数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

4 一阶逻辑：证明论

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

形式系统

K

考虑一个固定但未具体指定的一阶语言 $\mathscr{L}$，以便有关结果具有一般性

（一阶）谓词演算指形式系统 $K_{\mathscr{L}}$，当不具体指定 $\mathscr{L}$ 时，$K_{\mathscr{L}}$ 简记 K

定义 4.1

令 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，由下列公理和（演绎）规则定义形式系统 $K_{\mathscr{L}}$

定义（续）：公理集

对 $\mathscr{L}$ 中的任何公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，下列是 $K_{\mathscr{L}}$ 的公理模式

(K1) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

(K2) $((\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})))$

(K3) $(((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \mathscr{B})) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

(K4) $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t))$

$\mathscr{A}(x_i)$ 为含 x_i 的公式，t 为项，且 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由

(K5) $(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$

$\mathscr{A}$ 中不含变元 x_i 的自由出现

定义（续）：规则

(R1) 分离规则（MP）

若 $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 则 $\mathscr{B}$

其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为任意（一阶）公式

(R2) 概括规则（Gen (generalization)）

若 $\mathscr{A}$ 则 $(\forall x_i)\mathscr{A}$

其中 $\mathscr{A}$ 为任意（一阶）公式，x_i 为任意变元

$\diamondsuit$

注

(a) $K_{\mathscr{L}}$ 的公理模式和规则包含了 L 的公理模式和规则

- $\Rightarrow$ L 是 K 的子系统
- 增加的公理模式和规则是针对含量词的（一阶）公式

(b) (K4) 的条件 “t 在 $\mathscr{A}$ 中对 x_i 自由” 是必要的

例：设 $\mathscr{A}(x_1)$ 为 $\sim(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$，$t$ 为 x_2，这里 t 在 $\mathscr{A}(x_1)$ 对 x_1 不自由，(K4) 的实例如下

$$(*)\quad (\forall x_1)(\sim(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2))\rightarrow\sim(\forall x_2)A_1^2(x_2,x_2)$$

考虑一个解释，其论域为只有两个成员，A_1^2 解释为相同（相等），则 $(*)$ 的前件为真但后件为假，即 $(*)$ 为假

注

(c) (K4) 采用它的最一般形式

有时写成 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i/t)$

特殊地，当 t 为 x_i 时，x_i 在 $A(x_i)$ 中对 x_i 是自由的（注 3.13）

(K4) 形为 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i)$，$x_i$ 是 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由变元

若 x_i 不是 $\mathscr{A}$ 中自由变元，(K4) 可写成

$\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}$，约定 $\mathscr{A}(t)$ 就是 $\mathscr{A}$

亦可把它单独作为一条公理，以资区别

(K4′) $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

注

(d) (K5) 的条件 "x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现" 是必要的

例：设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都是 $A_1^1(x_1)$，这样 x_1 在 $\mathscr{A}$ 中是自由的，(K5) 的实例如下

$(**)\quad (\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)) \to (A_1^1(x_1) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1))$

$(**)$ 前件是有效的，考虑一个解释，其论域为整数集，A_1^1 解释为 "x 偶数"，则 $(**)$ 的后件为假，即 $(**)$ 为假

(e) (K5) 采用它的最简形式（也更好用，见例 4.17）

可替换成 $(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\forall x_i)\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$，这时不需指明条件（$\mathscr{A}$ 中不包含变元 x_i 的自由出现）

(f) (K4)(K5) 之间不能相互取代（独立性证明类似 (L1-L3) 做法）

定义 4.2 (证明)

$K_{\mathscr{L}}$ 中一个证明是指 $\mathscr{L}$ 中一个公式序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$，使得对每个 i $(1 \le i \le n)$，$\mathscr{A}_i$ 或是 $K_{\mathscr{L}}$ 中的一个公理，或由此序列中位于 $\mathscr{A}_i$ 前面的公式应用 MP 或 Gen 而得

令 Γ 是 $\mathscr{L}$ 中公式集。$K_{\mathscr{L}}$ 中公式序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 是从 Γ 的一个演绎，若对每个 i $(1 \le i \le n)$，下列之一成立：

(1) $\mathscr{A}_i$ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的公理；

(2) $\mathscr{A}_i$ 属于 Γ $(\mathscr{A}_i \in \Gamma)$；

(3) $\mathscr{A}_i$ 可由此序列中位于 $\mathscr{A}_i$ 前面的公式应用 MP 或 Gen 规则而得

$\diamondsuit$

定义 4.3 (定理与后承)

