数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

- 形式系统
- 完全性定理

完全性定理

命题语言 $\mathscr{L}_0$

- 语法
  - ◇ 一个能枚举无穷的符号集：$\sim$，$\to$，(，)，p_1，p_2，p_3，$\cdots$
  - ◇ 一个公式（wfs）集
- 语义
  - ◇ 真值赋值，即命题形式的真值函数（真值表）

在 $\mathscr{L}_0$ 上，命题演算（形式系统）L

- 语法
  - ◇ 证明论：$\Gamma \vdash \mathscr{A}$
    - 一组公理（模式）
    - 推理规则
- 语义
  - ◇ 模型论：$\Gamma \models \mathscr{A}$

L 的基本性质

- 可靠性（soundness）：$\Gamma \vdash \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \mathscr{A}$
- 完全性（completeness）：$\Gamma \vdash \mathscr{A} \quad \Leftarrow \quad \Gamma \models \mathscr{A}$

语法与语义之间具有同构关系

定义 2.23 (赋值)

L 的一个赋值（valuation）是一个函数 v，其定义域是 L 的公式，值域是 $\{T, F\}$，使得对 L 的任意公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$

(1) $v(\mathscr{A}) \neq v(\sim\mathscr{A})$

(2) $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ 当且仅当 $v(\mathscr{A}) = T$ 且 $v(\mathscr{B}) = F$ $\diamondsuit$

注

L 的一个赋值亦即对一个（任一非特定）命题语言 $\mathscr{L}_0$ 的赋值

模型

令 v 是 L 的一个赋值，$\mathscr{A}$ 是一个公式。若 $v(\mathscr{A}) = T$，称 v 使 $\mathscr{A}$ 成真，亦称 v 满足 $\mathscr{A}$，v 是 $\mathscr{A}$ 的一个模型，记为 $v \models_L \mathscr{A}$，简记 $v \models \mathscr{A}$

定义 2.24 (重言式)

L 中的一个公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，若对每个赋值 v，都有 $v(\mathscr{A}) = T$，记为 $\models_L \mathscr{A}$，简记 $\models \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

注

重言式对于命题语言是不变的：若 $\mathscr{L}_0$ 和 $\mathscr{L}_0'$ 是两个命题语言使得 $\mathscr{A}$ 既是 $\mathscr{L}_0$ 的公式又是 $\mathscr{L}_0'$ 的公式，则 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_0'$ 的重言式当且仅当 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_0$ 的重言式

命题 2.25 (可靠性定理)

L 的每个定理都是一个重言式 $\diamondsuit$

证

(对构成 $\mathscr{A}$ 在 L 中证明的公式序列中公式的数目进行归纳)
令 $\mathscr{A}$ 是一个定理

(1) 若 $\mathscr{A}$ 的证明仅有一步，则 $\mathscr{A}$ 一定是公理，易证公理都是重言式
(2) 设 $\mathscr{A}$ 的证明有 n $(n > 1)$ 步，假设 $\mathscr{C}$ 的证明少于 n 步，则 $\mathscr{C}$ 是重言式。若 $\mathscr{A}$ 是公理，则 $\mathscr{A}$ 是重言式；若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的两项公式 $\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 应用 MP 而得，由归纳假设可知， $\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 都是重言式，进一步，由 命题 1.21 知， $\mathscr{A}$ 是重言式

$\square$

作为推论，可靠性定理：若 $\vdash \mathscr{A}$，则 $\models \mathscr{A}$

定义 2.26 (扩充)

L 的一个扩充（extension）是通过修改或扩大的公理组使得 L 的所有定理仍是定理（可能引入新的定理）而得的一个形式系统 $\diamondsuit$

注

L 的一个扩充可能和 L 没有公共的公理

定义 2.27

L 的一个扩充是一致的，若不存在 L 的公式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是这个扩充的定理 $\diamondsuit$

命题 2.28 (一致性定理)

L 是一致的 $\diamondsuit$

证

设 L 是不一致的，则存在 L 的公式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是 L 的定理。由可靠性定理知，$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是重言式，这是不可能的 $\square$

