数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

1　命题逻辑：语义

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则
- 范式
- 连接符的完备集
- 推理及有效性

范式

回顾：命题形式与真值表

两个不同的命题形式可能是等价的，即一个命题形式可能有许多与之等价的命题形式。

- 对 n 元命题形式，有且仅有 2^{2^n} 种不同的真值表，互不等价的 n 元命题形式有且仅有 2^{2^n} 种。

任一命题形式都对应于一个真值表

任意给定一个真值表（或真值函数）亦可构造一个命题形式？

例 1.32

构造一个三元命题形式，使其真值表如下

T	T	T	T	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$
T	T	F	T	$(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))$
T	F	T	F	
T	F	F	F	
F	T	T	F	
F	T	F	F	
F	F	T	F	
F	F	F	T	$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$

构造的命题形式如下

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3) \vee (\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3)$$

定义 1.33 (基本合取式)

对三元真值函数，若 p_1，p_2，p_3 相应的真值组合为 FTF，则构造的合取命题形式为 $(\sim p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3)$，其真值为 T，而对其它的真值组合，其真值都为 F

称这样的合取命题形式为 基本合取式 或 短语（子句(clause)）

定义 1.34 (文字)

称一个文字（literal）是一个原子变元 p_i （正文字）或原子变元的否定式 $\sim p_i$ （负文字）

命题 1.35

任一真值函数 f 都对应于一个受限命题形式 $\mathscr{A}$，即可构造一个受限命题形式 $\mathscr{A}$，使其真值函数为 f $\diamondsuit$

证

设 f 是 n 元函数，$f\colon \{T,F\}^n \to \{T,F\}$，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 n 个变元

若对任意真值组合，f 的值都是 F，则只需构造如下的矛盾式即可

$$(\sim p_1 \wedge p_1) \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

(只需考虑非矛盾命题形式)

证（续）

若至少存在一组对 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的真值指派，使得 f 的值是 T，则按如下的方法构造一个关于 p_i 或 $\sim p_i$ $(1 \leq i \leq n)$ 的合取命题形式，其中 p_i 和 $\sim p_i$ 出现且仅出现其一

(1) 若对 p_i 的真值指派为 T，则 p_i 在此命题形式中出现

(2) 若对 p_i 的真值指派为 F，则 $\sim p_i$ 在此命题形式中出现

所得基本合取式相对此真值指派其真值为 T；而对其它的真值指派其真值都为 F

令 $\mathscr{A}$ 为所构造的所有基本合取式的析取，则 $\mathscr{A}$ 的真值函数为 f □

推论 1.36

任一非矛盾的命题形式都与一个形（式）为 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij})$ 的受限命题形式等价，其中 Q_{ij} 为文字，称为析取范式 DNF（Disjunctive Normal Form） ♢

证

据 命题 1.35，对给定的非矛盾的命题形式的真值函数构造析取范式即可 □

推论 1.37

任一非重言式的命题形式都与一个形为 $\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n} Q_{ij})$ 的受限命题形式等价，其中 Q_{ij} 为文字，称为合取范式 CNF（Conjunctive Normal Form）

$\diamondsuit$

证

设 $\mathscr{A}$ 是一个非重言式的命题形式，据 推论 1.36，对 $\sim\mathscr{A}$ ，有析取范式 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij})$

进一步， $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij})^*$ 与 $\sim(\sim\mathscr{A})$ 等价，而 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij})^*$ 就是 $\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n}(\sim Q_{ij}))$ $\square$

注

证明过程提供了求解一个命题形式的范式的方法

例 1.38

求与 $(\sim p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$ 等价的合取范式

$(((\sim$	$p_1)$	$\vee$	$p_2)$	$\rightarrow$	$p_3)$
F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F^*	F
F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	F^*	F
T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F^*	F

得到的合取范式为

$$((\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \sim p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3))$$

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则
- 范式
- 连接符的完备集
- 推理及有效性

连接符的完备集

真值函数和连接符

- 对 n 元真值函数：$\{1,0\}^n \mapsto \{1,0\}$（$2^{2^n}$ 个），原则上，每个真值函数都可定义一个连接符，通常选择常用或最少的连接符

定义 1.39

连接符的完备集 S 是指对任何真值函数都可用仅含 S 中连接符的命题形式来表示 $\diamondsuit$

注

由 命题 1.35 知，$\{\sim, \vee, \wedge\}$ 是一个连接符的完备集

命题 1.40

$\{\sim,\wedge\}$，$\{\sim,\vee\}$ 和 $\{\sim,\rightarrow\}$ 都是连接符的完备集 $\diamondsuit$

证

对任意两个命题形式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\equiv\sim(\sim\mathscr{A}\wedge\sim\mathscr{B})$，故 $\{\sim,\wedge\}$ 是连接符的完备集；$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\equiv\sim(\sim\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{B})$，故 $\{\sim,\vee\}$ 是连接符的完备集；$\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}\equiv\sim\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$，故 $\{\sim,\rightarrow\}$ 是连接符的完备集 $\square$

