \exists x_3 A_1^2(x_2, x_3))$

9.4

令 $\mathscr{A}(x_1)$ 是一个其中 x_2 不出现的公式，$\mathscr{B}(x_2)$ 是一个其中 x_1 不出现的公式，设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 不含量词。证明公式

$$\exists x_1 \mathscr{A}(x_1) \to \exists x_2 \mathscr{B}(x_2)$$

是可证等价于有 Π_2 和 Σ_2 式的前束范式。

9.5

定理：一个等腰三角形有两个等角。要求用一阶逻辑给出该定理的形式化前提、结论和证明。

[提示：设常元 a,b,c 表示三角形的三个顶点，令谓词符 $T(x,y,z)$ 表示点 x,y,z 组成一个三角形，$C(u,v,w,x,y,z)$ 表示三角形 uvw 与三角形 xyz 全等，$S(u,v,x,y)$ 表示线段 uv 与线段 xy 相等，$A(u,v,w,x,y,z)$ 表示角 uvw 与 xyz 为等角。]