数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

3 一阶逻辑：模型论

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足
- 真值
- 斯科伦化

真值

定义 3.46 (模型)

一个公式 $\mathscr{A}$ 是在解释 I 中为真的，若 I 中每个赋值 v 都满足 $\mathscr{A}$；$\mathscr{A}$ 是在 I 中为假的，若 I 中不存在满足 $\mathscr{A}$ 的赋值

一个解释 I 称为公式 $\mathscr{A}$ 的模型，若 I 中每个赋值 v 都满足 $\mathscr{A}$，即 I 使 $\mathscr{A}$ 为真；$\mathscr{A}$ 在 I 中为假，即 I 不是 $\mathscr{A}$ 的模型

记 $I \models \mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}$ 在 I 中为真，即 I 是 $\mathscr{A}$ 的模型

令 Γ 是一个公式集，一个解释 I 是 Γ 的模型，当且仅当 $\forall \mathscr{A} \in \Gamma$，$I \models \mathscr{A}$ ♢

注

$\forall \mathscr{A}$ 是元语言记号，表示所有（Γ 中）$\mathscr{A}$，不是一阶语言符号

真值概念对应于命题真值，比赋值（可满足）更直观

注

(a) 存在公式在 I 中既不真又不假（考虑自由变元，赋值有些可满足有些不可满足）

(b) 一个公式不可能在给定的解释中既真又假（排中、二值）

(c) 在一个给定的解释中，公式 $\mathscr{A}$ 是假的，当且仅当 $\sim\mathscr{A}$ 是真的

(d) 在一个给定的解释中，公式 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是假的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是真的且 $\mathscr{B}$ 是假的

命题 3.47

在一个给定的解释 I 中，若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$ 都为真，则 $\mathscr{B}$ 也为真 $\diamondsuit$

证

令 v 是 I 的任一赋值，由 $I \models \mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B} \quad \Rightarrow$

v 满足 $\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$，即 v 要么满足 $\sim\mathscr{A}$，要么满足 $\mathscr{B}$

又由 $I \models \mathscr{A} \quad \Rightarrow$

v 满足 $\mathscr{A}$，不可能满足 $\sim\mathscr{A}$

故 v 满足 $\mathscr{B}$，即 $I \models \mathscr{B}$ $\square$

命题 3.48

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，I 是一个解释，则 $I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$，其中 x_i 为任意变元 ◇

证

设 $I \models \mathscr{A}$，令 v 是 I 的任一赋值，则 v 满足 $\mathscr{A}$

由于 I 中的每个赋值都满足 $\mathscr{A}$，则每个 i-等值于 v 的赋值 v' 也满足 $\mathscr{A}$，因而 v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，即 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$

反之，设 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$，令 v 是 I 的任一赋值，则 v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{A}$

即任一 i-等值于 v 的赋值 v' 都满足 $\mathscr{A}$，特别地，v 也满足 $\mathscr{A}$（定义 3.41 注：v 对任何变元 x_i 自身是 i-等值的）

即（I 的）任一赋值满足 $\mathscr{A}$，因此 $I \models \mathscr{A}$ □

推论 3.49

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，I 是一个解释，则 $I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models (\forall y_1) \cdots (\forall y_n)\mathscr{A}$，其中 $y_1, \cdots, y_n$ 为任意变元 ◇

证

重复应用 命题 3.48 即得 □

注

- 若 x_i 在 $\mathscr{A}$ 中不自由出现，则添加量词得到 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，并不改变 $\mathscr{A}$ 的解释
- 对 $\mathscr{A}$ 中自由变元 x_i，则添加量词得到 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，本有不同的效果，但 命题 3.48 揭示 $\mathscr{A}(x_i)$ 为真 当且仅当 $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ 为真

  这样，通常以 $\mathscr{A}(x_i)$ 表 $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$，作为全称量化公式

命题 3.50

在一个解释 I 中，赋值 v 满足 $(\exists x_i)\mathscr{A}$，当且仅当至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v'，v' 满足 $\mathscr{A}$ ♢

