

数理逻辑

讲义，第 7 版，2025 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

1 命题逻辑：语义

1.1 命题和连接符

1.2 真值函数和真值表

1.3 操作和替换规则

1.4 范式

1.5 连接符的完备集

1.6 推理及有效性

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

命题和连接符

符号语言

自然语言的表述带有歧义性等问题，不适合描述数学中精确的演绎 (deduction) 推理

例如：“他笑得像个疯子一样。”

用符号语言 (symbolic language, 或形式(formal) 语言) 是基本的数学推理形式

例： x_0 是集 X 中的最大元 (数学语言)

$x_0 \in X, \forall x \in X, x \leq x_0$ (符号语言)

符号语言与数学语言

(符号) 语言

- 语法 (syntax)
- 语义 (semantics)
- 语用 (pragmatics)

数学语言 = 自然语言 + 记号: 不是符号语言, 是自然语言

网络语言 = 自然语言 + 记号

注

程序设计语言是一种符号语言

命题 (逻辑) 语言

类似于自然语言和日常推理, 命题逻辑首先需要有一个形式语言, 称为**命题语言**, 记为 \mathcal{L}_0

命题和命题的真值

定义 1.1 (命题)

具有真假意义的判断性或陈述性的语句称为 **命题** (proposition), 或称语句 (statement) ◇

定义 1.2 (真值)

命题的真假意义称为命题的 **真值** (truth values)

当一个命题为真时, 称它的真值为“**真**” (true), 记为 T (或 1)

当一个命题为假时, 称它的真值为“**假**” (false), 记为 F (或 0) ◇

真值作为命题的**语义** (semantics)

基于命题及其真值建立的逻辑称**命题逻辑** (Propositional Logic, **PL**),
PL 是二值逻辑, 亦称经典 (标准) 命题逻辑

注

- 二值 $(1, 0)$ 对应于二进制
- 三值逻辑除真假值外还有第三个值“不确定”（可表示“即真又假”），属于非经典（标准）逻辑

例 1.3

- (1) “Perelman 证明了庞加莱猜想”是命题，其真值为 T
- (2) “张益唐证明了孪生素数猜想”是命题，其真值为 F
- (3) “燕园的秋天多美啊！”不是命题，其真值不能判断
- (4) “这句话是假的”是命题吗？

悖论 1.4 (说谎者悖论)

“这个句子是假的”不是命题，称之为**悖论** (paradox): 一种导致自相矛盾的陈述

设 P 表示“这个句子是假的”

若 P 为**真**，即“这个句子是假的”为真 $\Rightarrow P$ 为**假**

若 P 为**假**，即“这个句子是假的”为假 $\Rightarrow P$ 为**真**

悖论说明关于真值的一般信念可推导出矛盾

说谎者悖论扩展版本

(P1) 下个句子为真

(P2) 上个句子为假

多语句版本的说谎者悖论可推广致任何语句循环序列，只要该语句循环序列规定存在奇数语句

悖论难解

悖论是“不真不假”？

设 P : “这个句子不为真。”

若 P 是不真不假的, 则 P 一定不为真;

但从 P 对它自身的陈述, 则又意味着 P 一定为真

$\Rightarrow P$ 不为真但又为真 (悖论)

悖论是“即真又假”吗？

设 Q : “这个句子只为假。”

若 Q 是即真又假, 则 Q 只为假; 但这不为真

$\Rightarrow Q$ 为真却又不为真 (悖论)

注

这个问题是如此简单 (有点烧脑)

这个问题又是如此复杂, 至今难于解决

注：矛盾与逻辑矛盾

“… 楚人有鬻盾与矛者，誉之曰：‘盾之坚，莫能陷也。’又誉其矛曰：‘吾矛之利，于物无不陷也。’或曰：‘以子之矛陷子之盾，何如？’其人弗能应也。夫不可陷之盾与无不陷之矛，不可同世而立。今尧、舜之不可两誉，矛盾之说也。…” —— 韩非子·难一

逻辑矛盾：同时断言一个陈述和它的否定

——悖论是一种逻辑矛盾的形式

悖论 1.5

- “上帝能创造一块他搬不动的石头”（上帝万能论）
- “世界上没有绝对的真理”
- “我只知道一件事，那就是什么都不知道”（苏格拉底）
- “言尽悖”（庄子·齐物论）

