# 数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

# 3 一阶逻辑：模型论

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足

# 解释

## 语义

$\mathscr{L}$ 的语义确定 $\mathscr{L}$ 的表达式（公式）的解释，但不能一次性地规定所有公式的具体含义，因非逻辑符号（函项、谓词）依赖于具体的应用背景，可以有不同的意思

例：常元 $lin$ 可为此 $lin$ 亦可为彼 $lin$

$Happy(lin)$ 代表谁 $Happy$，即使 $Happy$ 的意思明确

原子 $Happy(lin)$

$\Rightarrow$ 某个个体 $lin$ （不管是谁）具有一种性质 $Happy$

## 注

谓词作为简单命题同样具有真值

## 语义抽象

- 世界中有一些对象
- 对 1 元谓词符 $A^1$，有某些对象满足 $A^1$ 而某些对象不满足 $A^1$，对 $A^1$ 的解释就是确定对每个对象是否满足它

  对 $n$ 元谓词符类似

  对 $n$ 元函项符类似，解释为是否有 $n$ 个对象映射到另一个对象
- 别无其它

FOL 假设：这就是所有关于非逻辑符的解释，由此确定公式的真值

## 注

Tarski 语义（1934）

概念化：对象，对象之间的关系（谓词、函项）

## 定义 3.36 (解释)

$\mathscr{L}$ 的一个解释（interpretation）$I$ 如下组成

(1) 一个非空集 $D_I$ （$I$ 的论域（domain））

(2) 一个不同元素（个体）集 $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots\}$

(3) 一个在 $D_I$ 上的函项集 $\{\bar{f}_i^n | i > 0, n > 0\}$

$$\bar{f}_i^n : D_I^n \to D_I$$

(4) 一个在 $D_I$ 上的关系集 $\{\bar{A}_i^n | i > 0, n > 0\}$

$$\bar{A}_i^n \subseteq D_I^n$$

$\mathscr{L}$ 中<u>变元</u> 在 $I$ 下解释作为论域 $D_I$ 中的任意对象 ◇

## 注

- $D_I$ 是 $\mathscr{L}$ 中变元的定义域
    - 在一个解释中，对变元的量词所指称的对象 在论域中，因此 $\mathscr{L}$ 称为一阶语言
    - $D_I$ 非空是必要的，否则将出现不可解释情况（空论域或是无用的，或作为特殊情况需建立专门的逻辑理论来处理）
    - 给定一个解释，需指定一个论域，不同论域的解释不能比较
- 个体集由 $\mathscr{L}$ 中（个体）常元所代表的具体对象组成，即一个常元指定一个固定个体（不同常元对应不同个体）
- 关系和函项是对 $\mathscr{L}$ 中谓词符和函项符的具体解释

  ——一元谓词符的解释即为 $D_I$ 的子集，$n$ 元谓词符解释为 $D_I^n$ 中 $n$ 元组的子集
- 仅当给出 $\mathscr{L}$ 中符号的解释后，才能对有关公式的意义做出判断

## 注

- 有时为简便计，$D_I$ 中元素（对象）就用个体常元（或闭项）表示

  如 $D_I = \{d_1, d_2, \cdots\}$

  为方便，$d_1, d_2, \cdots$ 表示常元 $a_1, a_2, \cdots$ 或常项（因项解释为论域中对象）

  但不要与对象语言 $\mathscr{L}$ 混淆

  - 对集 $D_I$ 可用任何符号表其元素，直接用 $\mathscr{L}$ 中符号亦可
  - $\mathscr{L}$ 中个体和项解释为 $D_I$ 元素，直接用 $\mathscr{L}$ 中个体和项来表 $D_I$ 元素亦方便
  - 这样，$A_1^1(d)$ 可表示用常元（项）$d$ 替换 $A_1^1(x_1)$ 中变元 $x_1$ 的结果，$d \in D_I$，如果 $d$ 不作为 $\mathscr{L}$ 的符号（如常元），那么 $A_1^1(d)$ 就不合式
- 技术上，对 $\mathscr{L}$ 作常元扩展 $\mathscr{L}^+$ 使得对 $D_I$ 中每个元素 $d$ 引入一个常元 $a_d$，扩展 $I$ 作为 $\mathscr{L}^+$ 的解释取 $d$ 作为 $a_d$ 的解释

