数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

3 一阶逻辑：模型论

- 谓词和量词
- 一阶语言

命题逻辑的局限

考察下面直观上认为有效的推理

$$\begin{array}{rl} & \text{所有人都是会死的} \\ & \text{苏格拉底是人} \\ \therefore & \text{苏格拉底是会死的} \end{array}$$

在命题逻辑中，这个推理被形式化为

$$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \therefore & r \end{array}$$

但这个推理形式是无效的

命题逻辑的表达能力

- 三段论逻辑就是含有量词的命题的推理形式，但太狭窄
- 命题逻辑 L 具有基本的逻辑演算能力
  - L 是描述的，即语法成份对应事实
  - L 是可复合的，即如 $A \wedge B$ 的意义可从 A 和 B 获得
  - L 是与内容无关的，即尽管形式语言的符号可按不同的方式加以解释，但这些解释并不是形式演算系统的一个部分，不象自然语言是与内容有关的
  - L 具有逻辑连接词，能够表达析取和否定信息

但 L 表达能力不够，如难于表达“所有人都会死的”

这种推理形式的有效性依赖于命题所包含的各个组成部分之间的关系和命题本身的形式

更为清晰而恰当的推理形式应是

$$\begin{array}{ll} & \text{所有 } A \text{ 都是 } B \\ & C \text{ 是一个 } A \\ \therefore & C \text{ 是 } B \end{array}$$

进一步描述

- ◇ 前提“所有 A 都是 B”的一般属性（描述事物量的变化）
- ◇ 用符号来表示一个简单命题的各个部分（内部结构）

需引进量词（quantifier）和谓词（predicate）

主谓结构

一个简单命题细化为主谓结构

对简单命题，用大写字母 A，B，C（可加下标）等表示谓词，用小写字母 a，b，c（可加下标）等表示主词（体）

对复合命题，只要对其中每个简单命题细化

例 3.1

“Perelman 是一个数学家” 可表成 $M(a)$

“Perelman 是一个数学家，他是天才” 可表成 $M(a) \wedge G(a)$

定义 3.2 (全称量词和存在量词)

“对所有 x (for all x)” 称为全称量词，用符号 $(\forall x)$（简记 $\forall x$）表示

“存在（至少一个） x (there exists at least one object x such that)” 称为存在量词，用符号 $(\exists x)$（简记 $\exists x$）表示

这里 x 是任意对象，称为（对象）变元，代表未确定的主体

用 x，y，z（可加下标）等表示变元

注

- 记号 (Gentzen)：$\forall$ 记 All，$\exists$ 记 Exist（倒写）

定义 3.3 (约束变元和自由变元)

当变元在以量词开始的命题中被使用时，称为约束变元（bound variable）；否则，称为自由变元（free variable）

例 3.4

“x 加 1 等于 2” 可表成 $E(f(x,1),2)$，x 是自由变元

注

由于 x 是未指定的，不能为这个陈述指派一个真值

类似一个含有代词的脱离了上下文的语句，如“他很聪明”，它既不真也不假，除非它放进一个上下文中。一个带自由变元的表达式就像一个用“某某”来当作其主语的谓词

量词的意义

$\forall x A(x)$："每个对象都具有 A 决定的属性"

$\exists x A(x)$："有某些对象具有 A 决定的属性"

$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ ：对（宇宙中）每个对象 x，若 x 具有属性 A 则 x 具有属性 B

—对任意对象 x，若 x 是人则 x 是会死的

——不论 x 是什么对象（即使不是人），$A(x) \rightarrow B(x)$ 的真值由 $\rightarrow$ 的真值表决定，但 $A(x)$，$B(x)$ 的真值呢？

$\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$ ：存在（宇宙中）某些对象 x，若 x 具有属性 A 则 x 具有属性 B

