数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

2 命题逻辑：语法

- 形式系统

形式系统

回顾

$\Gamma \models \mathscr{A}$

- 如何从稻草堆中找出针？
- $\models$ 保证一致性？

（逻辑）演算

形式（演绎）系统（符号演算，calculus）指使用符号，并且有关符号的一切行为和性质完全由给定的规则集来确定，而不依赖于符号特定的意义和具体的性质

形式系统 L 是命题（逻辑）演算

PL 在命题语言 $\mathscr{L}_0$ 基础上形式化演绎推理（证明）

形式系统

描述一个形式系统，需要

- 形式语言：对命题演算形式即 $\mathscr{L}_0$
  (1) 一个字符（symbol）表；
  (2) 一个由字符组成的有限字符串（称之（合式）公式，well-formed formulas，简写 wf(s) 或 wff(s)）集
- 公理（axioms）：规定一组合式公式
- 有限个演绎（推理）规则（rule）集：这些规则把一个合式公式 $\mathscr{A}$ 作为某些合式公式 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 的直接后承（consequence）而推出

定义 2.1 (命题语言 $\mathscr{L}_0$)

$\mathscr{L}_0$ 组成如下：

- 一个（能枚举无穷的）字符（符号）集

  $\sim$, $\rightarrow$, (,), p_1, p_2, $p_3, \cdots$

- 一个合式公式（简称公式，well-formed formulas (wfs)）集，归纳定义如下

  (1) 对每个 $i \geq 1$，p_i 是公式

  (2) 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式，则 $(\sim\mathscr{A})$ 和 $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ 也是公式

  (3) 所有公式都由 (1) 和 (2) 生成 ◇

注

- $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 称为命题变元（简称变元），可能无穷，因有限变元不足于组成任意长的公式，但只需能枚举（可列、可数）
- 技术性符号：“(”，“,”，“)”，可引入其它技术性符号，如“$\cdots$”；技术性符号不是必要的

定义 2.2 (形式系统 L)

命题演算形式系统 L：在 $\mathscr{L}_0$ 上，对任意公式 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$，规定如下

- 一组公理：通过三个公理模式（schema）来刻画，对任何公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，下列公式是 L 的公理

(L1) $(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ （后件确定）

(L2) $((\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))\to((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})))$ （隐含分配）

(L3) $(((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B}))\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ （前后换位）

- 演绎规则：分离规则 MP

(R) 若 $\mathscr{A}$，$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，则（推出）$\mathscr{B}$

即 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 和 $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ 的直接后承

$\diamondsuit$

注（公理模式）

记 $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 表示对公式 $\mathscr{A}$ 中变元 p_i 分别用公式 $\mathscr{A}_i$ $(1 \le i \le n)$ 替换（任意次出现）得到的公式

替换规则

若 $\mathscr{A}$，且 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为变元，则 $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$

若增加替换规则，则不需使用公理模式，即 (L1-3) 中公式可写成变元

注

- 公式对应命题形式
- 连接符 $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$ 不在 $\mathscr{L}_0$ 中，由于 $\{\sim, \rightarrow\}$ 是一个连接符的完备集，因此 $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$ 可作为定义缩写引入，包含 $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$ 的公式可由 L 的等价式表达
- 公理是有效的命题形式，可有不同的公理系统，不同的连接符完备集有不同的公理

公理化方法

- 形式系统 L 是一个公理系统
  - 公理是没有经过证明，但被当作不证自明的命题
  - 其真实性被视为理所当然的，当做演绎起点（证明的因果关系不能无限地追溯而需止于无需证明的公理）
  - 通常很简单，且符合直觉
- 公理系统是一种证明论（proof theory），证明论还有其它系统（等价于公理系统）
- Euclid（平面）几何公理是第一个公理系统，非欧几何是另一个公理系统
- Hilbert 首先给出 Euclid 几何的形式系统（完全的几何公理系统）

几何公理系统

- Euclid 几何公设

1. 一条直线段可以联接两个点
2. 一条直线上任何一条直线段可以无限延伸
3. 给定一条直线段，可以以一个端点为圆心，以此线段为半径做一个圆
4. 一切直角都彼此相等
5. 如果两条直线与第三条直线相交时，在第三条直线的某一侧三条线所夹的内角之和小于两个直角的和，则那两条直线沿着这一侧延伸足够长之后必然相交