## 二阶语言

二阶语言：量词可解释为在论域中一些对象（对象集）的关系（谓词和函项）；变元分别有对象变元和谓词（关系）变元

例：二阶公式 $(\forall A_i)\mathscr{A}(A_i)$

对谓词变元的量词解释为论域中子集的集

$n$ 阶语言以此类推

例：每个非空的自然数集都有一个最小元

## 数学归纳法

对任一包含 0 的自然数集 $N$，若当 $n \in N$ 时就有 $n+1 \in N$，则 $N$ 包含每个自然数

$$\forall A(A(0) \land \forall x(A(x) \to A(x+1)) \to \forall x A(x))$$

## 例 3.37 (例 3.13 续)

给定 $\mathscr{L}$：变元、括号、连接词和量词之外

$$a_1, A_1^2, f_1^1, f_1^2$$

提供如下解释 $I_1$

(1) $D_{I_1}$ 为整数集

(2) 0 为特异元，作为 $a_1$ 的解释

(3) 关系 “$=$” 作为谓词符 $A_1^2$ 的解释

(4) 求反数作为函项符 $f_1^1$ 的解释

(5) 整数加法作为函项符 $f_1^2$ 的解释

## 例（续）

则对（该 $\mathscr{L}$ 的）任一公式，可解释成关于群的一个命题

$\forall x_1 A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$ 被解释成

对所有 $x_1 \in D_I$, "$x_1 + (\text{-}x_1) = 0$"

在此解释下，该公式的意义为真（$T$）

把 (5) 替换为

(5′) 整数减法作为函项的 $f_1^2$ 解释

$\forall x_1 A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$ 被解释成

对所有 $x_1 \in D_I$, "$x_1 \text{-} (\text{-}x_1) = 0$"

在此解释下，该公式的意义为假（$F$）

## 例 3.38

$\forall x_1 \forall x_2 \sim \forall x_3 \sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)$

可被解释成（为真）

对所有 $x, y \in D_N$，不是对每个 $z \in D_N$，$x + z \neq y$

（对所有 $x, y \in D_N$，存在 $z \in D_N$，使得 $x + z = y$）

提供如下解释 $N$（算术解释）

(1) $D_N$ 为自然数集

(2) 0 为特异元，作为 $a_1$ 的解释

(3) 关系 "$=$" 作为谓词符 $A_1^2$ 的解释

(4) 加法作为函项符 $f_1^2$ 的解释

(5) 乘法作为函项符 $f_2^2$ 的解释

## 例（续）

$\forall x_1 \forall x_2 \sim \forall x_3 \sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)$

亦可被解释成（为真）

对所有 $x, y \in D_R$，存在 $z \in D_R$，使得 $xz = y$

提供如下解释 $R$

(1) $D_R$ 为正有理数集

(2) 1 为特异元，作为 $a_1$ 的解释

(3) 关系 “=” 作为谓词符 $A_1^2$ 的解释

(4) 加法和乘法分别作为函项符 $f_1^2, f_2^2$ 的解释

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足

# 满足

令 $I$ 是（一阶语言）$\mathscr{L}$ 的一个以 $D_I$ 为论域的解释

$\bar{a}_i$，$\bar{f}_i^n$ 和 $\bar{A}_i^n$ 分别指 $a_i$，$f_i^n$ 和 $A_i^n$ 在 $I$ 中的解释

**定义 3.39 (变元赋值)**

变元赋值 $\tilde{v}$: $\{x_1, x_2, \ldots,\} \to D_I$，即对 $\mathscr{L}$ 中每个变元 $x_i$ 指派 $D_I$ 的（任意）一个元素作为它的解释 $\diamondsuit$

给定一个解释 $I$ 和一个变元赋值 $\tilde{v}$，才能对 $\mathscr{L}$ 中符号完全解释

**定义 3.40 (赋值)**

$I$ 上的一个赋值是一个从 $\mathscr{L}$ 的项集到 $D_I$ 的映射 $v$，满足

(1) 对 $\mathscr{L}$ 的每个常元 $a_i$, 有

$$v(a_i) = \bar{a}_i$$

(2) 对 $\mathscr{L}$ 的任一函项符 $f_i^n$ 和项 $t_1, \cdots, t_n$，有

$$v(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \bar{f}_i^n(v(t_1), \cdots, v(t_n))$$

◇

为简略计（不够严格），可用 $I$ 中赋值 $v$ 来表达变元赋值（即含有 $\tilde{v}$），通过枚举 $v(x_1), v(x_2), \cdots (v(x_i) \in D_I, i = 1, 2, \ldots)$ 系列而完全描述，因为赋值中对函项符的解释（归纳定义） $v(t_i)$ 需包含变元赋值

**注**

- 对每个变元 $x_i$ 的赋值要考虑指定论域中的每个对象（实例）
- 任一赋值 $v$ 对 $\mathscr{L}$ 中的每个项指派了 $D_I$ 中的一个对象作为它的解释
- 赋值定义条件 (2) 保证了赋值规则的一致性
- 给定一个解释，一般有多种（可能无穷）不同的赋值 $v$