注

自指 (self-reference): “这个句子是用中文写的”

悖论通常是自指语句（反之未必）

问题

“我明天这个时候说的这句话是假的” — 悖论吗？

注

存在不是命题也不是悖论的陈述句

定义 1.6 (命题符号)

命题分为两类

- **简单命题** (**原子** (命题) (atom)) : 不能进一步分解的命题

简单命题用大写字母 A , B , C (可加下标) 等来表示

例: 用 A 表示命题 “Perelman 解决了庞加莱猜想问题”

用 B 来表示 “庞加莱猜想成为数学定理”

- **复合命题**: 由简单命题复合而成的命题

对复合命题, 需要使用 (逻辑) **连接符** (连接词、联词) (connective) 来构成



定义 1.7 (连接符)

非 A (not A)	$\sim A$
A 且 B (A and B)	$A \wedge B$
A 或 B (A or B)	$A \vee B$
若 A 则 B (if A then B)	$A \rightarrow B$
A 当且仅当 B (A if and only if B)	$A \leftrightarrow B$



“若 Perelman 解决了庞加莱猜想问题，则庞加莱猜想成为数学定理”

可表为

$$A \rightarrow B$$

形式结构

例 1.8 (三段论)

若苏格拉底是人则苏格拉底是会死的

苏格拉底是人

∴ 苏格拉底是会死的

把命题符号化，使得在（演绎）推理过程中只关注命题的形式结构，而不是命题本身的具体意义

$A \rightarrow B$

A

∴ B

例续

若苏格拉底是猪则苏格拉底是会飞的

苏格拉底是猪

∴ 苏格拉底是会飞的

定义 1.9 (命题变元)

命题变元表示任意非特指的命题

用小写字母 p, q, r (可加下标) 等来表示



注

- 命题变元和命题是不一样的
- 给命题变元一个特定的值，即一个特定的命题，其真值必为 T 、 F 其一
- 复合命题的真值依赖于其中原子的真值及连接符

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

真值函数和真值表

否定 (非, negation) \sim

$\sim p$ 的**真值表** (truth table)

p	$\sim p$
T	F
F	T

对应的**真值函数** (Bool 函数)

$f_{\sim}: \{T, F\} \mapsto \{T, F\}$ 使得 $f_{\sim}(T) = F, f_{\sim}(F) = T$

或 $f_{\sim}: \{1, 0\} \mapsto \{1, 0\}$ 使得 $f_{\sim}(1) = 0, f_{\sim}(0) = 1$

注

真值表有 2^1 行, 对应的**真值函数** 有 2^{2^1} 个, 相当于真值表最后一列要考虑 (值域) 两种情况

合取 (conjunction) \wedge

$p \wedge q$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

对应的真值函数

$f^\wedge : \{T, F\} \times \{T, F\} \mapsto \{T, F\}$ 使得

$$f^\wedge(T, T) = T, f^\wedge(T, F) = F, f^\wedge(F, T) = F, f^\wedge(F, F) = F$$

析取 (disjunction) \vee

$p \vee q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

对应的真值函数

$f^{\vee} : \{T, F\} \times \{T, F\} \mapsto \{T, F\}$ 使得

$$f^{\vee}(T, T) = T, f^{\vee}(T, F) = T, f^{\vee}(F, T) = T, f^{\vee}(F, F) = F$$

注

“ $A \vee B$ ” 表示 A 或 B 之一或两者 (A or B or both)

条件 (conditional, 或隐含 (implication)) \rightarrow

$p \rightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

注

- 确保 “ $A \rightarrow B$ ” 在推理中当 A 为真时可推出 B 为真, $A \wedge B \rightarrow B$ 确保为真; 而 A 为假时推不出任何有意义的结论
 \Leftarrow 数学中形式推理 (亦称**实质隐含**)
- 隐含“怪论”: “若猪长翅膀, 则猪能飞”

双条件 (biconditional, 或等价 (equivalence)) \leftrightarrow

$p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命题形式

定义 1.10 (命题形式)