注

量词的本质是引入变元，这意味着在命题逻辑中基于真值表判定推理形式是否有效的方法不可能得到推广（从有限到无限）

例 3.5

“所有的数学家都是天才”

$$(\forall x)(M(x) \to G(x))$$

$$\forall x.\ M(x) \to G(x)$$

“有的哲学家是疯子”

$$(\exists x)(P(x) \wedge C(x))$$

“不是所有的鸟都会飞”

$$\sim \forall x(B(x) \to F(x))$$

“每个中国人都有（一个）梦想”

$$\forall x.\ C(x) \to \exists y D(y)$$

(梦想是有的，但每人的梦想不一样)

例（续）

“存在一个比任何其它整数都大的整数”

$$\exists x(I(x) \land \forall y(I(y) \rightarrow x \geq y))$$

“对任一整数都存在一个比它大的整数”

$$\forall x.I(x) \rightarrow \exists y.I(y) \land y \geq x$$

$\geq$ 是谓词，如 $\geq(x, y)$

例 3.6（函数）

$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \land (\forall x)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon))$

谓词 $<$ 包含函数 $|x - c|$，函数 $|f(x) - f(c)|$ 包含函数 f（嵌套）

量词的用法

一个不是普遍但常见的表示模式

全称量词后面常跟一个隐含词

存在量词后面常跟一个合取词

$$\exists x(I(x) \wedge \forall y(I(y) \rightarrow x \geq y))$$

$$\forall x(I(x) \rightarrow \exists y(I(y) \wedge y \geq x))$$

例 3.7

$\forall x(A(x,b) \to S(x))$

“每个在（A(t)）北大（b(eida)）的人都是聪明的（S(mart)）”

$\forall x(A(x,b) \land S(x))$

“每个人都在北大并且每个人都是聪明的”

$\exists x(A(x,q) \land S(x))$

“有些在清华（q(inghua)）的人是聪明的”

$\exists x(A(x,q) \to S(x))$

为真，只要“存在不在清华的人”

量词的对偶

下面两个句子有同样的含义

(1) 并非所有 x 都不具有属性 P: $((\sim\forall x)\sim P(x))$

(2) 存在某个 x 具有属性 P: $((\exists x)P(x))$

例 3.8

形式化下列句子，第一次不用全称量词，第二次不用存在量词

(a) 所有的鸟（Birds）都会飞（Fly）

$\sim(\exists x)(B(x)\wedge\sim F(x))$

$(\forall x)(B(x)\rightarrow F(x))$

(b) 一些数不是有理数

$(\exists x)(N(x)\wedge\sim R(x))$

$\sim(\forall x)(N(x)\rightarrow R(x))$

形式化

用谓词和量词细化描述自然语言陈述（知识）

例：从书中随便找一个自然语言段落，把它表示为具有谓词和量词的形式

例 3.9 (例1.13（续））

A: 白日依山尽

A： $\forall x(D(x) \rightarrow \exists yz(S(y) \wedge M(z) \wedge B(y,z))$

符号约定

为知识表示方便，可用一个字符串代表一个（命题、谓词）符号，如：

$\forall x(Day(x) \rightarrow \exists yz(Sun(y) \wedge Mountain(z) \wedge Behind(y,z))$

- 谓词和量词
- 一阶语言

一阶语言

一阶逻辑

一阶（谓词）逻辑（演算）(first-order (predicate) logic，简写 FOL)

— 一个在 L 基础上扩展的更复杂的形式系统，具有足够的表达能力

一阶语言

一阶逻辑的形式语言，即称一阶语言（first-order language)，记为 $\mathscr{L}$，

给出字符表和构造合式公式的规则和意义

字符表

$x_1, x_2, \cdots$	变元
$a_1, a_2, \cdots$	（个体）常元
$A_1^1, A_2^1, \cdots; A_1^2, A_2^2, \cdots; A_1^3, A_2^3, \cdots; \cdots$	谓词符
$f_1^1, f_2^1, \cdots; f_1^2, f_2^2, \cdots; f_1^3, f_2^3, \cdots; \cdots$	函项（函数，function）符
(,), ,	括逗号（技术性符号）
$\sim, \rightarrow$	连接符
$\forall$	量词