   — 给定任一直线和不在直线上的一点，存在有一条，且仅仅存在一条通过那个点，且永不与前一条直线相交的直线，无论两直线延伸多远

几何公理系统（续）

- 非 Euclid 几何：第五公设（平行公设）
  - 若断言没有这样的直线存在，则是椭圆几何
  - 若断言至少有两条这种直线存在，则是双曲几何
- 1823 年，Bolyai 和 Lobachevskii 独立发现
  论证：若你设定它的反面，然后以这样一条公设作为你的第五公设开始推演几何学，肯定不久之后你会制造出矛盾。因为没有任何数学系统能支持矛盾，你就表明了你自己的那个第五公设是不可靠的，于是表明了 Euclid 的第五公设是可靠的

注

- 第五条公设是不可判定的
- 绝对几何学的四条公设没有固定住“点”和“线”这些术语的意义，从而为这些概念具有不同外延留下了余地。两千年来，使用先入为主的词“点”和“线”则使人相信那些词必须是单值的，只能有一个意义

定义 2.3 (证明)

形式系统 L 中的一个（形式）证明（proof）是指一个公式序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$，使得对每个 $i (1 \leq i \leq n)$，$\mathscr{A}_i$ 或是 L 中的一个公理，或可由此序列中位于前面的两个公式 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ $(j < i, k < i)$，作为应用分离规则 MP 的直接后承而得，称为在 L 中 $\mathscr{A}_n$ 的一个证明，$\mathscr{A}_n$ 称为 L 的一条定理（theorem），亦称 $\mathscr{A}_n$ 可证 $\diamond$

注

(1) $\mathscr{A}_i$ 若由 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ 作为应用 MP 的后承而得，则 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ 必是形如 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B} \to \mathscr{A}_i$

(2) 若 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 是 L 中的一个证明，则对 $k < n$，$\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_k$ 也是 L 中的一个证明，因此 $\mathscr{A}_k$ 也是 L 中的一条定理（可作为引理）;

(3) L 中的公理也是 L 中的定理，它们在 L 中的证明是只含有一项的序列

(4) 不可证性：若不存在一个公式序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$，使得 $\mathscr{A}_n$ 可证

例 2.4

以下公式系列是一个 L 中的证明

$$(1)\ (p_1 \to (p_2 \to p_1)) \qquad \text{(L1)}$$

$$(2)\ ((p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))) \qquad \text{(L2)}$$

$$(3)\ ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1) \qquad \text{(1)(2)MP}$$

$((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$ 是一个 L 的定理

注

以上证明形式：左边是序号，中间是证明，右边是理由

定义 2.5

令 Γ 是 L 中的公式集。L 中的公式序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 是从 Γ 的一个演绎，若对每个 $i(1 \leq i \leq n)$，下列之一成立：

(1) $\mathscr{A}_i$ 是 L 的公理；

(2) $\mathscr{A}_i$ 属于 Γ（$A_i \in \Gamma$）；

(3) $\mathscr{A}_i$ 可由此序列中位于前面的两个公式 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ $(j < i, k < i)$，作为应用 MP 的直接后承而得

$\mathscr{A}_n$ 称为从 Γ 可演绎的，或称为 L 中 Γ 的一个后承，若公式 $\mathscr{A}$ 是 Γ 的某个演绎的最后一项，亦称 Γ 产生了（推出）$\mathscr{A}$，记作 $\Gamma \vdash_L \mathscr{A}$（简记 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$） $\Diamond$

注

证明或演绎的序列中每一步 $\mathscr{A}_i$（$1 \geq i \leq n$）都有正当理由 (justification，依据)，应加以说明

记号

- 由于 L 中的一条定理是从空集可演绎的，若 $\mathscr{A}$ 是 L 中的一条定理，可记作 $\varnothing \vdash_L \mathscr{A}$，简记 $\vdash_L \mathscr{A}$ 或 $\vdash \mathscr{A}$
- 记 $\Gamma \nvdash \mathscr{A}$ 表 $\mathscr{A}$ 不可从 Γ 演绎，$\nvdash \mathscr{A}$ 表 $\mathscr{A}$ 不是定理（不可证）