若公式 $\mathscr{A}$ 是构成证明的某个序列的最后一项，$\mathscr{A}$ 称为 $K_{\mathscr{L}}$ 中的一个定理，记为 $\vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$，简记 $\vdash_K \mathscr{A}$ 或 $\vdash \mathscr{A}$

若公式 $\mathscr{A}$ 是构成从 Γ 的演绎的某个序列的最后一项，$\mathscr{A}$ 称为 Γ 的一个后承，记为 $\Gamma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$，简记 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$ 或 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ $\diamond$

命题 4.4

若 $\mathscr{L}$ 中公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}$ 是 K 中的定理 $\Diamond$

证

$\mathscr{A}$ 是重言式，则存在 L 中一个重言式 $\mathscr{A}_0$ 使得 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}_0$ 在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例

由 L 的完全性，$\vdash_L \mathscr{A}_0$

即存在一个 L 中的证明序列，使得最后一项为 $\mathscr{A}_0$

由于 K 的公理模式包含 L 的公理模式，则通过对此序列进行替换操作，可得到 K 中的一个证明序列，使得最后一项为 $\mathscr{A}$，

故 $\vdash_K \mathscr{A}$ $\square$

注

反之不然。注意到，重言式与有效式的区别（如例 3.60，$\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \exists x_i \mathscr{A}(x_i)$ 不是重言式但是有效的），考虑有效式即完全性定理

命题 4.5

K 中的公理模式 (K4)(K5) 的所有实例都是（逻辑）有效的 $\diamond$

证

设 I 是任一解释，v 为 I 的任一赋值

(K4)

令 t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的

若 $v \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i)$（需证 $v \models \mathscr{A}(t)$）

任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{A}(x_i)$

特别地，对满足 $v'(x_i) = v(t)$ 的 i- 等值于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{A}(x_i)$

$v \models \mathscr{A}(t)$ （命题 3.44）

$v \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t)$

$I \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t)$

若 x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现（不需考虑变元赋值）

特殊地，v 对 i 自身等值，有 $v \models \mathscr{A}$

$v \models \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

$I \models \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

考虑到 I 和 v 的任意性，就有 (K4) 是有效的

证（续）

(K5)

令 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是公式，x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

若 $v \models \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

$w \not\models \mathscr{A}$，或 $w \models \mathscr{B}$

因 $\mathscr{A}$ 中不含 x_i 的自由出现，据 命题 3.55

（因 $v(x_i) = w(x_i)$ 作为特殊情况自然成立，有 $w \models \mathscr{A} \Leftrightarrow v \models \mathscr{A}$）

若有一 w 不满足 $\mathscr{A}$，则所有的 w 都不满足 $\mathscr{A}$， v 就是这样的 w

$v \not\models \mathscr{A}$，或任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{B}$

$v \not\models \mathscr{A}$，或 $v \models \forall x_i \mathscr{B}$

$v \models \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}$

$I \models \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}$

考虑到 I 和 v 的任意性，就有 (K5) 是有效的 $\square$

命题 4.6 (可靠性定理)

对任一 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}$，若 $\vdash_K \mathscr{A}$，则 $\models_K \mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 是有效的 $\diamondsuit$

证

(对证明步数归纳)

起步：若 $\mathscr{A}$ 的证明只有一步，则 $\mathscr{A}$ 是某条公理，已证公理都是有效的

归纳步：设关于 $\mathscr{A}$ 的证明有 n $(n > 1)$ 步，归纳假定

若 $\mathscr{C}$ 在 K 中的证明少于 n 步，则 $\mathscr{C}$ 是有效的

证（续）

$\mathscr{A}$ 是公理，则 $\mathscr{A}$ 是有效的

若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的两个公式 $\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 应用 MP 而得

由归纳假定，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ 都是有效的（定义 3.58 注）

$\mathscr{A}$ 是有效的

若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的公式应用 Gen 而得，即

$\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{C}$

由归纳假定，$\mathscr{C}$ 是有效的

$\mathscr{A}$ 是有效的（定义 3.58 注） □

推论 4.7

K 是一致的，即不存在 $\mathscr{L}$ 中公式 $\mathscr{A}$ 使得 $\vdash_K \mathscr{A}$ 且 $\vdash_K \sim\mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

