数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

6 一阶逻辑 II

6.1

给出 $\wedge, \vee, \exists$ 的可满足性定义。

6.2

令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，且 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的项；设 v 是一赋值，v' 是 i-等值于 v 的另一赋值且 $v'(x_i) = v(t)$，则如果 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 那么 v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$。

6.3

令 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，除变元、技术性符号、连词和量词外，包含个体常元符 a_1，函项符 f_1^2 和谓词符 A_2^2，令 $\mathscr{A}$ 为如下公式：

$$\forall x_1 \forall x_2 (A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \to A_2^2(x_1, x_2))$$

定义 $\mathscr{L}$ 的解释 I 如下：D_I 为 $\mathbb{Z}$，$\bar{a_1}$ 为 0，$\bar{f_1^2}(x, y)$ 为 $x - y$，$\bar{A_2^2}(x, y)$ 为 $x < y$。给出 $\mathscr{A}$ 在 I 下的解释，并判断它为真或假；给出另一个解释使得 $\mathscr{A}$ 的真值相反。

在解释 I 下，若可能，给出满足和不满足以下公式的赋值：

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$$

判断以下闭式为真或假：

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$$

6.4

是否有一个（合适的 $\mathscr{L}$ ）解释使得公式

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

被解释为假？若有，则给出这个解释；若没有，说明理由。

6.5

在算术解释 N 中，若可能，给出满足和不满足以下公式的赋值：

$$\forall x_1 A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$$