注（演绎逻辑）

- L 中的证明是从公理出发的一个演绎
- 演绎逻辑意味所有（无穷）结论（定理）都蕴藏在前提（公理）中，演绎过程只是把结论找出来，某种意义上，演绎并不发现新（未知）知识

  —如数学，找出定理也是很有意义的

元语言

$\vdash$ 不是 L 中的一个符号，而是元语言（meta-language）符号，即关于形式语言 L 的语言（自然语言 + 符号 = 数学语言）

L 称为对象语言

类似地，可有元元语言等

元定理意指关于（对象语言）形式系统的结果，如"命题"、"$\vdash_L$"等

注

定理（定义 2.3）与数学语言中定理的区别：数学中定理是有关某种事实的陈述为（语义上）真理，数学中对定理（真理）的证明是非形式化的（不严格）；定义 2.3 的证明指形式（化）证明，所得为定理（严格）

例 2.6

在 L 中构造 $\{\mathscr{A}, (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))\} \vdash_L (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ 的一个演绎，其中 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ 是 L 中的任何公式

(1) $\mathscr{A}$	假设
(2) $(\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$	假设
(3) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$	(L1)
(4) $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$	(1)(3)MP
(5) $((\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})))$	(L2)
(6) $((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$	(2)(5)MP
(7) $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$	(4)(6)MP

注

1. 一个公式集，写如 $\{\mathscr{A}, (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))\}$，或 $\mathscr{A}, (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$
2. 在 L 中证明一个公式是定理的方法是构造证明的一个公式序列。在一定程度上这种方法比较冗长
3. 在证明中允许插入前面已经在 L 中证明过的公式（作为引理），可使定理证明较为容易
4. 使用某些一般的元定理，其中有些具有推理规则的效果
5. 构造 L 中定理的证明是基本的命题演算能力，必须写清楚证明步骤的理由

斜形证明

(1) $\mathscr{A}$

(2) $(\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$

(3) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

(4) $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ (1)(3)MP

(5) $((\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})))$

(6) $((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$ (2)(5)MP

(7) $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ (4)(6)MP

注

斜形证明是形式证明的一种较方便写法

(1) $\mathscr{A}_1$

(2) $\mathscr{A}_2$

(3) $\mathscr{A}_3$

(4) $\qquad \mathscr{B}_1$

(5) $\qquad \mathscr{B}_2$

(6) $\qquad\qquad \mathscr{C}_1$

(7) $\mathscr{D}$

$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3 \vdash \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2; \qquad \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \vdash \mathscr{C}_1$

$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3; \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2; \mathscr{C}_1 \vdash \mathscr{D}$

例 2.7

对（ L 中）任意公式 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$,

(a) $\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

(b) $\vdash \sim\mathscr{B} \to \cdot \mathscr{B} \to \mathscr{A}$

例 2.7 (a)

$$(1)\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})) \to ((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \qquad \text{(L2)}$$

$$(2)\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}) \qquad \text{(L1)}$$

$$(3) \quad (\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \qquad \text{(1)(2)MP}$$

$$(4) \quad \mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \qquad \text{(L1)}$$

$$(5) \quad \mathscr{A} \to \mathscr{A} \qquad \text{(3)(4)MP}$$

例 2.7 (b)

(1) $\sim\mathscr{B}\to\cdot\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}$

(2) $\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}\to\cdot\mathscr{B}\to\mathscr{A}$

(3) $(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to\cdot\sim\mathscr{B}\to((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$

(4) $\sim\mathscr{B}\to((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ (2)(3)MP

(5) $\sim\mathscr{B}\to((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))\to\cdot$

$(\sim\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}))\to(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$

(6) $\sim\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to\cdot\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$ (4)(5)MP

(7) $\sim\mathscr{B}\to\cdot\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ (1)(6)MP

命题 2.8 (演绎定理)

若 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L \mathscr{B}$，则 $\Gamma\vdash_L (\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 L 中的公式，Γ 是 L 中的公式集（可为空） ♢

证

（结构归纳）对从 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{B}$ 的演绎序列中公式的数目做归纳
假定这个序列只有一个公式，则此公式就是 $\mathscr{B}$

1. $\mathscr{B}$ 是公理，则

(1)	$\mathscr{B}$	公理
(2)	$(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$	(L1)
(3)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	(1)(2)MP

为从 Γ 到 $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ 的一个演绎，即 $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$