若存在 $\mathscr{A}$ 使得 $\vdash_K \mathscr{A}$ 且 $\vdash_K \sim\mathscr{A}$，则 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是有效的，即在任何解释 I 下，$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都为真，这是不可能的 $\square$

注

K 的绝对一致性

例 4.8

演绎定理是否成立？

对任意公式 $\mathscr{A}$，有

$$\mathscr{A} \vdash_K \forall x_i \mathscr{A} \qquad \text{(Gen)}$$

但 $\nvdash_K \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$

只需验证 $\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$ 不是有效的（由可靠性定理反证）

考虑如例 3.53，令 $\mathscr{A}$ 是 $A_1^1(x_1)$（x_1 是自由的），构造 $\mathscr{L}$ 的一个以整数集为论域的解释 I 如下：

A_1^1 表示关系 “> 0”，则 $A_1^1(x_1)$ 可以解释为”$x_1 > 0$”

对一个满足 $v(x_1) > 0$ 的赋值 v，v 满足 $A_1^1(x_1)$

对一个与 v 是 1-等值的，但与 v 不同的赋值（$v(x_1) \leq 0$）将不满足 $A_1^1(x_1)$，因此 v 可不满足 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$

v 满足 $A_1^1(x_1)$ 而不满足 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$

v 不满足 $A_1^1(x_1) \to \forall x_1 A_1^1(x_1)$

即存在 v 不满足 $\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$

$\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$ 不是有效的

定义 4.9

令 Γ 是一个公式集 且 $\mathscr{A} \in \Gamma$，设存在一个从 Γ 可演绎的序列 $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$，其每步 $\mathscr{A}_i$ $(1 \geq i \leq n)$ 都有理由。$\mathscr{A}_i$ 依据于 $\mathscr{A}$ 当且仅当

- $\mathscr{A}_i$ 就是 $\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{A}_i$ 的理由属于 Γ，或
- $\mathscr{A}_i$ 的理由是 MP 或 Gen，即 $\mathscr{A}_i$ 是由前面的公式用 MP 或 Gen 所得，而前面的公式中至少有一个公式的依据为 $\mathscr{A}$ $\diamondsuit$

例 4.10

$\mathscr{A}, \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash \forall x_i \mathscr{B}$

(1)	$\mathscr{A}$	假设	依据于 $\mathscr{A}$
(2)	$\forall x_i \mathscr{A}$	(1)Gen	依据于 $\mathscr{A}$
(3)	$\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$	假设	依据于 $\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$
(4)	$\mathscr{B}$	(2)(3)MP	依据于 $\mathscr{A}$，$\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$
(5)	$\forall x_i \mathscr{B}$	(4)Gen	依据于 $\mathscr{A}$，$\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

命题 4.11

若 $\Gamma, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$，且在演绎中 $\mathscr{B}$ 不依据于 $\mathscr{A}$，则 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$

证

令 $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ 是 $\Gamma, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ 的一个演绎系列，其中 $\mathscr{B}$ 不依据于 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_n$ 为 $\mathscr{B}$

归纳假设对系列长度小于 n 欲证结论成立

(1) 若 $\mathscr{B}$ 是公理或 $\mathscr{B} \in \Gamma$，则 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$

(2) 若 $\mathscr{B}$ 是前面公式使用 MP 或 Gen 的后乘，则由于 $\mathscr{B}$ 不依据于 $\mathscr{A}$，所以这些前面公式也不依据于 $\mathscr{A}$，由归纳假设，即这些前面公式单独可从 Γ 演绎，故 $\mathscr{B}$ 亦可单独从 Γ 演绎，即 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$

□

命题 4.12 (演绎定理)

令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是（$\mathscr{L}$ 中的）公式，Γ 是（$\mathscr{L}$ 中的）公式集（可能为空）。若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$，且演绎对涉及 $\mathscr{A}$ 中自由出现的变元没有使用过 Gen，则 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ $\diamondsuit$

证

演绎序列只有一个公式，则此公式就是 $\mathscr{B}$

(1) $\mathscr{B}$ 是 K 中的公理，

(2) $\mathscr{B} \in \Gamma$，

(3) $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$

即类似 L 中演绎定理的证明

证（续）

从 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{F}$ 的演绎序列步数小于 n $(n > 1)$ 的所有公式 $\mathscr{F}$，对 $\mathscr{A}$ 中自由变元没用过 Gen，假设欲证结论 $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{F}$ 都成立

