

数理逻辑

讲义，第 7 版，2025 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

4 一阶逻辑：证明论

4.1 形式系统

4.2 导出规则

4.3 等价和替换

4.4 前束范式

4.5 完全性定理

4.6 模型

- 形式系统
- 导出规则

形式系统

K

考虑一个固定但未具体指定的一阶语言 \mathcal{L} ，以便有关结果具有一般性（一阶）**谓词演算**指形式系统 $K_{\mathcal{L}}$ ，当不具体指定 \mathcal{L} 时， $K_{\mathcal{L}}$ 简记 K

定义 4.1

令 \mathcal{L} 是一阶语言，由下列公理和（演绎）规则定义形式系统 $K_{\mathcal{L}}$

定义 (续): 公理集

对 \mathcal{L} 中的任何公式 \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , 下列是 $K_{\mathcal{L}}$ 的公理模式

$$(K1) (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$$

$$(K2) ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$$

$$(K3) (((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$$

$$(K4) ((\forall x_i)\mathcal{A}(x_i) \rightarrow \mathcal{A}(t))$$

$\mathcal{A}(x_i)$ 为含 x_i 的公式, t 为项, 且 t 在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由

$$(K5) (\forall x_i)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_i)\mathcal{B})$$

\mathcal{A} 中不含变元 x_i 的自由出现

定义 (续): 规则

(R1) 分离规则 (MP)

若 \mathcal{A} , $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ 则 \mathcal{B}

其中 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 为任意 (一阶) 公式

(R2) 概括规则 (Gen (generalization))

若 \mathcal{A} 则 $(\forall x_i)\mathcal{A}$

其中 \mathcal{A} 为任意 (一阶) 公式, x_i 为任意变元



注

(a) $K_{\mathcal{L}}$ 的公理模式和规则包含了 L 的公理模式和规则

- $\Rightarrow L$ 是 K 的子系统
- 增加的公理模式和规则是针对含量词的（一阶）公式

(b) (K4) 的条件“ t 在 \mathcal{A} 中对 x_i 自由”是必要的

例：设 $\mathcal{A}(x_1)$ 为 $\sim(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ ， t 为 x_2 ，这里 t 在 $\mathcal{A}(x_1)$ 对 x_1 不自由，(K4) 的实例如下

$$(*) \quad (\forall x_1)(\sim(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow \sim(\forall x_2)A_1^2(x_2, x_2)$$

考虑一个解释，其论域为只有两个成员， A_1^2 解释为相同（相等），则 $(*)$ 的前件为真但后件为假，即 $(*)$ 为假

注

(c) (K4) 采用它的最一般形式

有时写成 $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \rightarrow \mathcal{A}(x_i/t)$

特殊地, 当 t 为 x_i 时, x_i 在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中对 x_i 是自由的 (注 3.13)

(K4) 形为 $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \rightarrow \mathcal{A}(x_i)$, x_i 是 $\mathcal{A}(x_i)$ 中自由变元

若 x_i 不是 \mathcal{A} 中自由变元, (K4) 可写成

$\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \rightarrow \mathcal{A}$, 约定 $\mathcal{A}(t)$ 就是 \mathcal{A}

亦可把它单独作为一条公理, 以资区别

(K4') $((\forall x_i) \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$, x_i 不在 \mathcal{A} 中自由出现

(d) (K5) 的条件“ x_i 不在 \mathcal{A} 中自由出现”是必要的

例：设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是 $A_1^1(x_1)$ ，这样 x_1 在 \mathcal{A} 中是自由的，(K5) 的实例如下

$$(**) (\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(x_1)) \rightarrow (A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1))$$

(**) 前件是有效的，考虑一个解释，其论域为整数集， A_1^1 解释为“ x 偶数”，则 (**) 的后件为假，即 (**) 为假

(e) (K5) 采用它的最简形式（也更好用，见例 4.17）

可替换成 $(\forall x_i)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\forall x_i)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_i)\mathcal{B})$ ，这时不需指明条件（ \mathcal{A} 中不包含变元 x_i 的自由出现）

(f) (K4)(K5) 之间不能相互取代（独立性证明类似 (L1-L3) 做法）

定义 4.2 (证明)