注

- L 的一致性是绝对一致性（即在 L 内具有一致性）
- 一致性是数学基础的核心问题，逻辑之外（上）的数学是否具有一致性？(Hilbert 规划的核心问题)

命题 2.29

L 的一个扩充 L^* 是一致的，当且仅当存在一个公式，它不是 L^* 的定理
$\diamondsuit$

证

$(\Rightarrow)$ L^* 是一致的，则对任意公式 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$，二者之一必不是 L^* 的定理

$(\Leftarrow)$ 设 L^* 是不一致的，证明不存在不是 L^* 的定理的公式

令 $\mathscr{A}$ 是 L^* 的任一公式，L^* 是不一致的，则存在公式 $\mathscr{B}$，使得 $\vdash_{L^*}\mathscr{B}$ 且 $\vdash_{L^*}\sim\mathscr{B}$，由命题 2.12，$\vdash_L\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$，由于 L^* 是 L 的一个扩充，因此 $\vdash_{L^*}\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$，应用 MP，得 $\vdash_{L^*}\mathscr{A}$，这样，每个公式都是 L^* 的定理 $\square$

注

- 在一个 L 的不一致扩充中，任何公式都是定理，在经典逻辑和数学中没有任何价值；
- L 扩充一致性的充分条件相当弱
- $(\Leftarrow)$ 证法体现了换位律，如 $\vdash(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})\rightarrow(\sim\mathscr{B}\rightarrow\sim\mathscr{A})$ $(L3)$

命题 2.30

令 L^* 是 L 的一个一致扩充，$\mathscr{A}$ 是 L 的一个公式且不是 L^* 的定理，则 L^{**} 也是一致的，这里 L^{**} 是 L 的一个扩充，它由 L^* 补充 $\sim\mathscr{A}$ 为公理而得 $\diamondsuit$

证

设若 L^{**} 不一致，则存在公式 $\mathscr{B}$，使得 $\vdash_{L^{**}}\mathscr{B}$ 且 $\vdash_{L^{**}}\sim\mathscr{B}$，如命题 2.29 所证，可得 $\vdash_{L^{**}}\mathscr{A}$

由于 L^{**} 是在 L^* 中补充 $\sim\mathscr{A}$ 作为公理，$\vdash_{L^{**}}\mathscr{A}$ 即是 $\sim\mathscr{A}\vdash_{L^*}\mathscr{A}$，由演绎定理，$\vdash_{L^*}\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}$

据 命题 2.12，$\vdash_L(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$，所以 $\vdash_{L^*}(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$，应用 MP，可得 $\vdash_{L^*}\mathscr{A}$，这和 $\mathscr{A}$ 不是 L^* 的定理相矛盾 $\square$

定义 2.31

L 的一个扩充是完全的，若对每个公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或 $\sim\mathscr{A}$ 是该扩充的定理 $\diamondsuit$

注

1. 这是认识论意义上的完全，区别于针对 L 的完全性（定理）
2. 一个系统若是完全的，则任何命题 $\mathscr{A}$ 都不独立于该系统
   （具有独立性意味该系统不完全）
3. L 不是完全的
   （如对公式 p_1，没有 $\vdash_L p_1$ 或 $\vdash_L \sim p_1$）
4. 任何 L 的不一致扩充是完全的
   （因平凡性）
5. 若 L^c 是 L 的一个一致的完全扩充，则任何一个 L 的进一步的扩充，只要它的定理类对 L^c 的定理类有所扩充，都将是不一致的
   （这样，一致完全扩充相当于极大一致的扩充）

