

# 数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

## 6 一阶逻辑 II

### 6.1

给出  $\wedge, \vee, \exists$  的可满足性定义。

### 6.2

令  $\mathcal{A}(x_i)$  是  $\mathcal{L}$  的一个公式, 且  $x_i$  在  $\mathcal{A}(x_i)$  中自由出现,  $t$  是对  $\mathcal{A}(x_i)$  中  $x_i$  自由的项; 设  $v$  是一赋值,  $v'$  是  $i$ -等值于  $v$  的另一赋值且  $v'(x_i) = v(t)$ , 则如果  $v$  满足  $\mathcal{A}(t)$  那么  $v'$  满足  $\mathcal{A}(x_i)$ 。

### 6.3

令  $\mathcal{L}$  是一阶语言, 除变元、技术性符号、连词和量词外, 包含个体常元符  $a_1$ , 函项符  $f_1^2$  和谓词符  $A_2^2$ , 令  $\mathcal{A}$  为如下公式:

$$\forall x_1 \forall x_2 (A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \rightarrow A_2^2(x_1, x_2))$$

定义  $\mathcal{L}$  的解释  $I$  如下:  $D_I$  为  $\mathbb{Z}$ ,  $\bar{a}_1$  为  $0$ ,  $\bar{f}_1^2(x, y)$  为  $x - y$ ,  $\bar{A}_2^2(x, y)$  为  $x < y$ 。给出  $\mathcal{A}$  在  $I$  下的解释, 并判断它为真或假; 给出另一个解释使得  $\mathcal{A}$  的真值相反。

在解释  $I$  下, 若可能, 给出满足和不满足以下公式的赋值:

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$$

判断以下闭式为真或假:

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$$

### 6.4

是否有一个 (合适的  $\mathcal{L}$ ) 解释使得公式

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

被解释为假? 若有, 则给出这个解释; 若没有, 说明理由。

### 6.5

在算术解释  $N$  中, 若可能, 给出满足和不满足以下公式的赋值:

$$\forall x_1 A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$$