$K_{\mathcal{L}}$ 中一个**证明**是指 \mathcal{L} 中一个公式序列 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, 使得对每个 i ($1 \leq i \leq n$), \mathcal{A}_i 或是 $K_{\mathcal{L}}$ 中的一个公理, 或由此序列中位于 \mathcal{A}_i 前面的公式应用 MP 或 Gen 而得

令 Γ 是 \mathcal{L} 中公式集。 $K_{\mathcal{L}}$ 中公式序列 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ 是从 Γ 的一个**演绎**, 若对每个 i ($1 \leq i \leq n$), 下列之一成立:

- (1) \mathcal{A}_i 是 $K_{\mathcal{L}}$ 的公理;
- (2) \mathcal{A}_i 属于 Γ ($\mathcal{A}_i \in \Gamma$);
- (3) \mathcal{A}_i 可由此序列中位于 \mathcal{A}_i 前面的公式应用 MP 或 Gen 规则而得



定义 4.3 (定理与后承)

若公式 \mathcal{A} 是构成证明的某个序列的最后一项, \mathcal{A} 称为 $K_{\mathcal{L}}$ 中的一个**定理**, 记为 $\vdash_{K_{\mathcal{L}}} \mathcal{A}$, 简记 $\vdash_K \mathcal{A}$ 或 $\vdash \mathcal{A}$

若公式 \mathcal{A} 是构成从 Γ 的演绎的某个序列的最后一项, \mathcal{A} 称为 Γ 的一个**后承**, 记为 $\Gamma \vdash_{K_{\mathcal{L}}} \mathcal{A}$, 简记 $\Gamma \vdash_K \mathcal{A}$ 或 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ ◇

命题 4.4

若 \mathcal{L} 中公式 \mathcal{A} 是重言式, 则 \mathcal{A} 是 K 中的定理 ◇

证

\mathcal{A} 是重言式, 则存在 L 中一个重言式 \mathcal{A}_0 使得 \mathcal{A} 是 \mathcal{A}_0 在 \mathcal{L} 中的一个替换实例

由 L 的完全性, $\vdash_L \mathcal{A}_0$

即存在一个 L 中的证明序列, 使得最后一项为 \mathcal{A}_0

由于 K 的公理模式包含 L 的公理模式, 则通过对此序列进行替换操作, 可得到 K 中的一个证明序列, 使得最后一项为 \mathcal{A} ,
故 $\vdash_K \mathcal{A}$ □

注

反之不然。注意到, 重言式与有效式的区别 (如例 3.60, $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \rightarrow \exists x_i \mathcal{A}(x_i)$ 不是重言式但是有效的), 考虑有效式即完全性定理

命题 4.5

K 中的公理模式 (K4)(K5) 的所有实例都是 (逻辑) 有效的 \diamond

证

设 I 是任一解释, v 为 I 的任一赋值

(K4)

令 t 是对 $\mathcal{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的

若 $v \models \forall x_i \mathcal{A}(x_i)$ (需证 $v \models \mathcal{A}(t)$)

任一 i 等值于 v 的赋值 $w \models \mathcal{A}(x_i)$

特别地, 对满足 $v(x_i) = v(t)$ 的 i 等值于 v 的赋值 $v \models \mathcal{A}(x_i)$

$v \models \mathcal{A}(t)$ (命题 3.44)

$v \models \forall x_i \mathcal{A}(x_i) \rightarrow \mathcal{A}(t)$

$I \models \forall x_i \mathcal{A}(x_i) \rightarrow \mathcal{A}(t)$

若 x_i 不在 \mathcal{A} 中自由出现 (不需考虑变元赋值)

特殊地, v 对 i 自身等值, 有 $v \models \mathcal{A}$

$v \models \forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$I \models \forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

考虑到 I 和 v 的任意性, 就有 (K4) 是有效的

(K5)

令 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是公式, x_i 不在 \mathcal{A} 中自由出现

若 $v \models \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$

任一 i 等值于 v 的赋值 $w \models \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

$w \not\models \mathcal{A}$, 或 $w \models \mathcal{B}$

因 \mathcal{A} 中不含 x_i 的自由出现, 据命题 3.55

(因 $v(x_i) = w(x_i)$ 作为特殊情况自然成立, 有 $w \models \mathcal{A} \Leftrightarrow v \models \mathcal{A}$)

