数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

8 一阶逻辑 III

8.1

证明以下各式是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理，要求写出形式证明：

(a) $\forall x_1(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1))$

(b) $\exists x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现

(c) $(\exists x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现

(d) $\sim\forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \sim\mathscr{A}$

8.2

(a) 指出下列形式证明是否有错：

(1)	$(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$	假设
(2)	$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$	(1), 概括
(3)	$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$	$(K5)$
(4)	$(\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$	$(2),(3), MP.$

因此，$(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$，故由演绎定理得

$$\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$$

(b) 给出一个合适的解释，证明公式 $((\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2))$ 不是逻辑有效的，因此不是 K 的定理。

8.3

谓词演算 $K^{\#}$ 修改 K 如下:

- 增加公理模式

  ($K^{\#1}$) $(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$

  $\mathscr{A}$ 是 K 的公理，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元（$n \geq 0$，当 $n = 0$ 时即 $\mathscr{A}$）

  ($K^{\#2}$) $((\forall y_1)\cdots(\forall y_n)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})) \to ((\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A} \to (\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{B})$

  $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是任意公式，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元

- MP 是唯一规则

证明: $K^{\#}$ 与 K 具有相同的定理集。