证

因 $(\exists x_i)\mathscr{A}$ 等价于 $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，则赋值 v 满足 $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，即 v 不满足 $(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，则至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v'，使得 v' 不满足 $(\sim\mathscr{A})$，即 v' 满足 $\mathscr{A}$

反之亦然 □

注

v 满足 $(\exists x_i)\mathscr{B}$，若至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v' 满足 $\mathscr{B}$

若至少存在一个 $d \in D_I$，v 都满足 $\mathscr{B}(d)$

定义（替换实例）

设 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中的一个公式，对 $\mathscr{A}_0$ 中的任一谓词（命题）符，用 $\mathscr{L}$ 中的一个公式去替换它在 $\mathscr{A}_0$ 中的处处出现，这样得到对应的一个 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}$，称之为 $\mathscr{A}_0$ 在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例 $\diamondsuit$

注

作为特殊情况，$\mathscr{L}_0$ 是 $\mathscr{L}$ 的子语言，$\mathscr{A}_0$ 若是 $\mathscr{L}_0$ 中的公式，$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中 $\mathscr{A}_0$ 在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例

例：$\sim\forall x_1 A_1^1(x_1) \to (\forall x_2 A_2^2(x_1, x_2) \to (A_1^1(x_2) \to \forall x_1 A_3^1(x_1))$

即可看成 $\sim p_1 \to p_2$ 的替换实例，亦可看成

$$\sim q_1 \to (q_2 \to q_3) \text{ 的替换实例}$$

定义 3.51 ($\mathscr{L}$ 重言式)

$\mathscr{L}$ 中的一个公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，若 $\mathscr{A}$ 是 L 中的一个重言式在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例 $\diamondsuit$

亦即，$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中的一个重言式在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例

注

重言式是命题逻辑的概念，只能通过替换实例引入一阶逻辑

例：$\forall x_1 A_1^1(x_1) \to \forall x_1 A_1^1(x_1)$

是重言式 $p_1 \to p_1$ 的替换实例

命题 3.52

$\mathscr{L}$ 中的重言式在 $\mathscr{L}$ 的任何解释中都为真 ◇

证

设 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中一个公式，且 $p_1, \cdots, p_n$ 是 $\mathscr{A}_0$ 中出现的所有命题（谓词）符，$\mathscr{A}$ 是通过用 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 分别替换 $p_1, \cdots, p_n$ 在 $\mathscr{A}_0$ 中的处处出现而得到的公式

令 I 是 $\mathscr{L}$ 的任一解释，v 是 I 中的任一赋值，构造一个 $\mathscr{L}$ 的赋值 v' 满足

$$v'(p_i) = T, \text{若 } v \text{ 满足 } \mathscr{A}_i;\ \text{否则 } v'(p_i) = F, 1 \leq i \leq n$$

归纳可证：赋值 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 $v'(\mathscr{A}_0) = T$

证（续）

若 $\mathscr{A}_0$ 就是一个谓词符，如 p_n，则结论显然成立

(1) $\mathscr{A}_0$ 是 $\sim\mathscr{B}_0$，则 $\mathscr{A}$ 就是 $\sim\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}_0$ 的一个替换实例

v 满足 $\mathscr{A}$ $\iff$

v 不满足 $\mathscr{B}$，由归纳假设 $\iff$

$v'(\mathscr{B}_0) = F$，即 $v'(\mathscr{A}_0) = T$

证（续）

(2) $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0$, 则 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 分别是 $\mathscr{B}_0$ 和 $\mathscr{C}_0$ 的替换实例

下列陈述等价

(a) v 满足 $\mathscr{A}$

(b) v 满足 $\sim\mathscr{B}$，或 v 满足 $\mathscr{C}$

(c) v 不满足 $\mathscr{B}$，或 v 满足 $\mathscr{C}$

(d) $v'(\mathscr{B}_0) = F$，或 $v'(\mathscr{E}_0) = T$

(e) $v'(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0) = T$

(f) $v'(\mathscr{A}_0) = T$

进一步，$\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{L}$ 中的重言式，则对任意赋值 v' 都有 $v'(\mathscr{A}_0) = T$，就有赋值 v 满足 $\mathscr{A}$