注

- 这些连接符完备集都含有否定符 $\sim$
- （其它）连接符可相互定义（需 $\sim$）
- 就 5 个连接符而言，除这三对以外，任何其它的一对连接符都不是完备集

定义 1.41 (竖)

定义逻辑连接符 $|$ （与非 （Nand)） 和 $\downarrow$ （或非 （Nor)） 如下

$$\mathscr{A} \mid \mathscr{B} = (\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})); \qquad \mathscr{A} \downarrow \mathscr{B} = (\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}))$$

对应的真值表分别为

p	q	$p \mid q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命题 1.42

$\{|\}$，$\{\downarrow\}$ 是连接符的完备集 $\Diamond$

证

只需证 $\{\sim, \wedge\}$ 可被 $\downarrow$ 表示，$\{\sim, \vee\}$ 可被 $|$ 表示

(1) $(\sim p)$ 与 $(\sim(p \vee p))$ 和 $(\sim(p \wedge p))$ 等价，
即 $(\sim p)$ 与 $(p \downarrow p)$ 和 $(p \mid p)$ 等价

(2) $(p \wedge q)$ 与 $(\sim((\sim p) \vee (\sim q)))$ 等价，
即 $(p \wedge q)$ 与 $((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$ 等价

(3) $(p \vee q)$ 与 $(\sim((\sim p) \wedge (\sim q)))$ 等价，
即 $(p \vee q)$ 与 $((p \mid p) \mid (q \mid q))$ 等价 $\square$

例 1.43

求与 $p \to q$ 等价的仅含有 $\downarrow$ 的命题形式

$p \to q$ 与 $\sim(p \wedge \sim q)$ 等价，用替换规则可得

$p \to q$ 与 $\sim(p \wedge (q \downarrow q))$ 等价

$p \to q$ 与 $((p \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)))$ 等价

连接符完备集只含一个连接符，命题形式的表达比较长且复杂（不易读）

注

- 理论上，可定义其它逻辑连接符，每个真值表都可定义一个连接符，但它们可能缺乏直观意义
- 应用上，根据需要定义的各种连接符通常具有某种应用的直观意义

应用中，还可定义任意多个连接符，以及其它连接符的完备集

定义 1.44 (定义连接符)

定义逻辑连接符 $\oplus$（异或（XOR，eXclusive OR））如下

$$\mathscr{A} \oplus \mathscr{B} = ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge ((\sim \mathscr{A}) \vee (\sim \mathscr{B})))$$

对应的真值表为

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

注

若以二进制运算，异或给出的是以两个输入的以 2 为模的和

$p \oplus q = p + q(mod2)$

推理及有效性

推理

推理是从一些判断推出另一个判断的思维过程，推出的判断称为结论（conclusion），用于推出结论的那些判断称为前提（premise）

逻辑中，关注推理的形式结构而不是命题的具体意义

演绎推理

演绎推理是从一些基本前提出发（公理）通过一定的推理规则推出结论的过程，所可能推出的结论是不可废除的

注

还有其它推理方式，如归纳推理，所可能推出的结论是可废除的

数学是演绎的

定义 1.45 (推理形式)

推理形式（亦称形式推理）是命题形式的一个有限序列，最后一个命题形式是结论，其它的命题形式为前提

例： $p \rightarrow q$

p

$\therefore q$

一个有效（valid）的推理形式应确保在前提真值为 T 时，结论的真值也为 T

定义 1.46

推理形式

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$$

是无效的，若对上述形式中出现的命题变元，至少存在一组真值指派使得 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 的真值为 T 而 $\mathscr{A}$ 的真值为 F；否则，就是有效的 $\diamondsuit$

注

- 判断一个推理形式是否有效可采用构造真值表的方法进行验证
- 对真值表较复杂的情形，采用如下方法
  1. 找出使得 $\mathscr{A}$ 的真值为 F 的命题变元的真值指派
  2. 验证在这些真值指派下，$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 的真值是否都为 T，若为 T，则此推理形式无效；否则，此推理形式有效

例 1.47

判断推理形式 $p \to q, \sim q \to r, r; \quad \therefore p$ 是否有效

$(p$	$\to$	$q)$	$((\sim$	q	$\to$	$r)$	r	p
T	T	T	F	T	T	T	T	T*
T	T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	F*
F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	F*
F	T	F	T	F	F	F	F	F

考察标有 $*$ 的行，可判断此推理形式无效

例 1.48

判断推理形式

$$\sim p_1 \vee p_2, p_1 \to p_3 \wedge p_4, p_4 \to p_2; \quad \therefore p_2 \vee p_3$$