注

技术性符号不是必要的，为易读而已

注

1. 变元、连接符、量词和技术性符号称为逻辑符号，常元、函项符和谓词符称为非逻辑符号
2. 引入个体常元，可使某些公式被解释为关于某个特殊事物的命题
例：“苏格拉底是一个人”看作 $A_1^1(a_1)$ 的一个解释（a_1 特指苏格拉底）
3. 函项符系列 f_i^n 和谓词符序列 A_j^n，其中 n 表示 n 元谓词关系（简称关系）和 n 元函项关系
4. 谓词和函项是两种关系；若仅表示关系，谓词符可以胜任，但引入函项符有助于描述，如数学中普遍使用函数
5. 只需全称量词，因存在量词可通过全称量词来定义，作为缩写引入
6. 为使形式语言尽可能的广泛，需要潜在的（能枚举）无限多的符号，否则任意有限符号都可能不够用；但在应用中，仅对其中的某些符号规定解释就够了

符号约定

为易读起见，有时用字符串（如单词）表示非逻辑符，这时整个符号串当成一个字符，如约定

以小写字母开头的词表示函项符，例如：myBook

（常元、变元亦可照此）

以大写字母开头的词表示谓词符，例如：BetterThan

定义 3.10 (一个一阶语言 $\mathscr{L}$ 的字符表)

变元	$x_i, \cdots$
某些（可能没有或能枚举无穷）常元	$a_i, \cdots$
某些（有穷或能枚举无穷）谓词符	$A_i^n, \cdots$
某些（可能没有或能枚举无穷）函项符	$f_i^n, \cdots$
技术性符号	(,), ,
连接词	$\sim$, $\to$
量词	$\forall$

注

- 谓词符不能为空，否则将没有公式
- 广义（generalized）一阶语言：常元、谓词符和函项符是无穷系列，但一阶语言只需考虑能枚举系列，而有限系列是不够的

注

- A_i^n, f_i^n 中 $n \in \mathbb{N}$（自然数集），即 n 元，约定 0 元函项符作为常元（但为方便计保留 a_i），0 元谓词符作为命题符
- 上下文易辨时符号上下标可省略，如 x, a, A, f 等
- 有时为方便起见可引入其它技术性符号，如：$\cdots$，.，/
- 给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$ 就是给定其字符表（变元、括号，连接词和量词之外，如非逻辑符号），有时指任一 $\mathscr{L}$（通用），有时指特定一个 $\mathscr{L}$（专用）

定义 3.11 (一阶语言的变化)

给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，一个 $\mathscr{L}$ 的扩展（expansion）$\mathscr{L}^+$ 有如下变化（或变化之一）

- 从 $\mathscr{L}$ 的一个变元系列变成两个（或多个）变元系列，如增加 $x_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 $\mathscr{L}$ 的一个常元系列变成两个（或多个）常元系列，如增加 $a_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 $\mathscr{L}$ 的一个函项符系列变成两个（或多个）函项符系列，如 $f^n_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 $\mathscr{L}$ 的一个谓词符系列变成两个（或多个）谓词符系列，如增加 $A^n_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列

其它符号不变。亦称 $\mathscr{L}^+$ 为两类（多类）一阶语言

注

一个能枚举系列可划分为两个或多个能枚举系统，如自然数系列

定义 3.12 ($\mathscr{L}$-字符串)

一个 $\mathscr{L}$-字符的有限（可为空）序列称为 $\mathscr{L}$-（字符）串

——串的长度即字符总数（字符可重复出现），空串的长度为 0

- 若 s, t 都是串，st 作为 s, t 连接而成的串
- 若 $r = st$，r, s, t 都是串，则 s 是一个 r 的初始段；如果 t 是非空的，则 s 是一个 r 的（真）子段
- 类似地，若 $r = st$，r, s, t 都是串，则 t 是一个 r 的结束段；如果 s 是非空的，则 t 是一个 r 的子段