考虑到 I 和 v 的任意性，命题成立 $\square$

给定一个解释，一个公式不必非真既假，可不真不假

例 3.53

- $A_1^1(x_1)$ 不真不假 $\Leftarrow$ 自由变元

  考虑一个解释 I 其论域为整数，A_1^1 表示谓词 “> 0”，则

  $A_1^1(x_1)$ 被任何赋值 $v(x_1) > 0$ 所满足（但不是所有赋值）

  $A_1^1(x_1)$ 不被任何赋值 $w(x_1) \leq 0$ 所满足

- $A_1^2(x_1, x_2)$

  考虑一个解释 I 其论域为正整数，A_1^2 表示谓词 “$x_1 \leq x_2$”，则

  $A_1^2(x_1, x_2)$ 被所有使得 $a \leq b$ 之正整数的有序对 (a, b) 所满足

定义 3.54

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，$\mathscr{A}$ 称为闭（公）式（亦称句子 (sentence)），若 $\mathscr{A}$ 中没有自由出现的变元；称为开（公）式，若 $\mathscr{A}$ 中包含（至少一个）自由变元 ◇

注

(1) 闭项（不含变元）与闭式（不含自由变元）的含义不同

(2) 一个公式不是闭式就是开式（把不含变元的公式作为闭式的特殊情况），不含量词的开式可称为纯开式

命题 3.55

令 I 是一个解释，$\mathscr{A}$ 是一个公式。v 和 w 是 I 中的赋值，且对 $\mathscr{A}$ 中每个自由变元 x_i 都有 $v(x_i) = w(x_i)$，则 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 w 满足 $\mathscr{A}$ ◇

证

若 $\mathscr{A}$ 是原子，如 $A_i^n(t_1, \cdots, t_n)$，只需考虑 $\mathscr{A}$ 中出现的自由变元和常元（函项符由此解释）

对出现在 $t_1, \cdots, t_n$ 中的自由变元和个体常元，v 和 w 赋值相同

$v(t_i) = w(t_i)$，$1 \leq i \leq n$

结论显然成立

(1) $\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{B}$

(2) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$

易证

证（续）

(3) $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{B}$

(⇒) 若 $v \models \mathscr{A}$，即 $v \models \forall x_i \mathscr{B}$

考虑 w' 是任一 i- 等值于 w 的赋值

因 x_i 不自由出现在 $\forall x_i \mathscr{B}$，有

$v(y) = w'(y)$，y 是 $\mathscr{A}$ 中自由变元

任一 i- 等值于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{B}$

特别，令

$v'(x_i) = w'(x_i)$

$v'(x_j) = v(x_j)$，$j \neq i$

则 $w'(y) = v'(y)$，y 是 $\mathscr{B}$ 中自由变元

据归纳假设（注意到 w' 与 v' 是 i-等值的）

$v' \models \mathscr{B} \quad \Rightarrow \quad w' \models \mathscr{B}$

$w \models \forall x_i \mathscr{B}$，即 $w \models \mathscr{A}$

(⇐) 同理可证 □

推论 3.56

令 I 是一个解释，$\mathscr{A}$ 是一个闭式，则 $I \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \sim\mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

设 v 和 w 是 I 中任意两个赋值，则对 $\mathscr{A}$ 的任意自由变元 y （其实 $\mathscr{A}$ 中无自由变元出现）都有 $v(y) = w(y)$，则 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 w 满足 $\mathscr{A}$，这意味着要么所有的赋值都满足 $\mathscr{A}$，要么没有赋值满足 $\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 为真或 $\mathscr{A}$ 为假，亦即 $I \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \sim\mathscr{A}$ $\square$

例 3.57

(1) $\forall x_1 A_1^1(x_1)$ 非真即假 $\Leftarrow$ 闭式

考虑一个解释 I 其论域为整数，A_1^1 表示谓词 “> 0”，则

$$I \models \forall x_1 A_1^1(x_1) \text{ 或 } I \models \sim\forall x_1 A_1^1(x_1)$$