**定义 3.41 ($i$-等值)**

两个赋值 $v$ 和 $v'$ 是 $i$-等值的，若对每个 $j \neq i$，$v(x_j) = v'(x_j)$ ◇

对 $i$-等值的两个赋值，它们在除 $x_i$ 外的（任意）变元有相同的取值（除 $i$ 外“几乎”一样，但其实不一样）

**注**

- 一般地，对 $x_i$ 在其中出现的任何项 $t$，两个赋值是不同的
- 特殊地，一个赋值 $v$ 自身对任何变元 $x_i$ 是 $i$-等值的（对每个 $j \neq i$，$v(x_j) = v(x_j)$）

## 定义 3.42 (可满足性)

令 $\mathscr{A}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个公式，$I$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个解释，$\tilde{v}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个变元赋值

$I$ 中一个赋值 $v$ 满足 $\mathscr{A}$，记 $I, \tilde{v} \models \mathscr{A}$ 或 $I, v \models \mathscr{A}[\tilde{v}]$，简

记 $I, v \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \mathscr{A}$ 或 $v \models \mathscr{A}$，归纳定义如下

(1) $v$ 满足原子 $A_j^n(t_1, \cdots, t_n)$，若 $\bar{A}_j^n(v(t_1), \cdots, v(t_n))$ 在 $D_I$ 中为真（即语句形式 "$D_I$ 中元素 $v(t_1), \cdots, v(t_n)$ 具有关系 $\bar{A}_j^n$" 为真）

(2) $v$ 满足 $(\sim\mathscr{B})$，若 $v$ 不满足 $\mathscr{B}$

(3) $v$ 满足 $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})$，若 $v$ 满足 $(\sim\mathscr{B})$，或满足 $\mathscr{C}$

(4) $v$ 满足 $(\forall x_i)\mathscr{B}$，若对每一 $i$- 等值于 $v$ 的赋值 $v'$ 都满足 $\mathscr{B}$ ◇

## 注

(a) 定义 3.42 (1):

$v(A_j^n(t_1,\cdots,t_n)) = T$，若 $< v(t_1),\cdots,v(t_n) > \in \bar{A}_j^n$；否则，

$v(A_j^n(t_1,\cdots,t_n)) = F$

把命题作为 0 元谓词符，即没有论据，就是规定了二值，可见可满足性定义包含了命题逻辑语义

(b) 定义 3.42 (4):

- $v$ 对于出现在 $\mathscr{B}$ 中的变元提供了解释（变元赋值）
  $v$ 满足 $(\forall x_i)\mathscr{B}$ 是合理的：若 $v$ 满足 $\mathscr{B}$ 且由 $v$ 通过改变 $v(x_i)$（变元赋值）而得的任何赋值也满足 $\mathscr{B}$
- $(\forall x_i)\mathscr{B}(x_i)$ 亦可解释为：对每个 $d \in D_I$，$v$ 都满足 $\mathscr{B}(d)$，这里 $d$ 被看成 $x_i$ 的解释（定义 3.36 注）

(c) 作为定义，四个条件都是充要条件

(d) $v$ 不满足 $\mathscr{A}$，简记 $I \not\models \mathscr{A}$

## 例 3.43 (例 3.13 续)

给定 $\mathscr{L}$ 如下符号（变元、括号、连接词和量词之外）

$a_1, A_1^2, f_1^1, f_1^2$

提供如下解释 $I_2$

$D_{I_2}$ 为整数集

0 为特异元，作为 $a_1$ 的解释

关系 “=” 作为谓词符 $A_1^2$ 的解释

反数作为函项符 $f_1^1$ 的解释

整数加法作为函项符 $f_1^2$ 解释

## 例（续）

考虑 $(\forall x_1)(A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1))$

令 $v$ 是 $I_2$ 上的一个赋值，则 $v(x_1)$ 一定是个整数，且 $v(a_1) = 0$，则该公式解释为

对于所有的 $x_1 \in D_I$，"$x_1 + (\text{-}x_1) = 0$"

$v$ 满足 $(A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1))$

若改变 $v(x_1)$ 的值，得到新的 1-等值 赋值仍满足这个公式，即 $v$ 满足

$(\forall x_1)(A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1))$

**注**

可记 $v' = v(x_i/t)$ 表示 $v'$ 是通过用 $t$ 替换 $v$ 中 $x_i$ 的所有出现而得的项；记 $v(x_i/t)$ 表示把 $v(x_i)$ 替换为 $v(t)$

**命题 3.44 (替换)**

令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个公式，且 $x_i$ 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，$t$ 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 $x_i$ 自由的项。设 $v$ 是一赋值，$v'$ 是 $i$-等值于 $v$ 的另一赋值且 $v'(x_i) = v(t)$，则 $v$ 满足 $\mathscr{A}(t)$ 当且仅当 $v'$ 满足 $\mathscr{A}(x_i)$ ◇