若有一 w 不满足 \mathcal{A} , 则所有的 w 都不满足 \mathcal{A} , v 就是这样的 w

$v \not\models \mathcal{A}$, 或任一 i 等值于 v 的赋值 $w \models \mathcal{B}$

$v \not\models \mathcal{A}$, 或 $v \models \forall x_i \mathcal{B}$

$v \models \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}$

$1 \models \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}$

考虑到 1 和 v 的任意性, 就有 (K5) 是有效的



命题 4.6 (可靠性定理)

对 \mathcal{L} 中的任一公式 \mathcal{A} , 若 $\vdash_K \mathcal{A}$, 则 $\models_K \mathcal{A}$



证

(对证明步数归纳)

起步: 若 \mathcal{A} 的证明只有一步, 则 \mathcal{A} 是某条公理, 已证公理都是有效的

归纳步: 设关于 \mathcal{A} 的证明有 n ($n > 1$) 步, 归纳假定

若 \mathcal{C} 在 K 中的证明少于 n 步, 则 \mathcal{C} 是有效的

证 (续)

\mathcal{A} 是公理, 则 \mathcal{A} 是有效的

若 \mathcal{A} 是由证明序列中 \mathcal{A} 前面的两个公式 \mathcal{B} 和 $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$ 应用 MP 而得

由归纳假定, \mathcal{B} 和 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ 都是有效的 (定义 3.58 注)

\mathcal{A} 是有效的

若 \mathcal{A} 是由证明序列中 \mathcal{A} 前面的公式应用 Gen 而得, 即

\mathcal{A} 是 $\forall x_i \mathcal{C}$

由归纳假定, \mathcal{C} 是有效的

\mathcal{A} 是有效的 (定义 3.58 注)



推论 4.7

K 是一致的, 即不存在 \mathcal{L} 中公式 \mathcal{A} 使得 $\vdash_K \mathcal{A}$ 且 $\vdash_K \sim \mathcal{A}$ ◇

证

若存在 \mathcal{A} 使得 $\vdash_K \mathcal{A}$ 且 $\vdash_K \sim \mathcal{A}$, 则 \mathcal{A} 和 $\sim \mathcal{A}$ 都是有效的, 即在任
何解释 I 下, \mathcal{A} 和 $\sim \mathcal{A}$ 都为真, 这是不可能的 □

注

K 的绝对一致性

例 4.8

演绎定理是否成立？

对任意公式 \mathcal{A} ，有

$$\mathcal{A} \vdash_K \forall x_i \mathcal{A} \quad (\text{Gen})$$

但 $\not\vdash_K \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{A}$

只需验证 $\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{A}$ 不是有效的（由可靠性定理反证）

考虑如例 3.53，令 \mathcal{A} 是 $A_1^1(x_1)$ (x_1 是自由的)，构造 \mathcal{L} 的一个以整数集为论域的解释 I 如下：

A_1^1 表示关系 “ > 0 ”，则 $A_1^1(x_1)$ 可以解释为 “ $x_1 > 0$ ”

对一个满足 $v(x_1) > 0$ 的赋值 v ， v 满足 $A_1^1(x_1)$

对一个与 v 是 1-等值的，但与 v 不同的赋值 ($v(x_1) \leq 0$) 将不满足 $A_1^1(x_1)$ ，因此 v 可不满足 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$

v 满足 $A_1^1(x_1)$ 而不满足 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$

v 不满足 $A_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_1 A_1^1(x_1)$

即存在 v 不满足 $\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{A}$

$\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{A}$ 不是有效的

定义 4.9

令 Γ 是一个公式集 且 $\mathcal{A} \in \Gamma$, 设存在一个从 Γ 可演绎的序列 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, 其每步 \mathcal{A}_i ($1 \leq i \leq n$) 都有理由。 \mathcal{A}_i 依据于 \mathcal{A} 当且仅当

- \mathcal{A}_i 就是 \mathcal{A} 且 \mathcal{A}_i 的理由属于 Γ , 或
- \mathcal{A}_i 的理由是 MP 或 Gen, 即 \mathcal{A}_i 是由前面的公式用 MP 或 Gen 所得, 而前面的公式中至少有一个公式的依据为 \mathcal{A} ◇

例 4.10

$\mathcal{A}, \forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \vdash \forall x_j \mathcal{B}$