即 $\forall x_1(x_1 > 0)$ 为真或 $\sim\forall x_1(x_1 > 0)$ 为真

(2) $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$

考虑一个解释 I 其论域为正整数，A_1^2 表示谓词 “$x_1 \leq x_2$”，则

“对所有正整数 x_2，$x_1 \leq x_2$” 仅被正整数 1 满足（自由变元仅可解释为 1）

(3) $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$

考虑一个解释 I 其论域为<u>正整数</u>，A_1^2 表示谓词 “$x_1 \leq x_2$” $\Rightarrow$ 真（存在一个最小正整数）

考虑一个解释 I 其论域为<u>整数</u>，A_1^2 表示谓词 “$x_1 \leq x_2$” $\Rightarrow$ 假

注

- 闭式是二值的（开式不一定，如例 3.53）
- 闭式即（复合）命题（句子）
- 对闭式，检测其真假值只需检查是否有某个赋值满足它与否
- 一个解释中的真值概念比一个赋值的可满足概念更直接好用
- 数学中通常只用闭式（因此经常省略 $\forall$ 作为全称闭式）

定义 3.58

令 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$\mathscr{A}$ 是（逻辑）有效的（有效式），若 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{L}$ 的每个解释下都为真，即对任一模型 I，$I \models \mathscr{A}$，记 $\models \mathscr{A}$

$\mathscr{A}$ 是矛盾的（不一致），若 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{L}$ 的每个解释下都为假，即对任一模型 I，$I \not\models \mathscr{A}$，亦即 $\sim\mathscr{A}$ 是有效的 ◇

推论 3.59

- 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都是有效的，则 $\mathscr{B}$ 也是有效的
- 若 $\mathscr{A}$ 是有效的，当且仅当 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 是有效的，其中 x_i 为任意变元

证

据命题 3.47 和命题 3.48 □

注

$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 不可能同时有效（在一个解释下，若 $\mathscr{A}$ 为真则 $\sim\mathscr{A}$ 为假）；$\mathscr{A}$ 是矛盾的当且仅当 $\sim\mathscr{A}$ 是有效的

注

为证明一个公式是有效的，需证任一解释之任一赋值都满足这个公式；反之，为证明一个公式不是有效的，只要构造一个解释，使得某个赋值不满足这个公式（反例）

例 3.60

(a) 所有重言式都是有效的（命题 3.52），反之不然，如 $\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ 是有效的，但不是重言式

(b) $A_1^1(x_1)$ 不是有效的（不真不假）

(c) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$ 不是有效的可构造一解释其论域为整数集，$\bar{A}_1^2(y, z)$ 解释为 $y < z$

(d) $(\forall x_i\mathscr{A}(x_i) \to \forall x_i\mathscr{B}(x_i)) \to \forall x_i(\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{B}(x_i))$ 无效吗？

(e) 令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，则 $\forall x_i\mathscr{A} \to \exists x_i\mathscr{A}$ 是有效的

例（续）(e)

$\forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$

令 I 是任意解释，其论域为 D_I，v 为 I 中任意赋值

若 $v \not\models \forall x_i \mathscr{A}$，则 $v \models \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$

若 $v \models \forall x_i \mathscr{A}$，则

每个 i-等价于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{A}$

$v \models \exists x_i \mathscr{A}$ （命题 3.50）

$v \models \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$ 有效

注

- 重言式是 PL 的概念，通过重言式替换实例可在 FOL 延用，有效式（对应于重言式）是 FOL 的概念，但有效式比重言式强

  重言式必是有效式，但有效式不一定是重言式

  如 (e) 是一个有效（闭）式但不是重言式的例子

- 有效的纯开式必是重言式（替换实例）

  (试证之：任一开式都可能没有真值)

定义 3.61 (蕴涵关系)

令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是（$\mathscr{L}$ 的）公式，称 $\mathscr{A}$ 蕴涵 $\mathscr{B}$，记 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$（简记 $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$），若满足 $\mathscr{A}$ 的所有解释也满足 $\mathscr{B}$

即，$\mathscr{A}$ 的所有模型也是 $\mathscr{B}$ 的模型

亦即，令 I 是任一解释，$\mathscr{A} \models \mathscr{B}$，若 $I \models \mathscr{A}$ 则 $I \models \mathscr{B}$