2. $\mathscr{B}$ 属于 Γ，则

(1)	$\mathscr{B}$	Γ 的成员
(2)	$(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$	(L1)
(3)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	(1)(2)MP

证 (续)

3. $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$，则

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})) & \\
 & \quad \to ((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) & \text{(L2)} \\
(2) & (\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})) & \text{(L1)} \\
(3) & ((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) & \text{(1)(2)MP} \\
(4) & (\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) & \text{(L1)} \\
(5) & (\mathscr{A} \to \mathscr{A}) & \text{(3)(4)MP}
\end{array}
$$

为 L 中的一个证明，即 $\vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{A})$，亦即由 Γ 到 $(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ 的一个演绎，$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

证 (续)

设对从 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{C}$ 的演绎序列长度小于 $n\ (n > 1)$ 的所有公式 $\mathscr{C}$，要证明的结论都成立，考虑从 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{B}$ 的演绎序列长度为 n，则

1. $\mathscr{B}$ 是公理
2. $\mathscr{B}$ 属于 Γ
3. $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$

这三种情况与前面类似

证（续）

4. $\mathscr{B}$ 由演绎中较前两个公式应用 MP 而得, 则这两个公式必为 $\mathscr{C}$ 和 $(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ 的形式，就有

$$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$$

和

$$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B}))$$

证（续）

不妨设

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \cdots \\ \\ \quad\cdots \\ \\ (k)\ (\mathscr{A}\to\mathscr{C})\end{array}\right\}\text{为从}\Gamma\text{到}(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\text{的演绎，}$$

$$\left.\begin{array}{l}(k+1)\ \cdots \\ \\ \quad\cdots \\ \\ (l)\ (\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))\end{array}\right\}\text{为从}\Gamma\text{到}(\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))\text{的演绎，}$$

证（续）

$$
\begin{array}{ll}
(l+1)\ (\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))\to & \\
\qquad((\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})) & \text{(L2)} \\
(l+2)\ (\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}) & (l)(l+1)\text{MP} \\
(l+3)\ (\mathscr{A}\to\mathscr{B}) & (k)(l+2)\text{MP}
\end{array}
$$

从 (1) 到 $(l+3)$ 为从 Γ 到 $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ 的一个演绎，

故 $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ □

命题 2.9 (演绎定理的逆)

若 $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，则 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$，其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 L 中的公式，Γ 是 L 中的公式集（可为空） ♢

证

若 $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，则存在从 Γ 到 $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 的演绎，不妨设

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \cdots \\ & \cdots \\ (k) & (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \end{array}\right\} \text{为从}\,\Gamma\,\text{到}\,(\mathscr{A} \to \mathscr{B})\,\text{的演绎,}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1) & \mathscr{A} & \Gamma \cup \{\mathscr{A}\}\text{的成员} \\ (k+2) & \mathscr{B} & (k)(k+1)\mathrm{MP} \end{array}$$

为从 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{B}$ 的演绎，故 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$ □

推论 2.10 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$，当且仅当 $\Gamma \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ $\Diamond$

演绎定理的应用

推论 2.11

对任何公式 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$，有

$$\mathscr{A}\to\mathscr{B},\mathscr{B}\to\mathscr{C}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C}$$

◇

证

$$\begin{array}{lll}
(1) & \mathscr{A}\to\mathscr{B} & \\
(2) & \mathscr{B}\to\mathscr{C} & \\
(3) & \qquad\mathscr{A} & \\
(4) & \qquad\mathscr{B} & (1)(3)\mathrm{MP} \\
(5) & \mathscr{C} & (2)(4)\mathrm{MP}
\end{array}$$

则 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\to\mathscr{C},\mathscr{A}\vdash\mathscr{C}$，由演绎定理知

$$\mathscr{A}\to\mathscr{B},\ \mathscr{B}\to\mathscr{C}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C}$$

□

注

$\mathscr{A}\to\mathscr{B},\mathscr{B}\to\mathscr{C}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 即假言三段论 HS，可作一条新的推理规则来使用

亦可得

$$\vdash_L (\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$$

命题 2.12

对任何公式 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$

(a) $\vdash \sim\mathscr{A} \to \mathscr{A} \to \cdot \mathscr{A}$

(a′) $\sim\mathscr{A}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$

(b) $\vdash \sim\mathscr{A} \to \cdot \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