$\mathscr{L}$-表达式

$\mathscr{L}$-中两种串：项，公式

例 3.13

用一阶语言表达关于算术的命题

采用具有如下（变元、括号，连接词和量词之外）符号的一阶语言 $\mathscr{L}$

- a_1，代表 0
- A_1^2，代表 $=$
- f_1^1，代表后继函数
- f_1^2，代表 $+$
- f_2^2，代表 $\times$

如 $A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_2^2(x_1,x_2))$ 可被解释成 “$x_1+x_2=x_1x_2$”

例（续）

用一阶语言表达关于群的命题

采用具有如下（变元、括号，连接词和量词之外）符号的一阶语言 $\mathscr{L}$

- a_1，代表单位元
- A_1^2，代表 $=$
- f_1^1，代表求每个元素的逆元的函数
- f_1^2，代表群的二元运算

如 $A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$ 可被解释成 “$x_1 x_1^{-1} =$ 单位元”

定义 3.14 (项)

(令 $\mathscr{L}$ 是一个一阶语言，) 项 (term) 是如下定义的 $\mathscr{L}$-串

(1) 变元和常元都是项

(2) 若 f_i^n 是 $\mathscr{L}$ 中的函项符，且 $t_1, \cdots, t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项，则 $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项

(3) 所有项组成的集由 (1) 和 (2) 生成 $\diamondsuit$

注

- $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$：$t_1, \cdots, t_n$ 作为 f_i^n 的论据 (arguments)
- 项解释成对象：函项作用于其上的事物，具有某种属性的事物，对之作出某些判定的事物
- $\mathscr{L}$ 中只要含有一个函项符，项集必是 (能枚举) 无穷的

定义 3.15 (常项)

常元亦称常项，是函项的特殊情况，即 0 元函项 ◇

定义 3.16 (闭项)

闭项（closed term）指不含变元的项，即由所有常元及其通过函项符生成的；含变元的项可称为开项 ◇

定义 3.17 ($deg(t)$)

项 t 的（复杂）度（记 $deg(t)$）指的 t 中出现的函项符个数 ◇

注

deg 可在结构归纳时使用

定义 3.18 ($\mathscr{L}$ 的闭项扩展)

给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，一个 $\mathscr{L}$ 的闭项扩展 $\mathscr{L}^+$ 是通过在 $\mathscr{L}$ 中引入一个（可能可枚举无穷）闭项系列 $t_0, t_1, t_2, \cdots$ 定义的

特殊地，一个 $\mathscr{L}$ 的常元扩展 $\mathscr{L}^+$ 是通过在 $\mathscr{L}$ 中引入一个（可能可枚举无穷）常元系列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ 定义的 $\diamondsuit$

注

常元是特殊的闭项，用常元扩展更简单明了

定义 3.19 (原子)

原子（公式）是如下定义的 $\mathscr{L}$-串：若 A_j^n 是 $\mathscr{L}$ 中的一个谓词符，且 $t_1, \cdots, t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项，则 $A_j^n(t_1, \cdots, t_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的一个原子

$t_1, \cdots, t_n$ 是 A_j^n 的论据 ◇

定义 3.20 (公式)

（合式）公式是如下定义的 $\mathscr{L}$-串

(1) 每个原子是公式

(2) 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式，则 $(\sim\mathscr{A}), (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 和 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 也是公式，其中 x_i 是任意变元

(3) 所有公式的集由 (1) 和 (2) 生成 ◇

注

- 命题语言 $\mathscr{L}_0$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的子语言

  $\mathscr{L}$ 中不含量词、项，只含 0 元谓词符即为 $\mathscr{L}_0$

  $\mathscr{L}_0$ 公式简称**命题公式**，$\mathscr{L}$ 公式简称**一阶公式**

定义 3.21

$\mathscr{B}$ 称为一个公式 $\mathscr{A}$ 的**子公式**，若 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 或出现在 $\mathscr{A}$ 中的一个公式，若子公式 $\mathscr{B}$ 不是 $\mathscr{A}$ 则为严格子公式

定义 3.22 ($deg(\mathscr{A})$)

