数理逻辑习题

北京大学 信息与计算科学系

3 命题逻辑 III

3.1

只用公理和分离规则，证明下列公式是定理：

(a) $(p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$

(b) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$

(c) $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$

3.2

证明下列各式成立：$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 为任意公式

(a) $\sim\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

(b) $\mathscr{A} \vdash_L \sim\sim\mathscr{A}$

(c) $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \sim\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{C}$

3.3

用演绎定理，对任意公式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，证明下列公式是定理：

(a) $(\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})$

(b) $((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$

3.4

在形式系统 L 中证明下面公式是定理：要求用 L 的两个连接符来定义 $\wedge$

$$\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}))$$

3.5

令 L' 是通过把形式系统 L 中公理模式 (L3) 替换为如下的 (L3′) 所得形式系统：

$$((\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to ((\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}))$$

对任何公式 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，证明：

(1) $\vdash_L ((\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to ((\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}))$

(2) $\vdash_{L'} ((\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

并证明若一个公式是 L 的定理当且仅当它是 L' 的定理。

3.6

什么是极大一致子集（MCS）？定义极大一致推理 $\vdash_{MCS}$ 如下：$\Gamma \vdash_{MCS} \mathscr{A}$ 当且仅当对所有 $MCS(\Gamma)$，$MCS(\Gamma) \vdash \mathscr{A}$，$\Gamma$ 为公式集，$\mathscr{A}$ 为公式。试证明 $\vdash_{MCS}$ 是否具有平凡性和单调性。