命题形式是指按下列规则构成的包含 (命题) 变元和 (逻辑) 连接符的表达式

- (1) 任一变元是一个命题形式
- (2) 若 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是命题形式, 则 $(\sim \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ 都是命题形式
(所有命题形式由 (1)(2) 构成)



用 (花体) 符号 \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} (可加下标) 等表示命题形式

注

- 定义 1.10 是归纳（递归）定义

\mathcal{C} 是一个命题形式，当且仅当存在一个有限系列 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ ($n \geq 1$) 使得 $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ 且若 $1 \leq i \leq n$, \mathcal{C}_i 是一个变元或由前面的（一个或两个）命题形式经 \sim 或 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 所得

- 命题形式可嵌套，可潜在无限长
- 给定 一个命题形式，则为有限长

技术性符号

- 括号 “(” “)” 作为技术性符号使用，理论上，括号不是必要的：把中置式写成前置式，定义如下

$$\textcircled{1} \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) =_{\text{def}} \rightarrow \mathcal{A} \mathcal{B}$$

$$\textcircled{2} \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) =_{\text{def}} \wedge \mathcal{A} \mathcal{B} =_{\text{def}} (\sim(\mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}))$$

$$\textcircled{3} \quad (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) =_{\text{def}} \vee \mathcal{A} \mathcal{B} =_{\text{def}} ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})$$

$$\textcircled{4} \quad (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) =_{\text{def}} \leftrightarrow \mathcal{A} \mathcal{B} =_{\text{def}} (\sim((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \sim(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})))$$

- 用中置式需要用括号，在不引起混淆的情况下尽可省略：规定以下优先序
 - ① 连接符优先按 $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$ 序操作（类似算术先乘除后加减，标点符号句号比分号、分号比逗号优先），同级连接符按从右向左原则操作
 - ② 连续多个连接符 \sim ，按从右向左原则操作
- 重新添加括号循序逆操作（去括号和加括号都是简单算法）
- 为方便可引入其它技术性符合，如 “...” 等，但都不是必要的，不是命题语言中的符号

例 1.11

$((p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r)))$ 是一个命题形式

简略写法

$$(p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r))$$

$$p \wedge q \rightarrow \sim(q \vee r)$$

$$p \wedge q \rightarrow \sim \cdot q \vee r$$

注

“.” 作为技术性符号使用 (取代括号), 表 $q \vee r$ 为 \sim 管辖

命题形式的真值表

基于连接符的真值表，对任意给定的命题形式，可构造相应的真值表

例 1.12

$\sim p \vee q$ 的真值表

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

形式化

把（自然语言）知识表示为命题形式

例如，从书中随便找一个自然语言段落，把它表示为命题形式

例 1.13

把一首古诗表示为命题形式

A: 白日依山尽

B: 黄河入海流

A, B 是复合命题，可进一步细化

令 A_1 表示“(这是一个)白天”， A_2 表示“(今天能见到)太阳”， A_3 表示“(西边有一座)山”， A_4 表示“太阳(将)落山”。注意：把古诗的词翻译成白话句子，单词不是命题。A 可细化为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \rightarrow A_4$$

两步

- ① 把知识改写限制自然语言形式，即改成表达知识的逐个命题
- ② 形式化表示需尽可能细化，即基于原子、用尽连接符

定义 1.14 (真值指派)

对一个命题形式所含变元分别赋予 T 或 F 值称为一组真值指派 (assignment) ◇

注

- 若命题形式含有 n 个不同的变元，其真值指派有 2^n 种可能的组合，每种组合都对应真值表的一行，对应的真值表有 2^n 行
- 对应的真值函数为 n 元函数，即 $\{1, 0\}^n \mapsto \{1, 0\}$ ，每个变元都有两种取值 (定义域)，共有 2^n 种可能的组合 (每种组合对应真值表中的一行)，对于每种可能的组合，可为真值函数分配二值之一 (值域)，共有 2^{2^n} 种不同的真值函数
- n 元真值函数的个数有限 (2^{2^n})，而 n 元命题形式是无限的，故肯定有不同的命题形式对应相同的真值函数

定义 1.15 (可满足性)