(b′) $\vdash \sim\sim\mathscr{A} \to \cdot \sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}$

(b″) $\sim\mathscr{A}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ ♢

注

(a) 和 (b) 略有不同，证明过程和作为引理使用亦不同

证

(a)

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \sim\mathscr{A}\to\mathscr{A} & \\
(2) & \sim\mathscr{A}\to\cdot\sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A} & \\
(3) & \sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A}\to\cdot\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}) & \\
(4) & \sim\mathscr{A}\to\cdot\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}) & (2)(3)\mathrm{HS} \\
(5) & \sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\to\cdot & \\
 & (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})) & \\
(6) & \sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}\to\cdot\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}) & (4)(5)\mathrm{MP} \\
(7) & \sim\mathscr{A}\to\cdot\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}) & (1)(6)\mathrm{MP} \\
(8) & \sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\cdot & \\
 & (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A} & \\
(9) & \sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}\to\cdot\mathscr{A} & (7)(8)\mathrm{MP} \\
(10) & \mathscr{A} & (1)(9)\mathrm{MP}
\end{array}
$$

即 $\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}$，由演绎定理，亦即 $\vdash\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}\to\cdot\mathscr{A}$ □

证（续）

(b)（例 2.7 (b)，用 HS）

(1)	$\sim\mathscr{A}\to\cdot\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}$	(L1)
(2)	$\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}\to\cdot\mathscr{A}\to\mathscr{B}$	(L3)
(3)	$\sim\mathscr{A}\to\cdot\mathscr{A}\to\mathscr{B}$	(1)(2)HS

$\square$

简略证明

形式证明中，可省略指明替换、分离（MP）和演绎定理（依据）

例（例 2.7 / 命题 2.12(b)，用 HS）

$\vdash \sim\mathscr{A} \to \cdot\mathscr{A} \to \mathscr{B}$

证

(1)	$\sim\mathscr{A} \vdash \sim\mathscr{B} \to \sim A$	(L1)
(2)	$\sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(1)(L3)(HS)
	[$\vdash \sim\mathscr{A} \to \cdot\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(2)(演绎定理)]

最后一行可省略 □

例 2.13

对任何公式 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$

(a) $\vdash \sim\sim\mathscr{A} \to \mathscr{A}$

(a′) $\sim\sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$

(b) $\vdash \mathscr{A} \to \sim\sim\mathscr{A}$

(b′) $\mathscr{A} \vdash \sim\sim\mathscr{A}$

(c) $\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \cdot \sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}$

证

(a)

(1)	$\sim\sim\mathscr{A} \vdash \sim\sim\sim\sim\mathscr{A} \to \sim\sim\mathscr{A}$	(L1)
(2)	$\sim\sim\sim\sim\mathscr{A} \to \sim\sim\mathscr{A} \vdash \sim\mathscr{A} \to \sim\sim\sim\mathscr{A}$	(L3)
(3)	$\sim\sim\mathscr{A} \vdash \sim\mathscr{A} \to \sim\sim\sim\mathscr{A}$	(1)(2)(HS)
(4)	$\sim\sim\mathscr{A} \vdash \sim\sim\mathscr{A} \to \mathscr{A}$	(1)(L3)(HS)

(b)

(1)	$\sim\sim\sim\mathscr{A} \vdash \sim\mathscr{A}$	(a)(L3)

□

证

(c)

(1)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \sim\sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$	(a)
(2)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \sim\sim\mathscr{A} \vdash \sim\sim\mathscr{B}$	(b)(HS)
(3)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash \sim\sim\mathscr{A} \to \sim\sim\mathscr{B}$	(L3)(HS)

$\square$

其它连接符

其它连接符通过定义（作为缩写）引入

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \equiv \sim(\mathscr{A} \to \sim \mathscr{B})$$

$$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \equiv \sim \mathscr{A} \to \mathscr{B}$$

$$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \equiv (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$$

例 2.7 (b)

(b) $\vdash \sim\mathscr{B} \to \cdot \mathscr{B} \to \mathscr{A}$

(b′) $\vdash \sim \mathscr{B} \wedge \mathscr{B} \to \mathscr{A}$

(b″) $\vdash \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}$

注

1. 把定义的其它连接符还原为只含 $\sim, \to$ 进行演算
2. 依次展开含 5 个连接符的演算

例 2.14

$\mathscr{A} \to \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$

(1)	$\mathscr{A} \to \sim\sim\mathscr{A}$	例2.13(a)
(2)	$\sim\sim\mathscr{A} \to (\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	命题2.12(b$'$)
(3)	$\mathscr{A} \to (\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(1)(2)(HS)
(4)	$\mathscr{A} \to \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$	(3)定义

