数理逻辑

讲义，第 6.2 版，2023 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

1 命题逻辑：语义

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

命题和连接符

符号语言

自然语言的表述带有歧义性等问题，不适合描述数学中精确的演绎（deduction）推理

例："刘备跑得比兔子还快。"

用符号语言 （symbolic language，或形式(formal) 语言）是基本的数学推理形式

例：x_0 是集 X 中的最大元（数学语言）

$x_0 \in X$, $\forall x \in X$, $x \leqslant x_0$ （符号语言）

符号语言与数学语言

（符号）语言

- 语法（syntax）
- 语义（semantics）
- 语用（pragmatics）

数学语言 = 自然语言 + 记号：不是符号语言，是自然语言

网络语言 = 自然语言 + 记号

注

程序设计语言是一种符号语言

命题（逻辑）语言

类似于自然语言和日常推理，命题逻辑首先需要一个形式语言，称为命题语言，记为 $\mathscr{L}_0$

命题和命题的真值

定义 1.1 (命题)

具有真假意义的判断性或陈述性的语句称为 命题（proposition），或称语句（statement） ◇

定义 1.2 (真值)

命题的真假意义称为命题的 真值（truth values）
当一个命题为真时，称它的真值为“真”（true），记为 T （或 1 ）
当一个命题为假时，称它的真值为“假”（false），记为 F （或 0 ） ◇

真值作为命题的语义（semantics）

注

基于命题及其真值建立的逻辑称命题逻辑（Propositional Logic，PL），
PL 是二值逻辑，亦称经典（标准）命题逻辑
二值（1，0）对应于二进制
三值逻辑除真假值外还有第三个值“不确定”（可表示“即真又假”），属于非经典（标准）逻辑

例 1.3

(1) “Perelman 证明了庞加莱猜想”是命题，其真值为 T

(2) “张益唐证明了孪生素数猜想”是命题，其真值为 F

(3) “燕园的秋天多美啊！”不是命题，其真值不能判断

(4) “这句话是假的”是命题吗？

悖论 1.4 (说谎者悖论)

“这个句子是假的”不是命题，称之悖论（paradox）：一种导致自相矛盾的陈述

设 P 表示“这个句子是假的”

若 P 为真，即“这个句子是假的”为真 $\Rightarrow$ P 为假

若 P 为假，即“这个句子是假的”为假 $\Rightarrow$ P 为真

悖论说明关于真值的一般信念可推导出矛盾

说谎者悖论扩展版本

(P1) 下个句子为真

(P2) 上个句子为假

多语句版本的说谎者悖论可推广致任何语句循环序列，只要该语句循环序列规定存在奇数语句

悖论难解

悖论是“不真不假”？

设 P: “这个句子不为真。”

若 P 是不真不假的，则 P 一定不为真；

但从 P 对它自身的陈述，则又意味着 P 一定为真

$\Rightarrow$ P 不为真但又为真（悖论）

悖论是“即真又假”吗？

设 Q: “这个句子只为假。”

若 Q 是即真又假，则 Q 只为假；但这不为真

$\Rightarrow$ Q 为真却又不为真（悖论）

注

这个问题是如此简单（有点烧脑）

这个问题又是如此复杂，至今难于解决

注：矛盾与逻辑矛盾

“··· 楚人有鬻盾与矛者，誉之曰：‘盾之坚，莫能陷也。’又誉其矛曰：‘吾矛之利，于物无不陷也。’或曰：‘以子之矛陷子之盾，何如？’其人弗能应也。夫不可陷之盾与无不陷之矛，不可同世而立。今尧、舜之不可两誉，矛盾之说也。···” —— 韩非子 · 难一

逻辑矛盾：同时断言一个陈述和它的否定

——悖论是一种逻辑矛盾的形式

悖论 1.5

- "上帝能创造一块他搬不动的石头"（上帝万能论）
- "世界上没有绝对的真理"
- "我只知道一件事，那就是什么都不知道"（苏格拉底）
- "言尽悖"（庄子 · 齐物论）

注

自指（self-reference）："这个句子是用中文写的"

悖论通常是自指语句（反之未必）

问题

"我明天这个时候说的这句话是假的" — 悖论吗？

注

存在不是命题也不是悖论的陈述句

定义 1.6 (命题符号)