- | | | | |
|-----|---|----------|--|
| (1) | \mathcal{A} | 假设 | 依据于 \mathcal{A} |
| (2) | $\forall x_j \mathcal{A}$ | (1)Gen | 依据于 \mathcal{A} |
| (3) | $\forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ | 假设 | 依据于 $\forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ |
| (4) | \mathcal{B} | (2)(3)MP | 依据于 $\mathcal{A}, \forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ |
| (5) | $\forall x_j \mathcal{B}$ | (4)Gen | 依据于 $\mathcal{A}, \forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ |

命题 4.11

若 $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, 且在演绎中 \mathcal{B} 不依据于 \mathcal{A} , 则 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$

证

令 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ 是 $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 的一个演绎系列, 其中 \mathcal{B} 不依据于 \mathcal{A} , \mathcal{A}_n 为 \mathcal{B}

归纳假设对系列长度小于 n 欲证结论成立

- (1) 若 \mathcal{B} 是公理或 $\mathcal{B} \in \Gamma$, 则 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$
- (2) 若 \mathcal{B} 是前面公式使用 MP 或 Gen 的后乘, 则由于 \mathcal{B} 不依据于 \mathcal{A} , 所以这些前面公式也不依据于 \mathcal{A} , 由归纳假设, 即这些前面公式单独可从 Γ 演绎, 故 \mathcal{B} 亦可单独从 Γ 演绎, 即 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$

□

命题 4.12 (演绎定理)

令 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 都是 (\mathcal{L} 中的) 公式, Γ 是 (\mathcal{L} 中的) 公式集 (可能为空)。
若 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_K \mathcal{B}$, 且演绎对涉及 \mathcal{A} 中自由出现的变元没有使用
过 Gen, 则 $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ◇

证

演绎序列只有一个公式, 则此公式就是 \mathcal{B}

- (1) \mathcal{B} 是 K 中的公理,
- (2) $\mathcal{B} \in \Gamma$,
- (3) \mathcal{B} 就是 \mathcal{A}

即类似 L 中演绎定理的证明

证 (续)

从 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$ 到 \mathcal{F} 的演绎序列步数小于 n ($n > 1$) 的所有公式 \mathcal{F} , 对 \mathcal{A} 中自由变元没用过 Gen, 假设欲证结论 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ 都成立 若 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, 令其演绎序列长度为 n , 有如下三种情况

- (1) \mathcal{B} 是 K 中的公理, 或 $\mathcal{B} \in \Gamma$, 或 \mathcal{B} 就是 \mathcal{A} , 与前面类似
- (2) \mathcal{B} 由演绎中较前的两个公式用 MP 而得, 与 L 中演绎定理类似
- (3) \mathcal{B} 由演绎中前面的公式用 Gen 而得, 如 \mathcal{B} 为 $(\forall x_i)\mathcal{C}$

据前提 (对 \mathcal{A} 中自由变元没用过 Gen), 考虑以下两种情况之一 (不依据于 \mathcal{A} 或 x_i 不在 \mathcal{A} 中自由出现)

证 (续)

- 不依据于 \mathcal{A} , 据命题 4.11, 有

$$\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \mathcal{C}$$

存在一个步数为 k 的从 Γ 到 \mathcal{C} 的演绎

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots \\ \dots \\ (k) \mathcal{C} \end{array} \right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } \mathcal{C} \text{ 的演绎}$$

$$(k+1) \quad \forall x_i \mathcal{C} \qquad (k)\text{Gen}$$

$$(k+2) \quad \forall x_i \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{C}) \quad (\text{重言式})$$

$$(k+3) \quad \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{C} \qquad (k+1)(k+2)\text{MP}$$

证 (续)

- x_i 不在 \mathcal{A} 中自由出现

(满足下面 (K5) 的条件)

$$\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C} \quad (\text{演绎步数较少, 归纳假设})$$

存在一个步数为 k 的从 Γ 到 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ 的演绎

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots \\ \dots \\ (k) \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C} \end{array} \right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C} \text{ 的演绎}$$

$$(k+1) \quad \forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \quad (k)\text{Gen}$$

$$(k+2) \quad \forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{C}) \quad (\text{K5})$$

$$(k+3) \quad \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{C} \quad (k+1)(k+2)\text{MP}$$

故存在从 Γ 到 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 的一个演绎

$$\Gamma \vdash_K (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$



推论 4.13

若 $\Gamma \cup \{A\} \vdash_K B$, 且 A 是一个闭式, 则 $\Gamma \vdash_K A \rightarrow B$ \diamond

