数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

5 一阶逻辑 I

5.1

下列句子可否形式化？若可，用一阶语言表达：

(a) 不是每个函数都有导数。

(b) 存在连续不可导的函数。

5.2

找一段散文或一首诗歌（古诗、新诗或歌词），并用一阶语言形式化。

5.3

把下列句子形式化，先只用全称量词，再只用存在量词：

(a) 不是所有汽车都有四个轮。

(b) 有些人或者懒惰或者糊涂。

5.4

判断下列符号串哪个是（合式）公式？

(a) $f_1^2(x_1, x_3, x_4)$

(b) $(A_1^1(x_2) \to A_1^3(x_3, a_1))$

5.5

下列公式中 x_1 的出现是自由或约束的？

(a) $(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\to A_1^2(x_2,a_1))$

(b) $(A_1^1(x_3)\to(\sim(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^3(x_1,x_2,a_1)))$

项 $f_1^2(x_1,x_3)$ 在上述公式中对 x_2 是否自由？

5.6

令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\mathscr{L}$ 中 x_i 自由出现的公式，x_j 是一个不自由出现在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中的变元。证明：若 x_j 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，则 x_i 在 $\mathscr{A}(x_j)$ 中对 x_j 自由，这里 $\mathscr{A}(x_j)$ 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中以 x_j 替换 x_i 的每个自由出现的结果。