若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{B}$，令其演绎序列长度为 n，有如下三种情况

(1) $\mathscr{B}$ 是 K 中的公理，或 $\mathscr{B} \in \Gamma$，或 $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$，与前面类似

(2) $\mathscr{B}$ 由演绎中较前的两个公式用 MP 而得，与 L 中演绎定理类似

(3) $\mathscr{B}$ 由演绎中前面的公式用 Gen 而得，如 $\mathscr{B}$ 为 $(\forall x_i)\mathscr{C}$

据前提（对 $\mathscr{A}$ 中自由变元没用过 Gen），考虑以下两种情况之一（不依据于 $\mathscr{A}$ 或 x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现）

证（续）

- 不依据于 $\mathscr{A}$，据命题 4.11，有

$$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \mathscr{C}$$

存在一个步数为 k 的从 Γ 到 $\mathscr{C}$ 的演绎

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \ldots \\ & \ldots \\ (k) & \mathscr{C} \end{array}\right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } \mathscr{C} \text{ 的演绎}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1) & \forall x_i \mathscr{C} & \text{(k)Gen} \\ (k+2) & \forall x_i \mathscr{C} \to (\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{C}) & \text{(重言式)} \\ (k+3) & \mathscr{A} \to \color{red}{\forall x_i \mathscr{C}} & \text{(k+1)(k+2)MP} \end{array}$$

证（续）

- x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

（满足下面 (K5) 的条件）

$\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ （演绎步数较少，归纳假设）

存在一个步数为 k 的从 Γ 到 $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 的演绎

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \ldots \\ & \ldots \\ (k) & \mathscr{A}\to\mathscr{C} \end{array}\right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } \mathscr{A}\to\mathscr{C} \text{ 的演绎}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1) & \forall x_i(\mathscr{A}\to\mathscr{C}) & \text{(k)Gen} \\ (k+2) & \forall x_i(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\forall x_i\mathscr{C}) & \text{(K5)} \\ (k+3) & \mathscr{A}\to\forall x_i\mathscr{C} & \text{(k+1)(k+2)MP} \end{array}$$

故存在从 Γ 到 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 的一个演绎

$\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ □

推论 4.13

若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$，且 $\mathscr{A}$ 是一个闭式，则 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ $\diamondsuit$

推论 4.14

对 $\mathscr{L}$ 中任何公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，有

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C} \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{C}$$

$\diamondsuit$

即 HS 规则（证明类似 推论 2.11）

注

演绎定理可反复使用（对证明稍做扩展即证），如 $\Gamma, \mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C} \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$，

命题 4.15 (演绎定理的逆)

若 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$，这里 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式，Γ 是公式集（可能为空） $\diamondsuit$

证

类似 命题 2.9 $\square$

注

基于重言式（即基于 L 定理）和演绎定理开展 K 演算

例 4.16

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \to \forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$$

(1)	$\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A}$	假设
(2)	$\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \to \forall x_2 \mathscr{A}$	(K4)
(3)	$\forall x_2 \mathscr{A}$	(1)(2)MP
(4)	$\forall x_2 \mathscr{A} \to \mathscr{A}$	(K4)
(5)	$\mathscr{A}$	(3)(4)MP
(6)	$\forall x_1 \mathscr{A}$	(5)Gen
(7)	$\forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$	(6)Gen

即有

(8) $\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \vdash \forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$

注意到，没有对 $\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A}$ 中自由变元使用 Gen，据演绎定理得

(9) $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \to \forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$

注

容易推广到 n 个变元的情况，$\forall$ 变元顺序可交换

例 4.17

设 x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现，有

$$\vdash (\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B} & \text{假设} \\ (2) & \forall x_i \mathscr{B} \to \mathscr{B} & (\mathrm{K4}) \\ (3) & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & (1)(2)\mathrm{HS} \\ (4) & \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & (3)\mathrm{Gen} \end{array} \quad \text{即有}$$

$(5)\quad \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B} \vdash_K \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

注意到，使用 Gen 仅需不在 $\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}$ 中自由出现的 x_i，据演绎定理得

$(6) \vdash (\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

注

这是 (K5) 的反向，因此 (K5) 是较好的（公理）选择

例 4.18

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B})$$

(1)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	
(2)	$\forall x_i \mathscr{A}$	
(3)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(K4)
(4)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(1)(3)MP
(5)	$\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{A}$	(K4)
(6)	$\mathscr{A}$	(2)(5)MP
(7)	$\mathscr{B}$	(4)(6)MP
(8)	$\forall x_i \mathscr{B}$	(7)Gen

