

# 数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

## 3 命题逻辑 III

### 3.1

只用公理和分离规则，证明下列公式是定理：

(a)  $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((\sim p_1 \rightarrow \sim p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$

(b)  $((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$

(c)  $(p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$

### 3.2

证明下列各式成立： $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  为任意公式

(a)  $\sim \mathcal{A} \vdash_L \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

(b)  $\mathcal{A} \vdash_L \sim \sim \mathcal{A}$

(c)  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \sim(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \sim \mathcal{A} \vdash_L \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$

### 3.3

用演绎定理，对任意公式  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$ ，证明下列公式是定理：

(a)  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B})$

(b)  $((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$

### 3.4

在形式系统  $L$  中证明下面公式是定理：要求用  $L$  的两个连接符来定义  $\wedge$

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$$

### 3.5

令  $L'$  是通过把形式系统  $L$  中公理模式 (L3) 替换为如下的 (L3') 所得形式系统：

$$((\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow ((\sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}))$$

对任何公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ，证明：

$$(1) \vdash_L ((\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow ((\sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}))$$

$$(2) \vdash_{L'} ((\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$$

并证明若一个公式是  $L$  的定理当且仅当它是  $L'$  的定理。

### 3.6

什么是极大一致子集 (MCS)？定义极大一致推理  $\vdash_{MCS}$  如下： $\Gamma \vdash_{MCS} \mathcal{A}$  当且仅当对所有  $MCS(\Gamma)$ ， $MCS(\Gamma) \vdash \mathcal{A}$ ， $\Gamma$  为公式集， $\mathcal{A}$  为公式。试证明  $\vdash_{MCS}$  是否具有平凡性和单调性。