推论 4.14

对 \mathcal{L} 中任何公式 A, B, C , 有

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_K A \rightarrow C$$

即 HS 规则 (证明类似推论 2.11)

注

演绎定理可反复使用 (对证明稍做扩展即证), 如 $\Gamma, A, B \vdash C \Rightarrow$

$$\Gamma \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

命题 4.15 (演绎定理的逆)

若 $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 则 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_K \mathcal{B}$, 这里 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 都是公式, Γ 是公式集 (可能为空) ◇

证

类似 命题 2.9 □

注

基于重言式 (即基于 L 定理) 和演绎定理开展 K 演算

例 4.16

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$$

- | | | |
|-----|---|----------|
| (1) | $\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A}$ | 假设 |
| (2) | $\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \rightarrow \forall x_2 \mathcal{A}$ | (K4) |
| (3) | $\forall x_2 \mathcal{A}$ | (1)(2)MP |
| (4) | $\forall x_2 \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ | (K4) |
| (5) | \mathcal{A} | (3)(4)MP |
| (6) | $\forall x_1 \mathcal{A}$ | (5)Gen |
| (7) | $\forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$ | (6)Gen |

即有

$$(8) \quad \forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \vdash \forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$$

注意到，没有对 $\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A}$ 中自由变元使用 Gen，据演绎定理得

$$(9) \quad \vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$$

注

容易推广到 n 个变元的情况， \forall 变元顺序可交换

例 4.17

设 x_i 不在 \mathcal{A} 中自由出现, 有

$$\vdash (\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}) \rightarrow \forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

- (1) $\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}$ 假设
- (2) $\forall x_i \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (K4)
- (3) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (1)(2)HS 即有
- (4) $\forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ (3)Gen
- (5) $\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B} \vdash_K \forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$

注意到, 使用 Gen 仅需不在 $\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_i) \mathcal{B}$ 中自由出现的 x_i , 据演绎定理得

$$(6) \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}) \rightarrow \forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

注

这是 (K5) 的反向, 因此 (K5) 是较好的 (公理) 选择

例 4.18

$$\vdash \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B})$$

- (1) $\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$
- (2) $\forall x_i \mathcal{A}$
- (3) $\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ (K4)
- (4) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (1)(3)MP
- (5) $\forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (K4)
- (6) \mathcal{A} (2)(5)MP
- (7) \mathcal{B} (4)(6)MP
- (8) $\forall x_i \mathcal{B}$ (7)Gen

例 (续)

$$\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), \forall x_i \mathcal{A} \vdash \forall x_i \mathcal{B}$$

因 x_i 是约束变元, 由演绎定理得

$$\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}$$

$$\vdash \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B})$$

问题

- 用这个定理取代 (K5), 因演绎这个定理只要 (K4), 是否 (K5) 不是必要的 (公理独立性)?
- $\vdash (\forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}) \rightarrow \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ 可证?

例 4.19

$$\vdash \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\exists x_i \mathcal{A} \rightarrow \exists x_i \mathcal{B})$$

- (1) $\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$
- (2) $\forall x_i \sim \mathcal{B}$
- (3) $\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ (K4)
- (4) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (1)(3)MP
- (5) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A})$
- (6) $\sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A}$ (4)(5)MP
- (7) $\forall x_i \sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{B}$ (K4)
- (8) $\sim \mathcal{B}$ (2)(7)MP
- (9) $\sim \mathcal{A}$ (6)(8)MP
- (10) $\forall x_i \sim \mathcal{A}$ (9)Gen

例 (续)

$$\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), \forall x_i \sim \mathcal{B} \vdash \forall x_i \sim \mathcal{A}$$

因 x_i 不在 $\forall x_i \sim \mathcal{B}$ 中自由出现, 由演绎定理得

$$\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x_i \sim \mathcal{B} \rightarrow \forall x_i \sim \mathcal{A}$$

已知 (重言式)

$$\vdash (\forall x_i \sim \mathcal{B} \rightarrow \forall x_i \sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \forall x_i \sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \forall x_i \sim \mathcal{B})$$

用 MP 得

$$\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \vdash \sim \forall x_i \sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \forall x_i \sim \mathcal{B}$$

即

$$\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \vdash \exists x_i \mathcal{A} \rightarrow \exists x_i \mathcal{B}$$