**证**

分别对项（符号数）和公式（联词和量词数）的结构用归纳法

**引理 3.45**

对任一 $x_i$ 在其中出现的项 $s$，$s'$ 是通过用 $t$ 替换 $s$ 中 $x_i$ 的所有出现而得的项，则 $v(s') = v'(s)$ ◇

## 证（续）

$v(s') = v'(s)$

(1) $s$ 是 $x_i$，$s'$ 即是 $t$，则

$$\begin{aligned} v'(s) &= v'(x_i) = v(t) \quad （v' \text{ 的定义}） \\ &= v(s') \end{aligned}$$

(2) $s$ 是 $f_i^n(s_1, \cdots, s_n)$，其中 $s_1, \cdots, s_n$ 为较短长度的项

令 $s'_1, \cdots, s'_n$ 是用 $t$ 替换所有 $x_i$ 而得，则 $s' = f_i^n(s'_1, \cdots, s'_n)$

$$\begin{aligned} v(s') &= \bar{f}_i^n(v(s'_1), \cdots, v(s'_n)) \\ &= \bar{f}_i^n(v'(s_1), \cdots, v'(s_n)) \qquad （\text{归纳假设}） \\ &= v'(s) \end{aligned}$$

## 证（续）

$v \models \mathscr{A}(t)$ iff $v' \models \mathscr{A}(x_i)$

- $\mathscr{A}(x_i)$ 是原子，如 $A_j^n(s_1, \cdots, s_n)$，其中 $s_1, \cdots, s_n$ 为项

  ($\Leftarrow$) 设 $v' \models \mathscr{A}(x_i)$，则

  $\bar{A}_j^n(v'(s_1), \cdots, v'(s_n))$ 可满足

  $\bar{A}_j^n(v(s'_1), \cdots, v(s'_n))$ 可满足

  其中 $s'_1, \cdots, s'_n$ 为用 $t$ 替换所有 $x_i$ 的项，如上已证

  这样，$v \models A_j^n(s'_1, \cdots, s'_n)$，即 $v \models \mathscr{A}(t)$

  ($\Rightarrow$) 反之亦然

- (1) (a) $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\sim\mathscr{B}(x_i)$

  (b) $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\mathscr{B}(x_i) \to \mathscr{C}(x_i)$

  易证

## 证（续）

(2) $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i) \qquad (j \neq i)$

($\Leftarrow$) 设若 $v \not\models \mathscr{A}(t)$（欲反证 $v' \not\models \mathscr{A}(x_i)$）

则存在一个 $j$-等值于 $v$ 的赋值 $w$，$w \not\models \mathscr{B}(t)$

令 $w'$ 是一个 $i$-等值于 $w$ 的赋值，（按已知条件）有 $w'(x_i) = w(t)$

按归纳假设（对较短的 $\mathscr{B}(x_i)$），由 $w \not\models \mathscr{B}(t)$，有 $w' \not\models \mathscr{B}(x_i)$

$t$ 对 $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$ 中 $x_i$ 是自由的，因此 $x_j$ 不出现在 $t$ 中

这样，对 $k \neq j$，$v(t)$ 仅依赖于 $v(x_k)$，亦即

对 $k \neq j$，$v(x_k) = w(x_k)$，因此 $v(t) = w(t)$

因 $w$ 是 $j$-等值于 $v$ 的，所以 $w'$ 是 $j$-等值于 $v'$ （据引理 3.45）

由 $w' \not\models \mathscr{B}(x_i)$，有 $v' \not\models (\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$，即 $v' \not\models \mathscr{A}(x_i)$

($\Rightarrow$) 同理可证 □

## 量词的构造 *

令 $M$ 是一个集，$\mathcal{R}_M(n)$ 是 $M$ 上所有 $n$-元关系（谓词）的集，

$R \in \mathcal{R}_M(n)$ 看作含 $n$ 个自由变元 $x_0, \cdots, x_{n\text{-}1}$ 的性质；对任一 $R \in \mathcal{R}_M(n)$，令 $j(R) \in \mathcal{R}_M(n+1)$ 是同样的关系，只增加一个名义（dummy）变元 $x_n$

对任一 $R \in \mathcal{R}_M(n+1)$，可有 $\mathcal{R}_M(n)$ 中的关系 $\exists x_n R$，$\forall x_n R$

这样，对任一 $R \in \mathcal{R}_M(n)$ 和 $Q \in \mathcal{R}_M(n+1)$，以下性质满足：$\vDash$ 是定义 3.42 中除全称量词（定义 3.42 (4)）外的可满足性

$$Q \vDash j(R) \iff \exists x_n Q \vDash R$$

$$j(R) \vDash Q \iff R \vDash \forall x_n Q$$

这些性质实际上确定了关系 $\exists x_n Q$ 和 $\forall x_n Q$，因此可用作量词的语义定义