

# 数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

## 5 一阶逻辑 I

### 5.1

下列句子可否形式化？若可，用一阶语言表达：

- (a) 不是每个函数都有导数。
- (b) 存在连续不可导的函数。

### 5.2

找一段散文或一首诗歌（古诗、新诗或歌词），并用一阶语言形式化。

### 5.3

把下列句子形式化，先只用全称量词，再只用存在量词：

- (a) 不是所有汽车都有四个轮。
- (b) 有些人或者懒惰或者糊涂。

### 5.4

判断下列符号串哪个是（合式）公式？

- (a)  $f_1^2(x_1, x_3, x_4)$
- (b)  $(A_1^1(x_2) \rightarrow A_1^3(x_3, a_1))$

### 5.5

下列公式中  $x_1$  的出现是自由或约束的？

(a)  $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, a_1))$

(b)  $(A_1^1(x_3) \rightarrow (\sim(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^3(x_1, x_2, a_1)))$

项  $f_1^2(x_1, x_3)$  在上述公式中对  $x_2$  是否自由？

### 5.6

令  $\mathcal{A}(x_i)$  是  $\mathcal{L}$  中  $x_i$  自由出现的公式， $x_j$  是一个不自由出现在  $\mathcal{A}(x_i)$  中的变元。证明：若  $x_j$  在  $\mathcal{A}(x_i)$  中对  $x_i$  自由，则  $x_i$  在  $\mathcal{A}(x_j)$  中对  $x_j$  自由，这里  $\mathcal{A}(x_j)$  是对  $\mathcal{A}(x_i)$  中以  $x_j$  替换  $x_i$  的每个自由出现的结果。