数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

4 命题逻辑 IV

4.1

证明 L 的每条公理（模式）是重言式。

4.2

令 $\mathscr{A}$ 是一个 L 的公式，令 L^+ 是一个通过增加 $\mathscr{A}$ 作为新公理的 L 的扩充。

(a) 证明 L^+ 的定理集与 L 的定理集不同，当且仅当 $\mathscr{A}$ 不是 L 的定理。

(b) 设 $\mathscr{A}$ 为 $(\sim p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \sim p_2)$，证明 L^+ 的定理集包含 L 的定理集；试问 L^+ 是否 L 的一致扩充？

4.3

证明：若 $\mathscr{B}$ 是一个矛盾，则 $\mathscr{B}$ 不能是任何 L 的一致扩充的定理。

4.4

令 J 是 L 的一致完全扩充，$\mathscr{A}$ 是 L 的公式。证明：通过把 $\mathscr{A}$ 作为补充公理获得的 J 的扩充是一致的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是一个 J 的定理。

4.5

pq 系统有三个不同的符号：

- 字母 p、q 和短杠 -。

pq 系统有无穷多条公理，公理模式定义如下：

- 只要 x 仅由一串短杠组成，那么 x - qxp- 就是一条公理，这里 x 代表短杠。

试给出若干条（至少一条）*pq* 系统的公理。

pq 系统只有一条规则：

- 假设 *x*、*y* 和 *z* 都代表只包含短杠的特定的符号串，并且假设 *xqypz* 是一条已知的定理，那么 *x* - *qypz*- 就是一条定理。

试给出若干个（至少一个）由这规则能生成的推理的例子，并为 *pq* 系统的定理找出一个判定过程。

pq 定理很像是加法，例如，- - - - -*q* - -*p* - -- 这个符号串是一条定理，因为 5 等于 2 加 3。若以此同构作为 *pq* 系统的解释（模型），试问 *pq* 系统是否完全？