命题 2.32

令 L^* 是 L 的一致扩充，则存在 L^* 的一个一致完全扩充 $\diamondsuit$

证

令 $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots$ 是 L 的所有公式的枚举

构造 L^* 的扩充序列 $\mathscr{J}_0, \mathscr{J}_1, \mathscr{J}_2, \cdots$ 如下

令 $\mathscr{J}_0 = L^*$

若 $\vdash_{\mathscr{J}_0} \mathscr{A}_0$，则令 $\mathscr{J}_1 = \mathscr{J}_0$；

否则把 $\sim\mathscr{A}_0$ 作为一个新公理加进 $\mathscr{J}_0$ 得到 $\mathscr{J}_1$

一般地，对 $n \geq 1$，从 $\mathscr{J}_{n\text{-}1}$ 构造 $\mathscr{J}_n$ 的方法如下

若 $\vdash_{\mathscr{J}_{n\text{-}1}} \mathscr{A}_{n\text{-}1}$，则 $\mathscr{J}_n = \mathscr{J}_{n\text{-}1}$；

否则把 $\sim\mathscr{A}_{n\text{-}1}$ 作为一个新公理加进 $\mathscr{J}_{n\text{-}1}$ 得到 $\mathscr{J}_n$

据 命题 2.30，每个 $\mathscr{J}_n$ 都是一致的 $(n \geq 0)$

定义 $\mathscr{J}$ 是 L 的扩充：

它把至少在这些 $\mathscr{J}_n$ 之一中为公理的一切公式都当作公理

证（续）

断言 $\mathscr{J}$ 是一致的

设若不然，则存在公式 $\mathscr{A}$，使得 $\vdash_{\mathscr{J}} \mathscr{A}$ 且 $\vdash_{\mathscr{J}} \sim\mathscr{A}$。必然存在 n，使得出现在 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 于 $\mathscr{J}$ 的证明中的公理都作为 $\mathscr{J}_n$ 的公理，就有 $\vdash_{\mathscr{J}_n} \mathscr{A}$ 且 $\vdash_{\mathscr{J}_n} \sim\mathscr{A}$，这与 $\mathscr{J}_n$ 是一致的相矛盾

断言 $\mathscr{J}$ 是完全的

令 $\mathscr{A}$ 是 L 的一个公式，则 $\mathscr{A}$ 一定在序列 $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots$ 中出现，不妨设 $\mathscr{A}$ 就是 $\mathscr{A}_k$，若 $\vdash_{\mathscr{J}_k} \mathscr{A}_k$，则 $\vdash_{\mathscr{J}} \mathscr{A}_k$；否则，$\sim\mathscr{A}_k$ 是 $\mathscr{J}_{k+1}$ 的一条公理，所以 $\vdash_{\mathscr{J}_{k+1}} \sim\mathscr{A}_k$，亦有 $\vdash_{\mathscr{J}} \sim\mathscr{A}_k$。总之，有 $\vdash_{\mathscr{J}} \mathscr{A}$ 或 $\vdash_{\mathscr{J}} \sim\mathscr{A}$，即 $\mathscr{J}$ 是完全的 $\square$

命题 2.33

若 L^* 是 L 的一个一致扩充，则存在一个赋值，使得 L^* 的每个定理取值都为 T $\diamondsuit$

证

定义 L 中公式的赋值 v 如下：$\mathscr{J}$ 是 L^* 的一致完全扩充（命题 2.32）

$$v(\mathscr{A}) = T,\ \text{若} \vdash_{\mathscr{J}} \mathscr{A};$$

$$v(\mathscr{A}) = F,\ \text{若} \vdash_{\mathscr{J}} \sim\mathscr{A}$$

因 $\mathscr{J}$ 是完全的 $\Rightarrow$ v 定义在所有公式上

且 $\mathscr{J}$ 是一致的 $\Rightarrow$ $v(\mathscr{A}) \neq v(\sim\mathscr{A})$

证（续）

进一步，需证 $v(\mathscr{A}\to\mathscr{B})=F$ 当且仅当 $v(\mathscr{A})=T$ 且 $v(\mathscr{B})=F$

假定 $v(\mathscr{A})=T$，$v(\mathscr{B})=F$ 但 $v(\mathscr{A}\to\mathscr{B})=T$，则有 $\vdash_{\mathscr{J}}\mathscr{A}$，$\vdash_{\mathscr{J}}\sim\mathscr{B}$ 和 $\vdash_{\mathscr{J}}\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，应用 MP 可得 $\vdash_{\mathscr{J}}\mathscr{B}$，这和 $\mathscr{J}$ 是一致的相矛盾