设 \mathcal{A} 是一个命题形式，若对 \mathcal{A} 中的变元存在（至少）一组真值指派，使得 \mathcal{A} 的真值为 T ，则称 \mathcal{A} 是**可满足的** ◇

定义 1.16 (SAT 问题)

SAT 问题 (SATisfiability, 可满足性问题) 是判定一个命题形式是否可满足的问题

(寻找一个算法在多项式时间内判定任一命题形式可满足) ◇

注

- $P = ? NP$ 问题是计算机科学和数学的未解难题
- SAT 问题若能解决，就解决了 $P = ? NP$ 问题 (Cook 定理)
- 大量应用问题本质上可转化为 SAT 问题，已成专门的研究领域
- 命题逻辑具有独特的价值 (不只是作为一阶逻辑的基础)

定义 1.17 (重言式与矛盾式)

设 \mathcal{A} 是一个命题形式

(1) 若对 \mathcal{A} 中变元的任一组真值指派, \mathcal{A} 的真值都为 T , 则称 \mathcal{A} 是 **重言式** (tautology, 或 **恒真**)

(2) 若对 \mathcal{A} 中变元的任一组真值指派, \mathcal{A} 的真值都为 F , 则称 \mathcal{A} 是 **矛盾(式)** (contradiction, 或 **恒假**、**不一致** (inconsistent)) \diamond

注

判定一个命题形式是否为可满足/重言式/矛盾的方法就是构造其真值表

例 1.18

(a) $p \vee q$ 是可满足的

(b) $p \wedge \sim p$ 是矛盾

(c) $p \vee \sim p$ 是重言式

(d) $p \leftrightarrow \sim \sim p$ 是重言式

(e) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow ((\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow p)$ 是重言式

定义 1.19 (逻辑隐含与重言等价)

设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是命题形式

(1) 若 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是重言式, 则称 \mathcal{A} **逻辑隐含** \mathcal{B}

(2) 若 $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ 是重言式, 则称 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} **重言等价**, 或称 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} **等值**, 记为 $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ◇

注

若 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是含相同变元的命题形式, 则 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 重言等价意味着它们的真值函数相同

例 1.20

(a) $p \wedge q$ 逻辑隐含 p

(b) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(c) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(b) 真值表如下

$((\sim$	$(p$	\wedge	$q))$	\leftrightarrow	$((\sim$	$p)$	\vee	$(\sim$	$q))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

构造真值表的方法

对较复杂的命题形式，可用如下方法来构造真值表

- (1) 在命题变元的下面列出所有的真值组合
- (2) 按照括号从内到外的次序给出每层括号内的连接符对应的真值

例 1.20(b), 第 (1) 步

$((\sim (p \wedge q)) \leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q)))$								
	T		T			T		T
	T		F			T		F
	F		T			F		T
	F		F			F		F

第 (2) 步

$((\sim (p \wedge q)) \leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q)))$									
	T	T	T		F	T		F	T
	T	F	F		F	T		T	F
	F	F	T		T	F		F	T
	F	F	F		T	F		T	F

第 (3) 步

$(\sim (p \wedge q))$	\leftrightarrow	$((\sim p) \vee (\sim q))$
F		F
T		F
T		T
T		T

第 (4) 步

$(\sim$	$(p$	\wedge	$q))$	\leftrightarrow	$((\sim$	$p)$	\vee	$(\sim$	$q))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

操作和替换规则

命题 1.21

设 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 都是命题形式, 若 \mathcal{A} 和 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 都是重言式, 则 \mathcal{B} 也是重言式 \diamond

证

(反证法) 设若 \mathcal{B} 不是重言式

因 \mathcal{A} 和 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 都是重言式, 则对 \mathcal{A} 或 \mathcal{B} 中出现的变元至少存在一组真值指派, 使得 \mathcal{B} 取值为 F , 由于 \mathcal{A} 是重言式, \mathcal{A} 的真值必为 T

这样, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 的真值为 F , 这与 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是重言式相矛盾 \square