因 x_i 不在 $\forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ 中自由出现, 由演绎定理得

$$\vdash \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\exists x_i \mathcal{A} \rightarrow \exists x_i \mathcal{B})$$

- 形式系统
- 导出规则

导出规则

量词规则

- (R3) 若 t 在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由, 则 $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \vdash \mathcal{A}(t)$ (特例规则)
特别地, $\forall x_i \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$
- (R4) 若 t 在 $\mathcal{A}(x_i, t)$ 中对 x_i 自由, $\mathcal{A}(t, t)$ 是用 t 替换 $\mathcal{A}(x_i, t)$ 中自由变元 x_i 的处处出现, 则 $\mathcal{A}(t, t) \vdash \exists x_i \mathcal{A}(x_i, t)$ (存在规则)
特别地, $\mathcal{A}(t) \vdash \exists x_i \mathcal{A}(x_i)$, t 在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由
特别地, $\mathcal{A}(x_i) \vdash \exists x_i \mathcal{A}(x_i)$, t 即 x_i

注

(R2)(R3) 分别是全称 (量词) 引入和消去

(R4) 是存在 (量词) 引入和消去 (不严格地表述如 $\exists x_i \mathcal{A}(x_i) \vdash \mathcal{A}^s$, \mathcal{A}^s 是斯科伦式) 没有较简单的形式

证

(R3) 由 $\forall x_i \mathcal{A}(x_i)$ 和 (K4) 的实例, 据 MP 即得

(R4) 只需证 $\vdash \mathcal{A}(t, t) \rightarrow \exists x_i \mathcal{A}(x_i, t)$ (演绎定理)

由 (K4) 有 $\vdash \forall x_i \sim \mathcal{A}(x_i, t) \rightarrow \sim \mathcal{A}(t, t)$

考虑重言式 $(\mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A})$

据 MP 有 $\vdash \mathcal{A}(t, t) \rightarrow \sim \forall x_i \sim \mathcal{A}(x_i, t)$

即得



注

导出规则是元定理, 一些元定理可作为导出规则, 通过使用导出规则的技术, 可使证明过程更容易

例 4.20

$$\vdash \forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \exists x_j \mathcal{A}$$

$$(1) \quad \forall x_j \mathcal{A}$$

$$(2) \quad \mathcal{A} \quad (1)(R3)$$

$$(3) \quad \exists x_j \mathcal{A} \quad (2)(R4)$$

$$(4) \quad \forall x_j \mathcal{A} \vdash \exists x_j \mathcal{A} \quad (1-3)$$

$$(5) \quad \vdash \forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \exists x_j \mathcal{A}$$

联词规则

- 否定消去 \sim^- (elimination)

$$\sim A \vdash A$$

- 否定引入 \sim^+ (introduction)

$$A \vdash \sim A$$

- 合取消去 \wedge^-

$$A \wedge B \vdash A$$

$$A \wedge B \vdash B$$

$$\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \vee \sim B$$

- 合取引入 \wedge^+

$$A, B \vdash A \wedge B$$

联词规则

- 析取消去 \vee^-

$$A \vee B, \sim A \vdash B$$

$$A \vee B, \sim B \vdash A$$

$$\sim(A \vee B) \vdash \sim A \wedge \sim B$$

$$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash C$$

析取引入 \vee^+

$$A \vdash A \vee B, B \vdash A \vee B$$

- 条件消去 \rightarrow^-

$$A \rightarrow B, \sim B \vdash \sim A$$

$$A \rightarrow \sim B, B \vdash \sim A$$

$$\sim A \rightarrow B, \sim B \vdash A$$

$$\sim A \rightarrow \sim B, B \vdash A$$

$$\sim(A \rightarrow B) \vdash A$$

$$\sim(A \rightarrow B) \vdash \sim B$$

- 条件引入 \rightarrow^+

$$A, \sim B \vdash \sim(A \rightarrow B)$$

- 条件换位

$$A \rightarrow B \vdash \sim B \rightarrow \sim A$$

$$\sim B \rightarrow \sim A \vdash A \rightarrow B$$

联词规则

- 双向条件消去 \leftrightarrow^-

$$A \leftrightarrow B, A \vdash B; A \leftrightarrow B, \sim A \vdash \sim B$$

$$A \leftrightarrow B, B \vdash A; A \leftrightarrow B, \sim B \vdash \sim A$$

$$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B; A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$$