公式 $\mathscr{A}$ 的（复杂）度（记 $deg(\mathscr{A})$）是对 $\mathscr{A}$ 中出现的 $\to$ 加 2、$\sim$ $\forall$ 分别加 1 的和 $\diamondsuit$

注

- 量词和它所作用的公式不一定有联系

  例： $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$

- 记 $\mathscr{A}(x_i)$ 强调 $\mathscr{A}$ 中包含 x_i，但不排除 $\mathscr{A}$ 中可能还包含其它变元

- 为方便起见，作为被定义的符号引进 $\exists$，$\wedge$，$\vee$ 和 $\leftrightarrow$

  $((\exists x_i)\mathscr{A})$ 是 $((\sim(\forall x_i))(\sim\mathscr{A}))$ 的缩写

  $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ 是 $(\sim(\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{B})))$ 的缩写

  $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$ 是 $((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B})$ 的缩写

  $(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ 是 $\sim((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ 的缩写

注

不引起混淆的情况下有些括号可省略

- 省略括号时连接符优先序跟命题逻辑相同
- 量词 $(\forall x)(\exists x)$ 的括号亦可省略，如 $\forall x \exists x$，且规定量词比连接符优先序高；可使用 “.” 指明量词辖域，如 $\forall x.\mathscr{A}(x) \to \mathscr{B}(x)$ 即 $\forall x(\mathscr{A}(x) \to \mathscr{B}(x))$
- $\forall x_1 \cdots \forall x_n$ 可简写成 $\forall x_1 \cdots x_n$
- 对连续多个否定符或量词按从右向左（由里向外）顺序处理
- $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\mathscr{A}$ 可简写成 $\forall x_1 \cdots x_n\mathscr{A}$

$$f_i^n(t_1, \cdots, t_n) =_{def} f_i^n t_1 \cdots t_n$$

$$A_j^n(t_1, \cdots, t_n) =_{def} A_j^n t_1 \cdots t_n$$

技术性符号（括号、逗号）是不必要的

赋予一个（$\mathscr{L}$-）串的**权重**为对其出现的变元加 -1、n-元函项符和谓词符分别加 $n-1$、$\sim$ 加 0、$\rightarrow$ 加 1、$\forall$ 加 1 的总和

注

常元看成 0 函项符。度和权重略有区别

引理 3.23

每个项 t 具有权重 -1，t 的任意初始子段的权重都是非负的，

$f_i^n t_1 \cdots t_n$ 是唯一确定的 ◇

证

对 $deg(t)$ 施归纳证明：若 t 仅是单一变元，显然成立（其初始子段为空权重为 0）

若 t 是 $f_i^n t_1 \cdots t_n$，则 $deg(t_1), \cdots, deg(t_n) < \deg(t)$，由归纳假设，$t$ 的权重为 $(n - 1) + n \times (-1) = -1$

由此可见，串 $t_1 \cdots t_n$ 中 t_1 作为最短的初始段是唯一确定的（权重 -1）；类似地，$t_2, \cdots, t_n$ 都是唯一确定的

亦即，项 $f_i^n t_1 \cdots t_n$ 其论据都是唯一确定的 □

引理 3.24

每个公式 $\mathscr{A}$ 具有权重 -1，$\mathscr{A}$ 的任意初始子段的权重都是非负的，$A_j^n t_1 \cdots t_n$ 是唯一确定的 $\diamondsuit$

证

同上可证（对 $deg(\mathscr{A})$ 施归纳） $\square$

注

论据 $t_1 \cdots t_n$ 中 t_1 顺序无关

命题 3.25

一阶语言 $\mathscr{L}$ 的表达式集是能枚举的；项集和公式集都是能枚举的 $\diamondsuit$

证

首先，对每个符号 w 赋予一个正整数 $g(u)$ 进行编码，如下

- $g(() = 3, g()) = 5, g(,) = 7, g(\sim) = 9, g(\to) = 11, g(\forall) = 13, g\left(x_k\right) = 13+8k, g\left(a_k\right) = 7+8k, g\left(f_k^n\right) = 1+8\left(2^n 3^k\right), g\left(A_k^n\right) = 3+8\left(2^n 3^k\right)$