例（续）

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}),\ \forall x_i\mathscr{A} \vdash \forall x_i\mathscr{B}$$

因 x_i 是约束变元，由演绎定理得

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}$$

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B})$$

问题

用这个定理取代 ($K5$)，因演绎这个定理只要 ($K4$)，是否 ($K5$) 不是必要的（公理独立性）？

$\vdash (\forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 可证？

例 4.19

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\exists x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{B})$$

(1)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	
(2)	$\forall x_i \sim \mathscr{B}$	
(3)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(K4)
(4)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(1)(3)MP
(5)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A})$	
(6)	$\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}$	(4)(5)MP
(7)	$\forall x_i \sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{B}$	(K4)
(8)	$\sim \mathscr{B}$	(2)(7)MP
(9)	$\sim \mathscr{A}$	(6)(8)MP
(10)	$\forall x_i \sim \mathscr{A}$	(9)Gen

例（续）

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}),\ \forall x_i \sim \mathscr{B} \vdash \forall x_i \sim \mathscr{A}$$

因 x_i 不在 $\forall x_i \sim \mathscr{B}$ 中自由出现，由演绎定理得

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \forall x_i \sim \mathscr{B} \to \forall x_i \sim \mathscr{A}$$

已知（重言式）

$$\vdash (\forall x_i \sim \mathscr{B} \to \forall x_i \sim \mathscr{A}) \to (\sim \forall x_i \sim \mathscr{A} \to \sim \forall x_i \sim \mathscr{B})$$

用 MP 得

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \sim \forall x_i \sim \mathscr{A} \to \sim \forall x_i \sim \mathscr{B}$$

即

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \exists x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{B}$$

因 x_i 不在 $\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 中自由出现，由演绎定理得

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\exists x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{B})$$

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

导出规则

量词规则

(R3) 若 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，则 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \vdash \mathscr{A}(t)$ （特例规则）

特别地，$\forall x_i \mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$

(R4) 若 t 在 $\mathscr{A}(x_i, t)$ 中对 x_i 自由，$\mathscr{A}(t, t)$ 是用 t 替换 $\mathscr{A}(x_i, t)$ 中自由 x_i 的处处出现，则 $\mathscr{A}(t, t) \vdash \exists x_i \mathscr{A}(x_i, t)$ （存在规则）

特别地，$\mathscr{A}(t) \vdash \exists x_i \mathscr{A}(x_i)$，$t$ 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由

特别地，$\mathscr{A}(x_i) \vdash \exists x_i \mathscr{A}(x_i)$，$t$ 即 x_i

注

(R2)(R3) 分别是全称（量词）引入和消去

(R4) 是存在（量词）引入，存在（量词）消去（不严格地表述如 $\exists x_i \mathscr{A}(x_i) \vdash \mathscr{A}^s$，$\mathscr{A}^s$ 是斯科伦式）没有较简单的形式

证

(R3) 由 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i)$ 和 (K4) 的实例，据 MP 即得

(R4) 只需证 $\vdash \mathscr{A}(t,t) \to \exists x_i \mathscr{A}(x_i,t)$（演绎定理）

由 (K4) 有 $\vdash \forall x_i \sim \mathscr{A}(x_i,t) \to \sim \mathscr{A}(t,t)$

考虑重言式 $(\mathscr{A} \to \sim B) \to (\mathscr{B} \to \sim \mathscr{A})$

据 MP 有 $\vdash \mathscr{A}(t,t) \to \sim\forall x_i \sim\mathscr{A}(x_i,t)$

即得 □

注

导出规则是元定理，一些元定理可作为导出规则，通过使用导出规则的技术，可使证明过程更容易

例 4.20

$$\vdash \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$$

(1)	$\forall x_i \mathscr{A}$	
(2)	$\mathscr{A}$	(1)(R3)
(3)	$\exists x_i \mathscr{A}$	(2)(R4)
(4)	$\forall x_i \mathscr{A} \vdash \exists x_i \mathscr{A}$	(1-3)
(5)	$\vdash \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$	

联词规则

- 否定消去 $\sim^-$ (elimination)

  $\sim\sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$

  否定引入 $\sim^+$ (introduction)

  $\mathscr{A} \vdash \sim\sim\mathscr{A}$

- 合取消去 $\wedge^-$

  $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

  $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{B}$

  $\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vdash \sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}$

