

数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

8 一阶逻辑 III

8.1

证明以下各式是 $K_{\mathcal{L}}$ 的定理, 要求写出形式证明:

- (a) $\forall x_1(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(x_1))$
- (b) $\exists x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, x_i 不在 \mathcal{B} 中自由出现
- (c) $(\exists x_i \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, x_i 不在 \mathcal{B} 中自由出现
- (d) $\sim \forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \exists x_i \sim \mathcal{A}$

8.2

(a) 指出下列形式证明是否有错:

- (1) $(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ 假设
- (2) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ (1), 概括
- (3) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$ (K5)
- (4) $(\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$ (2), (3), *MP*.

因此, $(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$, 故由演绎定理得

$$\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$$

(b) 给出一个合适的解释, 证明公式 $((\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2))$ 不是逻辑有效的, 因此不是 K 的定理。

8.3

谓词演算 $K^\#$ 修改 K 如下:

- 增加公理模式

$$(K^{\#1}) (\forall y_1) \cdots (\forall y_n) \mathcal{A}$$

\mathcal{A} 是 K 的公理, $y_1 \cdots y_n$ 是任意变元 ($n \geq 0$, 当 $n = 0$ 时即 \mathcal{A})

$$(K^{\#2}) ((\forall y_1) \cdots (\forall y_n)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow ((\forall y_1) \cdots (\forall y_n)\mathcal{A} \rightarrow (\forall y_1) \cdots (\forall y_n)\mathcal{B})$$

\mathcal{A} , \mathcal{B} 是任意公式, $y_1 \cdots y_n$ 是任意变元

- MP 是唯一规则

证明: $K^\#$ 与 K 具有相同的定理集。