然后，对每个表达式 $w_0 w_1 \cdots w_n$，赋予一个数 $2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \ldots p_i^{g(u_i)}$，这里 p_i 是第 i 个素数（$p_0 = 2$），例如，$A_1^1\left(x_2\right)$ 得数 $2^{51} 3^3 5^{29} 7^5$
这样，能用所编码的自然数顺序枚举全部表达式 $\square$

注

- 能枚举是一个直观概念，即设计一个机械能行的过程把所有表达式枚举出来，这里就是用自然数可列
- 编码方法称 Gödel 编码，给定一个正整数能判定是否为表达式并唯一确定该表达式（参见第 6 章）

定义 3.26 (辖域)

在公式 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 中，称 $\mathscr{A}$ 是量词 $\forall$ 的辖域 (scope)

当 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 在公式 $\mathscr{B}$ 中作为子公式出现时，该量词在 $\mathscr{B}$ 中的辖域是 $\mathscr{A}$

变元 x_i 在一个公式中的出现称为约束的，若它出现在 $(\forall x_i)$ 的辖域之中，或它就在 $(\forall x_i)$ 中；否则，称为自由的 $\diamondsuit$

例 3.27

$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2))$ 中

x_1 有两次约束出现

x_2 有一次自由出现，两次约束出现

$(\forall x_1)$ 的辖域是 $(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2))$，$\forall x_2$ 的辖域是 $A_1^1(x_2)$

注

一个变元可在同一公式中同时自由出现和约束出现

定义 3.28 (项替换)

令 s, t 是（$\mathscr{L}$ 的）项。用 t 替换 s 中变元 x_i 的处处出现所得的项 $s(x_i/t)$，归纳定义如下：

- 若 s 为 x_i，则 $s(x_i/t)$ 为 t
- 若 s 为 x_j（$j \neq i$），则 $s(x_i/t)$ 为 x_j
- 若 s 为 $f_i^n(s_1, s_2, \ldots, s_n)$，$s_1, s_2, \ldots, s_n$ 是项，
  则 $s(x_i/t)$ 为 $f_i^n(s_1(x_i/t), s_2(x_i/t), \ldots, s_n(x_i/t))$ $\diamondsuit$

注

引入“/”作为技术性符号，但不是必需的，可记 $s(x_i/t)$ 为替换结果 $s(t)$

定义 3.29

令 $\mathscr{A}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个公式，t 是一个项，x_j 是出现在 t 中的任何变元。t 对 $\mathscr{A}$ 中的 x_i 是自由的，若 x_i 不自由出现在 $\mathscr{A}$ 中的任一 $(\forall x_j)$ 的辖域中 $\diamondsuit$

意即可用 t 替换 $\mathscr{A}$ 中 x_i 的自由出现不会引起 t 中变元与 $\mathscr{A}$ 中量词的交叉导致混淆（见下例）

——没有 t 中出现的（自由）变元变成 $\mathscr{A}(t)$ 中约束变元（导致不同的解释）

注

有时记 $\mathscr{A}(x_i/t)$ 表示在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中用项 t 替换 x_i 的结果，记 $s(x_i/t)$ 表示用项 t 替换项 s 中变元 x_i 的结果。同样地，技术性符号 “/” 不是必需的，可记为替换结果 $\mathscr{A}(t)$，$s(t)$

例 3.30

对 $(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_3)A_2^2(x_3,x_1)$

$f_1^2(x_1,x_4)$ 对 x_2 是不自由的

$f_2^2(x_2,x_3)$ 对 x_2 是自由的

$f_4^2(x_1,x_3)$ 对 x_1 是不自由的

x_2 对 x_1 是自由的 (没有 $\forall x_2$)

错误的替换：$(\forall x_1)A_1^2(x_1, f_1^2(x_1,x_4)) \to (\forall x_3)A_2^2(x_3,x_1)$

— 项 $f_1^2(x_1,x_4)$ 替换 x_2，x_2 自由出现在 $(\forall x_1)$ 的辖域中，这里 x_1 是出现在 $f_1^2(x_1,x_4)$ 中的变元（x_1 在项中是“自由”出现，替换后在公式中变成约束出现，这种交叉会导致不同的意义）