定义 2.15

- 令 Γ 是公式集，若存在某个公式 $\mathscr{A}$，使得 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ 和 $\Gamma \vdash \sim\mathscr{A}$，则称 Γ 是不一致的；否则，Γ 是一致的
- 令 Γ 是公式集，若一个公式 $\mathscr{A}$，使得 $\Gamma \nvdash \mathscr{A}$ 和 $\Gamma \nvdash \sim\mathscr{A}$，称 $\mathscr{A}$ 独立于 Γ
- 令 Γ 是公式集，$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是任何公式，若 $\{\mathscr{A}, \sim\mathscr{A}\} \subseteq \Gamma$，则 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$，称为平凡性（triviality）
- 令 Γ, Γ' 是公式集，$\Gamma \subseteq \Gamma'$，$\mathscr{A}$ 是任一公式，若 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ 则 $\Gamma' \vdash \mathscr{A}$，称为单调性（monotonicity）

$\diamondsuit$

命题 2.16

L 具有平凡性和单调性 $\diamondsuit$

证

显见（据定义） $\square$

命题 2.17

令 Γ 是公式集，Γ 是不一致的当且仅当对任何公式 $\mathscr{A}$，$\Gamma \vdash \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

显见（命题 2.12 (b)） $\square$

注

1. 不一致性会导致平凡性
2. 没有真值指派使不一致的公式集成真（不一致公式集没有模型）
3. 空（公式）集是一致的
4. 一致性：L 是一致的，即 $\nvdash_L \mathscr{A}$ 或 $\nvdash_L \sim\mathscr{A}$，但需要证明。如何证？
5. 独立性：$\mathscr{A}$ 独立于 Γ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 和 $\Gamma \cup \{\sim\mathscr{A}\}$ 都是一致的
6. 一致性和独立性可看成某种关于不可证（$\nvdash$）的结果

注

1. 不一致的公式集是没意义的，但平凡性对数学是合理的，因数学的基础是保证一致性
2. 平凡性对数学之外则不合理

   如，一个银行信息系统若基于（命题）逻辑，平凡性意味由于数据库中一个矛盾记录会导致任何人取任意款
3. 平凡性是常见的（局部影响全局）

   如，一个操作系统可能由于一个程序出错导致整个系统崩溃（即其它无关的程序都不能运行）
4. 单调性亦然

   如，人在日常生活中的推理是非单调的

定义 2.18

一个（$\mathscr{L}_0$ 的）公式集 Γ 称为**极大一致**（maximally consistent，MC），若

- Γ 是一致的
- 不存在另一个一致的公式集 Γ' 使得 $\Gamma \subset \Gamma'$

令 Γ 是一个公式集，对每个 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，若 Γ' 是一致的且不存在另一个 $\Gamma'' \subset \Gamma$ 使得 $\Gamma' \subset \Gamma''$，则 Γ' 称为 Γ 的极大一致子集（MCS） $\diamondsuit$

命题 2.19

一个公式集 Γ 是极大一致的，当且仅当

(a) Γ 是一致的

(b) 对任一公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A} \in \Gamma$ 或 $\sim\mathscr{A} \in \Gamma$ $\diamondsuit$

证

$(\Rightarrow)$ 设 Γ 是极大一致的，则由定义，(a) 即成立

假若 $\mathscr{A} \notin \Gamma$ 且 $\sim\mathscr{A} \notin \Gamma$，则（由定义）

$\{\Gamma, \mathscr{A}\}$ 与 $\{\Gamma, \sim\mathscr{A}\}$ 都是不一致的，可证（由演算）

$\Gamma \vdash \sim\mathscr{A}$ 与 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$

这与 (a) 矛盾，故有 (b)

$(\Leftarrow)$ 反之亦然 $\square$

定义 2.20

令 Γ 为公式集，$\mathscr{A}$ 为任意公式。极大一致推理 $\vdash_{MCS}$ 定义如下：

$\Gamma \vdash_{MCS} \mathscr{A}$ 当且仅当 $MCS(\Gamma) \vdash \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