- 双向条件引入 \leftrightarrow^+

$$A \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$$

- 双向否定

$$A \leftrightarrow B \vdash \sim B \leftrightarrow \sim A$$

$$\sim B \leftrightarrow \sim A \vdash A \leftrightarrow B$$

注

联词规则不难证明（留作练习）

$$\vdash \forall x_j(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\forall x_j \mathcal{A} \leftrightarrow \forall x_j \mathcal{B})$$

- (1) $\forall x_j(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$
- (2) $\forall x_j \mathcal{A}$
- (3) $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ (1)(R3)
- (4) \mathcal{A} (3)(R3)
- (5) \mathcal{B} (3)(4)(\leftrightarrow^-)
- (6) $\forall x_j \mathcal{B}$ (5)(Gen)
- (7) $\forall x_j(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}), \forall x_j \mathcal{A} \vdash \forall x_j \mathcal{B}$ (1-6)
- (8) $\forall x_j(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x_j \mathcal{A} \rightarrow \forall x_j \mathcal{B}$ (1-7) 演绎
- (9) $\forall x_j(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x_j \mathcal{B} \rightarrow \forall x_j \mathcal{A}$ 类似 (8) 可证
- (10) $\forall x_j(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x_j \mathcal{A} \leftrightarrow \forall x_j \mathcal{B}$ (8)(9)(\leftrightarrow^+)
- (11) $\vdash \forall x_j(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\forall x_j \mathcal{A} \leftrightarrow \forall x_j \mathcal{B})$ 演绎

证明论*

- 各种一阶逻辑的证明论都可等价地用一阶规则（量词规则和联词规则统称）刻画
- 特别地，Gentzen 型证明论相当于只含消去和引入规则的形式系统（除去其中一些不独立的规则）；表演算类似
- 但如归结原理，在一阶情形需要引入新的技术，自动定理证明是证明论重要的研究方向

等价的谓词演算*

谓词演算 K' 同时使用 **存在量词** \exists ，通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式

$$(K') \quad \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\exists x_i \mathcal{A} \rightarrow \exists x_i \mathcal{B})$$

\mathcal{A} , \mathcal{B} 是任意公式, x_i 是任意变元

命题 4.22

K' 与 K 具有相同的定理集

证

易见 □

注

公理系统等价是通过它们具有相同定理集来证明，而不是相互推出公理和规则

一个公式 \mathcal{A} 的**概化** (generalization) 是形如 $\forall x_1 \cdots x_k \mathcal{A}$, $k \geq 1$ 的公式, 其中 $x_1 \cdots x_k$ 是任意 (不一定是不同的) 变元

等价的谓词演算 *

谓词演算 K^* **不需 Gen 规则** (即 MP 是唯一规则), 通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式

$$(K^*) \quad \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{A}$$

\mathcal{A} 是任意公式, x_i 不在 \mathcal{A} 中自由

- 所有公理 (模式) 的所有概化

(亦可把所有公理中单个变元 x_i 换成变元组 $x = (x_1, \cdots, x_k)$, 相当于概化)

命题 4.23

K^* 与 K 具有相同的定理集

证

由 (K^*) 应用 MP 可得类似 (R2), 需考虑概化到多个变元 □

等价的谓词演算

谓词演算 $K^\#$ 不需 Gen 规则, 通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式

$$(K^\#1) \quad (\forall y_1) \cdots (\forall y_n) \mathcal{A}$$

\mathcal{A} 是 K 的公理, $y_1 \cdots y_n$ 是任意变元 ($n \geq 0$, 当 $n = 0$ 时即 \mathcal{A})

$$(K^\#2) \quad ((\forall y_1) \cdots (\forall y_n) (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow ((\forall y_1) \cdots (\forall y_n) \mathcal{A} \rightarrow (\forall y_1) \cdots (\forall y_n) \mathcal{B})$$

\mathcal{A} , \mathcal{B} 是任意公式, $y_1 \cdots y_n$ 是任意变元

- MP 是唯一规则

命题 4.24

$K^\#$ 与 K 具有相同的定理集

证

设 $\vdash_K \mathcal{A}$, 结构归纳证明对 $y_1 \cdots y_n$ ($n \geq 0$), $\vdash_{K^\#} (\forall y_1) \cdots (\forall y_n) \mathcal{A}$ (留作练习) □