是否有效

试验证无效性：若 $p_2 \vee p_3$ 真值为 F，则 p_2 和 p_3 的真值指派都为 F，这样，要使 $((\sim p_1) \vee p_2)$、$(p_4 \to p_2)$ 的真值为 T，需 p_1 和 p_4 的真值指派都为 F，由此，$(p_1 \to (p_3 \wedge p_4))$、$(p_4 \to p_2)$ 的真值都为 T

例 1.49

判断推理形式

$$p_1 \to p_2 \wedge p_3, p_2; \quad \therefore (p_1 \to p_3)$$

是否有效

若 $p_1 \to p_3$ 真值为 F，则对应的 p_1 和 p_3 的真值指派分别为 T 和 F，这样，$p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$ 的真值不可能为 T，因此，该推理形式是有效的

有效推理形式

1. 分离规则或三段论（Modus Ponens, MP）
   若 $\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$
2. 逆分离规则（Modus Tollens, MT）
   若 $\sim\mathscr{B}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\sim\mathscr{A}$
3. 假言三段论（Hypothetical Syllogism，HS）
   若 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C}$，则 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$
4. 析取三段论（Disjunctive Syllogism，DS）
   若 $\sim\mathscr{A}, \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$
5. 归谬法（Reductio ad Absurdum）
   若 $\mathscr{A} \to \sim\mathscr{A}$，则 $\sim\mathscr{A}$
   若 $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \wedge \sim\mathscr{B})$，则 $\sim\mathscr{A}$
6. 引入规则
   若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$
   若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
7. 消去规则
   若 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A}$
   若 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$

命题 1.50 (有效推理与逻辑隐含的关系)

推理形式

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$$

是有效的，当且仅当

$$(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A}$$

是重言式 $\diamondsuit$

证

假定 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ 是有效的，而 $(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A}$ 不是重言式，则对上述形式中出现的变元，存在一组真值指派，使得 $\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n$ 的真值为 T，而 $\mathscr{A}$ 的真值为 F;

$\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n$ 的真值为 T 意味着 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，$\cdots$，$\mathscr{A}_n$ 的真值都为 T，这与 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ 是有效的相矛盾反之，类似 □

注

反证法（或归谬法，reductio and absurdum）的实质：借助于一个有效的推理形式进行演绎推理，若结论为假，则至少有一个前提也为假

定义 1.51 (模型)

对任何命题形式 $\mathscr{A}$，若存在一个真值指派 v 使 $\mathscr{A}$ 取值 T (即 $\mathscr{A}$ 是可满足的)，则 v 称为 $\mathscr{A}$ 的一个模型 (model)，亦称 v 满足 $\mathscr{A}$，记 $v \models \mathscr{A}$

令 Γ 是一个命题形式集， v 为一个真值指派，若对所有 $\mathscr{A} \in \Gamma, v \models \mathscr{A},$ ，则 v 是 Γ 的一个模型 ◇

注

- 若 $\mathscr{A}$ 是重言式，则对任一真值指派 v 都满足 $\mathscr{A}$，即任一真值指派 v 都是 $\mathscr{A}$ 的模型，可记为 $\models \mathscr{A}$，称 $\mathscr{A}$ 为有效
- 集不是必要的，$\Gamma = \{\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n\}$ 亦可写成
  $\Gamma = \mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n = \{\mathscr{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n\} = \mathscr{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n$
  这样，公式集 Γ 亦可看成一个公式，有时用公式集表述为方便起见

定义 1.52 (蕴涵关系)

令 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 是命题形式, $\mathscr{A}$ 蕴涵 (entail) $\mathscr{B}$, 记 $\mathscr{A} \models_L \mathscr{B}$ (简记 $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$), 当且仅当对任一真值指派 v, 若 $v \models \mathscr{A}$ 则 $v \models \mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 (逻辑) 结论

亦即, $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{A}$ 的模型也是 $\mathscr{B}$ 的模型

令 Γ 是一个命题形式集, $\mathscr{B}$ 是一个命题形式, 则 $\Gamma \models \mathscr{B}$, 当且仅当对任一真值指派 v, 若 $v \models \Gamma$ 则 $v \models \mathscr{B}$, 即 Γ 蕴涵 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 是 Γ 的一个结论 ◇

例 1.53

(1) $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \models \mathscr{B}$

(2) $\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B} \models \mathscr{B}$

注

- 蕴涵与逻辑隐含概念上略有区别: 蕴涵 (关系) 是基于语义的推理 (关系), 逻辑隐含是重言式 (公式), 但两者是等价 (见下页)

命题 1.54

推理形式

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$$

是有效的，当且仅当

$$(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A}$$

是重言式，当且仅当

$$\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n \models \mathscr{A}$$

$\diamondsuit$

证

易证（练习） $\square$

命题逻辑的基础作用 *

- PL 是一阶逻辑的基础
- PL 具有独立价值，其 SAT 问题是解决 NP 问题的基础
- PL 应用到代数是 Bool 代数，应用到电路是数字逻辑电路（集成电路）
- PL 对应关系数据库