问题

MCS 具有有趣的性质

考虑：极大一致子集（MCS）推理是否具平凡性和单调性？

证明论 *

- 公理系统（Hilbert 型系统）
- 序列演算（Gentzen 型系统，自然推理系统）
- 表系统（Tableaux）
- 归结系统（Resolution）
- 等等

其它公理系统 *

等价的公理系统

(L1) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

(L2) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$

(L3) $(((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B}) \to ((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \mathscr{B}))) \to \mathscr{A}$

[(L3)] $(((\sim \mathscr{A}) \to (\sim B)) \to ((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B})) \to \mathscr{A}$

规则： MP

（以下公理系统的规则都是 MP）

基于 $\sim, \vee$ 的公理系统

$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} =_{def} \ \sim\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$

(L1) $(\mathscr{A} \vee \mathscr{A}) \rightarrow \mathscr{A}$

(L2) $\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$

(L3) $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \rightarrow (\mathscr{B} \vee \mathscr{A})$

(L4) $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}) \rightarrow ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \rightarrow (\mathscr{A} \vee \mathscr{C}))$

基于 $\sim, \wedge$ 的公理系统

$\mathscr{A} \to \mathscr{B} =_{def} \sim(\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B})$

(L1) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

(L2) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$

(L3) $((\sim\mathscr{A}) \to (\sim\mathscr{B})) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

(L4) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{A}$

(L5) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$

(L6) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}))$

其它基于 $\sim, \wedge$ 的公理系统

$\mathscr{A} \to \mathscr{B} =_{def} \sim(\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B})$

(L1) $\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \wedge \mathscr{A})$

(L2) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{A}$

(L3) $(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\sim(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \to (\sim(\mathscr{C} \wedge \mathscr{A}))$

基于 $\sim, \to, \wedge, \vee$ 的公理系统

(L1) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

(L2) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$

(L3) $((\sim\mathscr{A}) \to (\sim\mathscr{B})) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

(L4) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{A}$

(L5) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$

(L6) $(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$

(L7) $\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$

(L8) $\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$

(L9) $(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \to \mathscr{C}))$

一条公理的公理系统

基于 $\sim, \rightarrow$

$$\text{(L1)}\quad ((((\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})\rightarrow(\sim\mathscr{C}\rightarrow\sim\mathscr{A}))\rightarrow\sim\mathscr{C})\rightarrow\sim\mathscr{C})\rightarrow((\mathscr{D}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$$

基于 $|$

$$\text{(L1)}\quad (\mathscr{A}\mid(\mathscr{B}\mid\mathscr{C}))\mid\{[(\mathscr{D}\mid(\mathscr{D}\mid\mathscr{D})]\mid[(\mathscr{E}\mid\mathscr{B})\mid((\mathscr{A}\mid\mathscr{E})\mid(\mathscr{A}\mid\mathscr{E}))]\}$$

注

公理系统 L 和 L' 的等价性：由 L 推出 L' 的所有公理（即它们有相同的定理集），反之亦然；或由它们的完全性定理得知

公理的独立性 *

定义 2.21

一个公理系统的某个公理子集 Y（某条公理）称为独立 (independence)，若存在 Y 的公式（该条公理）不能从不属于 Y 的其它公理及规则证明出来

命题 2.22

公理（模式）(L1)，(L2)，(L3) 都是独立的

(L1) 是独立的

证

考虑如下（三值）真值表

A	$\sim A$	A	B	$A \to B$
0	1	0	0	0
1	1	1	0	2
2	0	2	0	0
		0	1	2
		1	1	2
		2	1	0
		0	2	2
		1	2	0
		2	2	0

若一个公式 $\mathscr{C}$ 总是取值为 0，称之可选（select）的。验证：(L2)，(L3) 是可选的，MP 保持可选性，因此任何由 (L2)，(L3) 和 MP 推出的公式都是可选的，但易见 (L1)（的实例）不是可选的，即 (L1) 不能从 (L2)，(L3) 和 MP 推出

注

- (L2)，(L3) 的独立性证明类似，设计相应的真值表
- 公理的独立性定理使得公理系统（数学）最为简洁（优美）
- 三值真值表可定义三值逻辑（连接词），可推广到（有限或无限）多值逻辑