命题分为两类

- 简单命题（原子（命题）(atom))：不能进一步分解的命题

  简单命题用大写字母 A，B，C（可加下标）等来表示

  例：用 A 表示命题“Perelman 解决了庞加莱猜想问题”

  用 B 来表示“庞加莱猜想成为数学定理”

- 复合命题：由简单命题复合而成的命题

  对复合命题，需要使用（逻辑）连接符（连接词、联词）(connective) 来构成

$\diamondsuit$

定义 1.7 (连接符)

非 A (not A)	$\sim A$
A 且 B (A and B)	$A \wedge B$
A 或 B (A or B)	$A \vee B$
若 A 则 B (if A then B)	$A \rightarrow B$
A 当且仅当 B (A if and only if B)	$A \leftrightarrow B$

$\diamondsuit$

例：如果 Perelman 解决了庞加莱猜想问题，那么庞加莱猜想成为数学定理

可表为

$A \rightarrow B$

形式结构

例 1.8 (三段论)

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{若苏格拉底是人则苏格拉底是会死的} \\
 & \text{苏格拉底是人} \\
\therefore & \text{苏格拉底是会死的}
\end{array}
$$

把命题符号化，使得在（演绎）推理过程中只关注命题的形式结构，而不是命题本身的具体意义

$$
\begin{array}{ll}
 & A \to B \\
 & A \\
\therefore & B
\end{array}
$$

例续

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{若苏格拉底是猪则苏格拉底是会飞的} \\
 & \text{苏格拉底是猪} \\
\therefore & \text{苏格拉底是会飞的}
\end{array}
$$

定义 1.9 (命题变元)

命题变元表示任意非特指的命题

用小写字母 p, q, r （可加下标）等来表示 $\diamondsuit$

注

- 命题变元和命题是不一样的
- 给命题变元一个特定的值，即一个特定的命题，其真值必为 T、F 其一
- 复合命题的真值依赖于其中原子的真值及连接符

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

真值函数和真值表

否定（非，negation）$\sim$

$\sim p$ 的真值表（truth table）

p	$\sim p$
T	F
F	T

对应的真值函数（Bool 函数）

$$f^{\sim}:\{T,F\} \mapsto \{T,F\} \text{ 使得 } f^{\sim}(T)=F, f^{\sim}(F)=T$$

或 $f^{\sim}:\{1,0\} \mapsto \{1,0\}$ 使得 $f^{\sim}(1)=0, f^{\sim}(0)=1$

注

真值表有 2^1 行，对应的真值函数有 2^{2^1} 个，相当于真值表最后一列要考虑两种情况

合取（conjunction）$\wedge$

$p \wedge q$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

对应的真值函数

$f^{\wedge}: \{T, F\} \times \{T, F\} \quad \mapsto \{T, F\}$ 使得

$f^{\wedge}(T, T) = T, f^{\wedge}(T, F) = F, f^{\wedge}(F, T) = F, f^{\wedge}(F, F) = F$

析取（disjunction）$\vee$

$p \vee q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

对应的真值函数

$$f^{\vee} : \{T, F\} \times \{T, F\} \quad \mapsto \{T, F\} \text{ 使得}$$

$$f^{\vee}(T, T) = T, f^{\vee}(T, F) = T, f^{\vee}(F, T) = T, f^{\vee}(F, F) = F$$

注

“$A \vee B$” 表示 A 或 B 之一或两者（A or B or both）

条件（conditional，或隐含（implication））$\rightarrow$

$p \rightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

注

- 确保“$A \rightarrow B$”在推理中当 A 为真时可推出 B 为真，$A \wedge B \rightarrow B$ 确保为真；而 A 为假时推不出任何有意义的结论
  $\Leftarrow$ 数学中形式推理（亦称实质隐含）
- 隐含“怪论”：“若猪长翅膀，则猪能飞”

双条件（biconditional，或等价（equivalence））$\leftrightarrow$

$p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命题形式

定义 1.10 (命题形式)

命题形式是指按下列规则构成的包含（命题）变元和（逻辑）连接符的表达式

(1) 任一变元是一个命题形式

(2) 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是命题形式，则 $(\sim\mathscr{A})$，$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ 都是命题形式