注

- 不含变元的项对任一公式中的任一变元是自由的
- 若 t 中没有变元在 $\mathscr{A}$ 中是约束的，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中任一变元都是自由的
- 对任何公式 $\mathscr{A}$ 和任何变元 x_i（不管它在 $\mathscr{A}$ 中是否自由出现），x_i 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 是自由的（x_i 不自由出现在 $(\forall x_i)$ 的辖域中）
- 若 $\mathscr{A}$ 不含 x_i 的自由出现，则任何项对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 都是自由的

定义 3.31 (公式中项替换)

(1) 若 $\mathscr{A}$ 是原子 $A_j^n(s_1,\ldots,s_n)$，则 t 对 x_i 自由，$\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $A_j^n(s_1(x_i/t),\ldots,s_n(x_i/t))$

(2) 若 $\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{B}$，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 自由，当且仅当 t 对 $\mathscr{B}$ 中 x_i 自由，$\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\sim\mathscr{B}(x_i/t)$

(3) 若 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 自由，当且仅当 t 对 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 中 x_i 都自由，$\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\mathscr{B}(x_i/t)\to\mathscr{C}(x_i/t)$

(4) 若 $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_j\mathscr{B}$，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 自由，当且仅当以下两条件之一成立

- x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现，这时 $\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\mathscr{A}$
- x_i 在 $\mathscr{A}$ 中自由出现，且 t 对 $\mathscr{B}$ 中 x_i 自由，x_j 不出现在 t 中，这时 $\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\forall x_j(\mathscr{B}(x_i/t))$ ◇

注

$\mathscr{A}(x_i/t_1,\ldots,x_n/t_n)$ 表示同时用项 $t_1,\ldots,t_n$ 分别替换变元 $x_1,\ldots,x_n$，但必须满足每次替换不会引起已替换的结果不合替换条件（试定义之：归纳定义）

注

定义 3.29 和 3.31 其实是一样的：t 在 $\mathscr{A}$ 中对 x_i 自由就是在 $\mathscr{A}(x_{\_})$ 中可用 t 替换 x_i，即 $\mathscr{A}(t)$

注

类比：一个量词的变元类似一个积分的变元

$\int_0^1 xy^2 dy$ 的值是基于 x 的值不基于 y 的值

若欲用一个含 y 的函数 $f(y)$ 替换 x，显然，$\int_0^1 xy^2 dy \neq \int_0^1 f(y)y^2 dy$

必须先改变积分的变元，如 $\int_0^1 xz^2 dz$，z 是不出现在 f 中的变元，然后就可安全地替换

$$\int_0^1 xy^2 dy = \int_0^1 f(y)z^2 dz$$

定义 3.31 条件保证了不需对量词辖域中变元换名也能安全地替换

定义 3.32 (换名替换)

若 x_j 是一个不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现但（在 $\mathscr{A}$ 中）对 x_i 自由的变元，则 $\forall x_j \mathscr{A}(x_i/x_j)$ 可由 $\forall x_i \mathscr{A}$ 通过改变字符（变元换名）而得 ◇

注

- 量词的变元换名类似积分的变元换名
- 若 x_j 不在 $\mathscr{A}$ 中出现，自然满足变元换名的条件
- 换名是可逆的，即若 x_i 可换为 x_j 则 x_j 可换为 x_i（试论证之：x_i 在 $\mathscr{A}(x_i/x_j)$ 中对 x_j 自由）
- 即使 t 对 $\mathscr{A}$ 中的 x_i 是不自由的，通过细心地进行变元换名（使得换名变化后的公式中 t 对 x_i 自由）亦可安全地进行替换

定义 3.33 (相似公式)

令 x_i 和 x_j 是不同变元，$\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 称为相似当且仅当若 x_j 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由且 $\mathscr{A}(x_i)$ 中没有 x_j 的自由出现 ◇