注

反证法是逻辑中基本证法之一, 亦是逻辑演算“之外”所需的证明之一

替换

设 \mathcal{A} 是含有变元 p_1, p_2, \dots, p_n 的命题形式, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ 是任意的命题形式, $\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n / \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}$ 是分别用 \mathcal{A}_i 替换 (substitute) p_i ($1 \leq i \leq n$) 的所有出现得到的命题形式

命题 1.22

若 \mathcal{A} 是重言式, 则 $\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n / \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}$ 亦是重言式 ◇

证

令 \mathcal{A} 是重言式, $p_i (1 \leq i \leq n)$ 是 \mathcal{A} 中出现的变元

设 $\mathcal{A}_i (1 \leq i \leq n)$ 是任意的命题形式

对 \mathcal{A}_i 中出现的变元指派任意的真值 (任意指派), p_i 的真值对等于 \mathcal{A}_i 的真值, 则 $\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n / \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}$ 在此真值指派下的真值对等于 \mathcal{A} (为 T)

$\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n / \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}$ 在任意真值指派下的取值都为 T (重言式) □

定义 1.23 (替换实例)

$\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n / \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}$ 是用 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ 分别替换 \mathcal{A} 中 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个替换实例 ◇

注

重言式的任意替换实例仍是重言式

命题 1.24

对任意命题形式 \mathcal{A} 和 \mathcal{B}

$$\sim(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \sim\mathcal{A} \vee \sim\mathcal{B}$$

$$\sim(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \sim\mathcal{A} \wedge \sim\mathcal{B}$$



证

由例 1.20(b) 知

$$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \text{ 是重言式}$$

用命题 1.10 知

$$\sim(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leftrightarrow \sim\mathcal{A} \wedge \sim\mathcal{B} \text{ 是重言式}$$

即 $\sim(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ 重言等价于 $\sim\mathcal{A} \wedge \sim\mathcal{B}$

$$\text{同理可得 } \sim(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \text{ 重言等价于 } \sim\mathcal{A} \vee \sim\mathcal{B}$$



例 1.25 ($\wedge \vee$ 结合律)

对任意命题形式 \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C}

- $(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})) \equiv ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C})$
- $(\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})) \equiv ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C})$

例 1.26 ($\wedge \vee$ 交换律)

对任意命题形式 \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C}

- $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$

$(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$ 可简写成 $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

$(\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ 可简写成 $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \mathcal{C})$

命题 1.27

设 \mathcal{A}_1 是含有命题形式 \mathcal{A} 的命题形式, $\mathcal{B}_1(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}/\mathcal{B})$ 是用命题形式 \mathcal{B} 替换 \mathcal{A}_1 中的 \mathcal{A} 一次或多次所得到的命题形式。若 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 等值, 则 \mathcal{B}_1 重言等价于 \mathcal{A}_1 ◇

证

对 \mathcal{B}_1 和 \mathcal{A}_1 中所有变元进行真值指派, 则 \mathcal{B}_1 与 \mathcal{A}_1 的区别在于 \mathcal{B}_1 的某些出现 \mathcal{A} 的地方被替换为 \mathcal{B} , 因 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 等值, 所以 $\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \mathcal{B}_1$ 的真值总为 T , 即为重言式, 故 \mathcal{B}_1 重言等价于 \mathcal{A}_1 □

定义 1.28 (受限命题形式)

受限 (或 0 阶) 命题形式是指仅含有连接符 “ \sim ”、“ \vee ” 和 “ \wedge ” 的命题形式

命题 1.29

设 \mathcal{A} 是受限命题形式, \mathcal{A}^* 是通过如下方式所得的命题形式

(1) 互换 \mathcal{A} 中所有的 “ \vee ” 和 “ \wedge ”

(2) 对 \mathcal{A} 中任意的命题变元, 用其否定式替换该命题变元在 \mathcal{A} 中所有的出现

则 \mathcal{A}^* 与 $\sim\mathcal{A}$ 重言等价

证

(归纳法) 对 \mathcal{A} 中出现的连接符的数目 (结构) 用数学归纳法证明

基始: 若 \mathcal{A} 中出现的连接符数目为 0, 则 \mathcal{A} 只包含一个变元 p ,

即 \mathcal{A} 就是 p , 显然 \mathcal{A}^* 就是 $\sim p$ (即 $\sim \mathcal{A}$), 结论成立

假设: 假设结论对于至多包含 $n-1$ ($n > 0$) 个连接符的命题形式成立

归纳: 当 \mathcal{A} 包含 n 个连接符时, \mathcal{A} 必是下面三种形式之一

(1) $\sim \mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$

(3) $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$

证 (续)