反之，假定 $v(\mathscr{A}\to\mathscr{B})=F$ 但 $v(\mathscr{A})=F$（分别 $v(\mathscr{B})=T$），则有 $\vdash_{\mathscr{J}}\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ 和 $\vdash_{\mathscr{J}}\sim\mathscr{A}$（分别 $\vdash_{\mathscr{J}}\mathscr{B}$），因有

$$\vdash_{\mathscr{J}}\sim\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A})\ (\text{分别}\ \vdash_{\mathscr{J}}\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$$

应用 MP，得到 $\vdash_{\mathscr{J}}\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，这与 $\mathscr{J}$ 是一致的相矛盾

故 $v(\mathscr{A}\to\mathscr{B})=F$ 蕴涵 $v(\mathscr{A})=T$，$v(\mathscr{B})=F$

这样，v 是一个赋值。令 $\vdash_{L^*}\mathscr{A}$，则 $\vdash_{\mathscr{J}}\mathscr{A}$，因此 $v(\mathscr{A})=T$ $\square$

命题 2.34 (完全性定理)

若 $\mathscr{A}$ 是一个公式且是重言式，则 $\vdash_L \mathscr{A}$ $\diamond$

证

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式且是重言式，设若 $\mathscr{A}$ 不是 L 的定理，据 命题 2.30，包含 $\sim\mathscr{A}$ 作为一条公理的扩充 L^* 是一致的。这样，存在一个赋值 v，赋予 L^* 的每个定理的值为 T，特别地，$v(\sim\mathscr{A}) = T$，这与 $\mathscr{A}$ 是重言式相矛盾 $\square$

作为推论，完全性定理：若 $\models \mathscr{A}$，则 $\vdash \mathscr{A}$

可靠与完全性定理： $\vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\models \mathscr{A}$

注

设计一个完全的公理系统是不简单的，在完全性证明中所需的演算能力可作为设计的技术途径之一

命题 2.35 (可判定性定理)

L 是可判定的 (decidable)，即存在一种能行的方法去判定 L 中给定的公式是否为定理 $\diamondsuit$

证

欲判定一个公式 $\mathscr{A}$ 是否为 L 的定理，只需把它看作一个命题形式而构造它的真值表，它是定理当且仅当它是重言式 $\square$

命题逻辑的作用

- 逻辑演算（一阶逻辑）是数理逻辑基础，命题逻辑（演算）是一阶逻辑基础
- 命题逻辑虽是可判定的，但判定一个命题公式是否可满足（SAT）问题是难解的，当今最难的计算机科学和数学问题之一
- 命题逻辑对应于布尔代数
- 命题逻辑是（数字）逻辑电路（大规模集成电路）和关系数据库（关系代数）的基础（一定意义上等价）
- 人工神经网络（深度学习）感知机（神经元学习）对应于命题逻辑
- 如搜索引擎（高级搜索）尚不能处理命题逻辑所表达的查询

线路模型 *

- 比特（bit）作为信息单位是一个二值（二进制）变量，取值为 1（T）或 0（F）
- 一个线路（电路）由导线和门（gate）组成，每条线路携带一个比特的信息，门对这些比特进行（逻辑）操作
- 对应于（逻辑）连接符非、与、或，与非、或非，异或分别称为非门、与门、或门、与非门、或非门、异或门 $\Leftarrow$ 二进制运算

  例：一个小于 2^n 的数 N 可写成 $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k$，$a_k \in \{1, 0\}$ 可等价地写成 $N = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0$
- 一个数字设备（如计算机）的输入和输出都以 1 和 0 的序列形式

注

线路模型 $\Rightarrow$ 数字逻辑电路（由逻辑门组成部件，如寄存器和加法器等）$\Rightarrow$ 集成电路（IC）$\Rightarrow$（数字）计算机

线路计算模型 *

- 定义复制门（fanout）如：$p \mapsto (p, p)$，交换门（crossover）如：$(p, q) \mapsto (q, p)$
- 基本逻辑门：非门、与门、或门和复制门