令 Γ 是一个公式集，$\mathscr{B}$ 是 一个公式，$\Gamma \models \mathscr{B}$，若 $I \models \Gamma$ 则 $I \models \mathscr{B}$

称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 逻辑等价（简称等价），记 $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$，若 $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B} \models \mathscr{A}$

$\diamondsuit$

命题 3.62

若 $\mathscr{A} \models_L \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$；特殊地，若 $\models_L \mathscr{B}$，则 $\models_K \mathscr{B}$；

若 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是重言等价，则它们也是逻辑等价

证

若 $\mathscr{A} \models_L \mathscr{B}$，$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}_0$ 的公式，它们也是 $\mathscr{L}$ 的公式

据 L 的完全性定理和演绎定理，有

$\models_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，即 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是重言式

据命题 3.52，有

$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是 K 的有效式，即 $\models_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

据定义 3.42，对任一解释 I，若 $I \models_K \mathscr{A}$ 则 $I \models_K \mathscr{B}$，即 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$ □

例 3.63

$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \equiv \forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{A})$，但不是重言等价

(PL 的等价与 FOL 的等价并不相同)

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足
- 真值
- 斯科伦化

斯科伦化

定义 3.64 (斯科伦式)

- 若公式 $(\exists x_i)\mathscr{B}$ 出现在公式 $\mathscr{A}$ 中，且属于 $(\forall x_{i1}),\cdots,(\forall x_{ir})$ 的辖域，不妨设为 $B(x_{i1},\cdots,x_{ir},x_i)$，则可删除 $(\exists x_i)$，且以函项符 $h_i^r(x_{i1},\cdots,x_{ir})$ 替换 x_i，$h_i^r(x_{i1},\cdots,x_{ir})$ 称为斯科伦函项
- 若 $(\exists x_i)$ 不出现在任何全称量词的辖域中，直接删除 $(\exists x_i)$，且以个体常元符 c_i 替换 x_i，c_i 称为斯科伦常元

这种做法称为公式的斯科伦化（Skolemisation），这样得到的公式称为 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式

例 3.65

$(\forall x_1)(\exists x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_3)A_2^3(x_1, x_2, x_3))$ 的斯科伦式为

$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, h_1^1(x_1)) \to A_1^3(x_1, h_1^1(x_1), h_2^1(x_1)))$

例 3.66

$\forall x.Person(x) \to \exists y.Heart(y) \wedge Has(x, y)$

不正确：$\forall x.Person(x) \to Heart(h) \wedge Has(x, h)$

正确：$\forall x.Person(x) \to Heart(h(x)) \wedge Has(x, h(x))$

注

斯科伦函项是存在性论断，若要找到具体的特列需要根据公式去发现

注

- 为清楚起见，可在 $\mathscr{L}$ 中规定一类斯科伦函项符和一类斯科伦常元
  给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，可扩展 $\mathscr{L}$ 成另一个一阶语言 $\mathscr{L}^s$：对 $\mathscr{L}$ 中常元系列和函项符系列分出子系列作为斯科伦常元和斯科伦函项符

$$
\begin{aligned}
& a_i, \ldots \\
& \quad a_i^s, \ldots \\
& f_i^n(t_1, \ldots, t_n), \ldots \\
& \quad f_i^n(t_1, \ldots, t_n)^s, \ldots
\end{aligned}
$$

  (一个能枚举集可划分为两个能枚举集)
- 斯科伦化的目的是消去存在量词，与消去存在量词的顺序无关，斯科伦式是相同的
- 一个公式 $\mathscr{A}$ 与其斯科伦式 $\mathscr{A}^s$ 不一定等价：“$\mathscr{A}$ 有效当且仅当 $\mathscr{A}^s$ 有效”不成立

命题 3.67

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，$\mathscr{A}$ 是矛盾的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式是矛盾的 $\diamond$

即 $\mathscr{A}$ 和它的斯科伦式是弱等价的，或反证等价

证

等价于证明（注意：考虑 $\mathscr{A}$ 不矛盾，即不是所有解释使 $\mathscr{A}$ 成假，意味存在至少一个解释使 $\mathscr{A}$ 成真，因 $\mathscr{A}$ 可能是开式，亦可不真不假，但只要考虑都是成真的情况）