(1) \mathcal{B} 含 $n-1$ 个连接符, (据归纳假设) 有 \mathcal{B}^* 与 $\sim\mathcal{B}$ 等价

另, \mathcal{A}^* 是 $(\sim\mathcal{B})^*$ 即 $(\sim\mathcal{B}^*)$ (注意到 $*$ 操作 \sim 只针对变元), 由替换 (命题 1.27), \mathcal{A}^* 等价于是 $(\sim(\sim\mathcal{B}))$ 即 $(\sim\mathcal{A})$

(2) \mathcal{B} 和 \mathcal{C} 含的连接符数目都小于 $n-1$, 有 \mathcal{B}^* 和 \mathcal{C}^* 分别与 $\sim\mathcal{B}$ 和 $\sim\mathcal{C}$ 等价

现 \mathcal{A}^* 是 $\mathcal{B}^* \wedge \mathcal{C}^*$, 由替换

$$\mathcal{B}^* \wedge \mathcal{C}^* \text{ 等价于 } \sim\mathcal{B} \wedge \sim\mathcal{C}$$

$$\sim\mathcal{B} \wedge \sim\mathcal{C} \text{ 等价于 } \sim(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}), \text{ 据命题 1.24}$$

$$\sim(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \text{ 等价于 } \sim\mathcal{A}, \text{ 即 } \sim\mathcal{A}$$

(3) 类 (2) 同理



注

(数学) 归纳法是逻辑中基本证法之二 (逻辑演算“之外”所需)

逻辑证法

- 反证法和（数学）归纳法是逻辑中两种基本证法
- 反证和归纳是逻辑“之外”仅需的两种证法，此外，不需也不能再有逻辑外的证明
 - 逻辑是一个精确的体系，可作为数学的基础
- 反证法本身是逻辑体系内的定律，一定意义上归纳法亦然
- 用数学语言陈述的证明过程可被（一阶逻辑）形式化
 - 实质上，数学基础是关于一致性和证明

推论 1.30

令 p_1, p_2, \dots, p_n 是变元, 则

$$\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee \sim p_n$$

等价于

$$\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$$



证

令 \mathcal{A} 为 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$, 用命题 1.29 即得



记 $\bigwedge_{i=1}^n p_i$ 表示 $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$

$\bigvee_{i=1}^n p_i$ 表示 $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$

命题 1.31 (DeMorgan 律)

若 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ 是任意命题形式, 则

$$(1) \quad \bigvee_{i=1}^n (\sim \mathcal{A}_i) \equiv \sim \left(\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i \right)$$

$$(2) \quad \bigwedge_{i=1}^n (\sim \mathcal{A}_i) \equiv \sim \left(\bigvee_{i=1}^n \mathcal{A}_i \right)$$



证

推论 1.30 和 命题 1.22



定律

(1) $\sim(\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{A})$ (无矛盾律)

(2) $\mathcal{A} \vee \sim \mathcal{A}$ (排中律)

(3) $\mathcal{A} \equiv \sim \sim \mathcal{A}$ (双重否定律)

(4) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ (同幂律或重言律)

(5) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ (导出律 (exportation))

(6) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \equiv \sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A}$ (换位律)

(7) $\sim(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \sim \mathcal{A} \vee \sim \mathcal{B}$

$\sim(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \sim \mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B}$ (DeMorgan 律)

定律 (续)

$$(8) \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \quad (\text{交换律})$$

$$(9) \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$$

$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \quad (\text{结合律})$$

$$(10) \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$$

$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \quad (\text{分配律})$$

注

- 可推广到一般情况
- 反映思维的基本形式结构，数学推理（形式推理）的基本定律
- 体现在数学证明中，通常有直接证法、反证法、数学归纳法；如换位律可推导出反证法，换位律亦可作为证法，其它定律都可作为数学（直接）证法