注

$\mathscr{A}(x_j)$ 是由 $\mathscr{A}(x_i)$ 用 x_j 替换 x_i 的所有自由出现获得

- 换名是可逆的：若 $\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是相似的，则 x_i 在 $\mathscr{A}(x_j)$ 中对 x_j 自由且 $\mathscr{A}(x_j)$ 中没有 x_j 的自由出现
- 若 $\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是相似的，则 $\mathscr{A}(x_j)$ 和 $\mathscr{A}(x_i)$ 也是相似的
- 直观上，$\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是相似的，当且仅当 $\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是一样的，除了 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 的自由出现正好是 $\mathscr{A}(x_j)$ 中 x_j 的自由出现

例 3.34

$(\forall x_3)\,(A_1^2\,(x_1, x_3) \vee A_1^1\,(x_1))$ 和 $(\forall x_3\,[[A_1^2\,(x_2, x_3) \vee A_1^1\,(x_2))$ 相似

例 3.35

用一阶语言表达关于信念的命题

给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，规定

$Believe(x,t)$，表示变元 x（代表主体）相信项 t（代表对象），或简单地 $Believe(t)$（某主体）相信项 t

$Know(t)$，表示知道项 t

如 $Believe(I, you)$ 可被解释成 “我相信你”

I 为常元，you 为常项（元）

$\forall x. Believe(x, god) \to Exists(god)$

$Believe(t) \wedge Exists(t) \to Know(t)$

但 $\forall x. Believe(x, \mathscr{A}) \wedge True(\mathscr{A}) \to Know(x, \mathscr{A})$ 是错的，因 $\mathscr{A}$ 是公式（如谓词符即命题），不是一阶的

二阶语言 *

在一阶语言 $\mathscr{L}$ 的基础上

记 C 代表（$\mathscr{L}$ 的）非逻辑常元（个体常元、函项符和谓词符）

$\langle u\rangle_n$ 表示个体变元系列 $u_1, \cdots, u_n$

$\langle t\rangle_n$ 表示项系列 $t_1, \cdots, t_n$

$\forall\langle u\rangle_n$ 表示 $(\forall u_1)\cdots(\forall u_n)$

二阶语言 $\mathscr{L}^2_C$（简记 $\mathscr{L}^2$）增加如下定义

- 符号：函项变元 $\boldsymbol{g}_i^n$，谓词变元 $\boldsymbol{R}_i^n$
- 项：$\boldsymbol{g}_i^n(\langle t\rangle_n)$
- 公式：$A_i^n(\langle t\rangle_n)$（原子，$A_i^n \in C$），$\boldsymbol{R}_i^n(\langle t\rangle_n)$，这里 $\langle t\rangle_n$ 是二阶项
- 量词公式：$(\forall \boldsymbol{g}_i^n)\mathscr{A}$，$(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\mathscr{A}$，这里 $\mathscr{A}$ 是二阶公式

纯二阶语言 *

在 $\mathscr{L}^2$ 中，= 不需作为原始符号（不需建立带等词的系统），$t = u$ 可定义为 $\left(\forall \boldsymbol{R}_1^1\right)\left(\boldsymbol{R}_1^1 t \leftrightarrow \boldsymbol{R}_1^1 u\right)$

纯二阶语言 $\mathscr{L}_{\emptyset}^2$：令 $C = \emptyset$，可有公式如

$$(\exists \boldsymbol{g})(\exists x)(\forall \boldsymbol{R})[(\boldsymbol{R}(x) \wedge (\forall y)(\boldsymbol{R}(y) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{g}(y)))) \to (\forall x)\boldsymbol{R}(x)]$$

可见二阶语言表达能力比一阶语言强

高阶语言 *

三阶语言 $\mathscr{L}^3$ 增加

- 函项符、谓词符、变元可以个体变元、函项符、谓词符为论据
- 二阶函项变元，二阶谓词变元
- 量词可管辖二阶变元

n-阶语言 $\mathscr{L}^n$（$n \geq 1$）以此类推