命题

由基本逻辑门可构造任意 Bool 函数 f:

$$f: \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}^m$$

即由基本逻辑门构成逻辑门的通用集

证

(梗概) m 个比特所表示的函数等价于 m 个单比特函数，进而可表为析取式（或门，类似范式的做法），注意这里需要用到复制门操作 □

- 与非门和复制门是更小的通用集
- 可证：线路计算模型 = Turing 机（计算模型）

命题 2.36

令 $\mathscr{B}$ 是一个公式，$p_1, \cdots, p_k$ 是 $\mathscr{B}$ 中出现的所有变元。对一个给定的赋值 v，若 $v(p_i) = T$ 令 p_i' 为 p_i，若 $v(p_i) = F$ 令 p_i' 为 $\sim p_i$；

若 $v(\mathscr{B}) = T$ 令 $\mathscr{B}'$ 为 $\mathscr{B}$，若 $v(\mathscr{B}) = F$ 令 $\mathscr{B}'$ 为 $\sim\mathscr{B}$。

则 $p_1', \cdots, p_k' \vdash \mathscr{B}'$

证

用以下定理可证

$\mathscr{B} \to \sim\sim\mathscr{B}$

$\sim\mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$

$\mathscr{B} \to (\sim\mathscr{C} \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$

$(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to ((\sim\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \mathscr{C})$ □

完全性定理证明（Kalmár 1935）

证

令 $\mathscr{B}$ 是一个重言式（即 $\models \mathscr{B}$），$p_1, \cdots, p_k$ 是 $\mathscr{B}$ 中出现的所有变元。

据命题 2.36，$p_1', \cdots, p_k' \vdash \mathscr{B}$（因 $v(\mathscr{B}) = T$）。

当 $v(p_k) = T$ 有 $p_1', \cdots, p_{k\text{-}1}', p_k \vdash \mathscr{B}$，

当 $v(p_k) = F$ 有 $p_1', \cdots, p_{k\text{-}1}', \sim p_k \vdash \mathscr{B}$，据演绎定理，

有 $p_1', \cdots, p_{k\text{-}1}' \vdash p_k \rightarrow \mathscr{B}$，$p_1', \cdots, p_{k\text{-}1}' \vdash \sim p_k \rightarrow \mathscr{B}$。由重言式 $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}) \rightarrow ((\sim \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}) \rightarrow \mathscr{C})$ 和 MP，得 $p_1', \cdots, p_{k\text{-}1}' \vdash \mathscr{B}$，同理可消去 $p_{k\text{-}1}'$，重复 k 步终得 $\vdash \mathscr{B}$ $\square$

注

Kalmár 证法直接简单，但只能证明命题逻辑完全性定理

附：直觉主义（命题）逻辑 *

(I1) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

(I2) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$

(I3) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{A}$

(I4) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$

(I5) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}))$

(I6) $\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$

(I7) $\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$

(I8) $(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \to \mathscr{C}))$

(I9) $(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \to \mathscr{C}))$

(I10) $\perp \to \mathscr{A}$

规则：MP

注

- 与基于 $\sim,\rightarrow,\wedge,\vee$ 的（经典）公理系统比较，直觉主义（命题）逻辑 $\mathscr{I}$ 用 (I10) 取代 (L3)，具有对直觉语义的完全性定理
- $\bot$ 是一个命题常元解释为假（类似地，可用命题常元 $\top$ 解释为真），否定符可引入

(I11) $(\mathscr{A}\rightarrow\bot)\rightarrow\sim\mathscr{A}$

(I12) $\sim\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\bot)$

- 排中律 $\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{I}$ 中不成立，即 $\nvdash_{\mathscr{I}}\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{A}$
- 真值不是（客观）存在性的，而是直觉（作为数学家心智活动）可构造的
- 直觉主义逻辑是可构造性数学的哲学
- （主流）数学基于形式主义（结构主义）的数学哲学，但代数几何 Topos 论（对集范畴）与直觉主义（类型论）直接相关