  合取引入 $\wedge^+$

  $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$

联词规则

- 析取消去 $\vee^-$

  $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$

  $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \sim\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

  $\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vdash \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$

  $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$

  析取引入 $\vee^+$

  $\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \ \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$

联词规则

- 条件消去 $\rightarrow^-$

  $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}, \sim\mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{A}$

  $\mathscr{A} \rightarrow \sim\mathscr{B}, \mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}, \sim\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{A} \rightarrow \sim\mathscr{B}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

  $\sim(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \vdash \mathscr{A}$

  $\sim(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \vdash \sim\mathscr{B}$

  条件引入 $\rightarrow^+$

  $\mathscr{A}, \sim\mathscr{B} \vdash \sim(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$

  条件换位

  $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{B} \rightarrow \sim\mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{B} \rightarrow \sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$

联词规则

- 双向条件消去 $\leftrightarrow^-$

  $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$; $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}, \sim\mathscr{A} \vdash \sim\mathscr{B}$

  $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$; $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}, \sim\mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{A}$

  $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$; $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}$

  双向条件引入 $\leftrightarrow^+$

  $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$

  双向否定

  $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{B} \leftrightarrow \sim\mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{B} \leftrightarrow \sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$

注

联词规则不难证明（留作练习）

例 4.21

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \leftrightarrow \forall x_i\mathscr{B})$$

(1)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$	
(2)	$\forall x_i\mathscr{A}$	
(3)	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$	(1)(R3)
(4)	$\mathscr{A}$	(3)(R3)
(5)	$\mathscr{B}$	(3)(4)($\leftrightarrow^-$)
(6)	$\forall x_i\mathscr{B}$	(5)(Gen)
(7)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}), \forall x_i\mathscr{A} \vdash \forall x_i\mathscr{B}$	(1-6)
(8)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}$	(1-7) 演绎
(9)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{B} \to \forall x_i\mathscr{A}$	类似 (8) 可证
(10)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{A} \leftrightarrow \forall x_i\mathscr{B}$	(8)(9)($\leftrightarrow^+$)
(11)	$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \leftrightarrow \forall x_i\mathscr{B})$	演绎

证明论 *

- 各种一阶逻辑的证明论都可等价地用一阶规则（量词规则和联词规则统称）刻画
- 特别地，Gentzen 型证明论相当于只含消去和引入规则的形式系统(除去其中一些不独立的规则)；表演算类似
- 但如归结原理，在一阶情形需要引入新的技术，自动定理证明是证明论重要的研究方向

等价的谓词演算 *

谓词演算 K' 同时使用存在量词 $\exists$，通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式

  (K′) $\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\exists x_i\mathscr{A} \to \exists x_i\mathscr{B})$

  $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是任意公式，x_i 是任意变元

命题 4.22

K' 与 K 具有相同的定理集

证

易见 □

注

公理系统等价是通过它们具有相同定理集来证明，而不是相互推出公理和规则

一个公式 $\mathscr{A}$ 的概化（generalization）是形如 $\forall x_1 \cdots x_k$，$k \geq 1$ 的公式，其中 $x_1 \cdots x_k$ 是任意（不一定是不同的）变元

等价的谓词演算 *

谓词演算 K^* 不需 Gen 规则（即 MP 是唯一规则），通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式
  (K*) $\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$
  $\mathscr{A}$ 是任意公式，x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由
- 所有公理（模式）的所有概化
  （亦可把所有公理中单个变元 x_i 换成变元组 $x = (x_1, \cdots, x_k)$，相当于概化）

命题 4.23

K^* 与 K 具有相同的定理集

证

由 (K*) 应用 MP 可得类似 (R2)，需考虑概化到多个变元 □

等价的谓词演算

谓词演算 $K^{\#}$ 不需 Gen 规则，通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式

  (K$^{\#1}$) $(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$

  $\mathscr{A}$ 是 K 的公理，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元（$n\geq 0$，当 $n=0$ 时即 $\mathscr{A}$）

  (K$^{\#2}$) $((\forall y_1)\cdots(\forall y_n)(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))\to((\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}\to(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{B})$

  $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是任意公式，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元

- MP 是唯一规则

命题 4.24

$K^{\#}$ 与 K 具有相同的定理集

证

设 $\vdash_K \mathscr{A}$，结构归纳证明对 $y_1\cdots y_n$（$n\geq 0$），$\vdash_{K^{\#}}(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$（留作练习） □