$\mathscr{A}$ 为真 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 的斯科伦式为真

（简化证明，只考虑闭式，完整证明参见命题 4.44）

考虑公式 $\mathscr{A}$：　$\forall x_1 \exists x_2 \mathscr{B}(x_1, x_2)$

其斯科伦式 $\mathscr{A}^s$：$\forall x_1 \mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$

证（续）

（$\Rightarrow$）设存在一个解释 $I \models \mathscr{A}$

$I \models \exists x_2 \mathscr{B}(x_1, x_2)$ （命题 3.48，对 $\forall$）

$v \models \exists x_2 \mathscr{B}(x_1, x_2)$，$v$ 是 I 的任一赋值

令 $x \in D_I$，$v(x_1) = x$

$v' \models \mathscr{B}(x_1, x_2)$，存在 v' 是 2-等值于 v （命题 3.50，对 $\exists$）

令 $\overline{h}_1^1(x) = v'(x_2)$，$\forall x \in D_I$

即 $\overline{h}_1^1(x)$ 是良定义的（在 D_I 中处处定义）

扩展 I 到 I^s，其（一阶）语言包含斯科伦函项 h_1^1，且把 h_1^1 解释为 $\overline{h}_1^1$，则对 I^s 的任一赋值 u（注意到 I^s 与 I 不同只在斯科伦函项，u 是 v 相应的扩展）

$u \models \mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$

$I^s \models \forall x_1 \mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$ （命题 3.48）

（$\Leftarrow$）同理可证 $\square$

定义 3.68 (解释同构)

令 $\mathscr{L}$ 是一个一阶语言，I 和 I' 是两个 $\mathscr{L}$ 的解释，其论域分别为 D_I 和 $D_{I'}$。I 与 I' 同构（记 $I \approx I'$）当且仅当存在一个一一对应映射 g 使得：v, v' 分别是 I, I' 的任一赋值

(1) 对任一常元 a_i，$g(v(a_i)) = v'(a_i)$

(2) 对任一函项符 $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$，
$g(v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n))) = v'(f_i^n(g(t_1), \ldots, g(t_n)))$

(3) 对任一谓词符 $A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$，$v \models A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ 当且仅当 $v' \models A_i^n(g(t_1), \ldots, g(t_n))$ ◇

注

解释（模型）必须在同一论域或同构论域才能比较，同构解释具有相同的结构

命题 3.69

若 $I \approx I'$，则对任何公式 $\mathscr{A}$，$I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I' \models \mathscr{A}$ $\Diamond$

证

据 g 归纳可证 $\square$

定义 3.70

令 I_1, I_2 是（$\mathscr{L}$ 的）两个解释，I_1 与 I_2（基本）等价（记 $I_1 \equiv I_2$），若对任一公式 $\mathscr{A}$，$I_1 \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I_1 \models \mathscr{A}$

注

若 $I_1 \approx I_2$，则 $I_1 \equiv I_2$；反之不然

定义 3.71

令 Γ 是一个（$\mathscr{L}$ 的）公式集，M_1 和 M_2 是两个 Γ 的模型，

M_2 是 M_1 的扩展，记 $M_1 \sqsubseteq M_2$，若：v_1, v_2 分别是 M_1, M_2 的任一赋值

- $D_{M_1} \subseteq D_{M_2}$
- 对任一常元 a_i，$v_1(a_i)) = v_2(a_i)$
- 对任一函项符 $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$，$v_1(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = v_2(f_i^n(t_1, \ldots, t_n))$
- 对任一谓词符 A_i^n，D_{M_1} 中任意 $b_1, \ldots, b_n$，$M_1 \models A_i^n(b_1, \ldots, b_n)$ 当且仅当 $M_2 \models A_i^n(b_1, \ldots, b_n)$ $\diamondsuit$

亦称 M_1 是 M_2 的子模型（子结构）

注

极小模型？基于极小模型的推理??

从模型论引出非标准分析（无穷小 = 模型 = 实数域）