（所有命题形式由 (1)(2) 构成） $\diamondsuit$

用（花体）符号 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$（可加下标）等表示命题形式

注

- 定义 1.10 是归纳（递归）定义

  $\mathscr{C}$ 是一个命题形式，当且仅当存在一个有限系列 $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \cdots, \mathscr{C}_n$（$n \geq 1$）使得 $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}$ 且若 $1 \leq i \leq n$，$\mathscr{C}_i$ 是一个变元或由前面的（一个或两个）命题形式经 $\sim$ 或 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 所得
- 命题形式可嵌套，可潜在无限长
- 给定 一个命题形式，则为有限长

技术性符号

- 括号 “(” “)” 作为技术性符号使用，理论上，括号不是必要的：把中置式写成前置式，定义如下
  1. $(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) =_{def} \to \mathscr{A}\mathscr{B}$
  2. $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) =_{def} \wedge\mathscr{A}\mathscr{B} =_{def} (\sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}))$
  3. $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) =_{def} \vee\mathscr{A}\mathscr{B} =_{def} ((\sim\mathscr{A}) \to \mathscr{B})$
  4. $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) =_{def} \leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} =_{def} (\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})))$
- 用中置式需要用括号，在不引起混淆的情况下尽可省略：规定以下优先序
  1. 连接符优先按 $\leftrightarrow, \to, \vee, \wedge$ 序操作（类似算术先乘除后加减，标点符号句号比分号、分号比逗号优先），同级连接符按从右向左原则操作
  2. 连续多个连接符 $\sim$，按从右向左原则操作
- 重新添加括号循序逆操作（去括号和加括号都是简单算法）
- 为方便可引入其它技术性符合，如 “…” 等，但都不是必要的，不是命题语言中的符号

例 1.11

$((p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r)))$ 是一个命题形式

简略写法

$(p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r))$

$p \wedge q \rightarrow \sim(q \vee r)$

$p \wedge q \rightarrow \sim \cdot q \vee r$

注

“·” 作为技术性符号使用（取代括号），表 $q \vee r$ 为 $\sim$ 管辖

命题形式的真值表

基于连接符的真值表，对任意给定的命题形式，可构造相应的真值表

例 1.12

$\sim p \vee q$ 的真值表

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

形式化

把（自然语言）知识表示为命题形式

例如，从书中随便找一个自然语言段落，把它表示为命题形式

例 1.13

把一首古诗表示为命题形式

A: 白日依山尽

B: 黄河入海流

A, B 是复合命题，可进一步细化

令 A_1 表示 “(这是一个) 白天”，A_2 表示 “(今天能见到) 太阳”，A_3 表示 “(西边有一座) 山”，A_4 表示 “太阳（将）落山”。注意：把古诗的词翻译成白话句子，单词不是命题。A 可细化为

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \rightarrow A_4$

形式化表示需尽可能细化，即基于原子用尽连接符

定义 1.14 (真值指派)

对一个命题形式所含变元分别赋予 T 或 F 值称为一组真值指派(assignment) ◇

注

- 若命题形式含有 n 个不同的变元，对应的真值函数为 n 元函数，即 $\{1,0\}^n \mapsto \{1,0\}$，对应的真值表有 2^n 行
- n 元真值函数的个数有限（2^{2^n}，对应 2^n 行的真值表每行有 T 或 F 两个取值（最后一列)），而由 n 个不同变元构成的命题形式是无限的，故肯定有不同的命题形式对应相同的真值函数

定义 1.15 (可满足性)

设 $\mathscr{A}$ 是一个命题形式，若对 $\mathscr{A}$ 中的变元存在（至少）一组真值指派，使得 $\mathscr{A}$ 的真值为 T，则称 $\mathscr{A}$ 是**可满足的** $\Diamond$

定义 1.16 (SAT 问题)

SAT 问题（SATisfiability，可满足性问题）是判定一个命题形式是否可满足的问题

(寻找一个算法在多项式时间内判定任一命题形式可满足) $\Diamond$

注

- $P =^? NP$ 问题是计算机科学和数学的未解难题
- SAT 问题若能解决，就解决了 $P =^? NP$ 问题（Cook 定理）
- 大量应用问题本质上可转化为 SAT 问题，已成专门的研究领域
- 命题逻辑具有独特的价值（不只是作为一阶逻辑的基础）

定义 1.17 (重言式与矛盾式)

设 $\mathscr{A}$ 是一个命题形式

(1) 若对 $\mathscr{A}$ 中变元的任一组真值指派，$\mathscr{A}$ 的真值都为 T，则

称 $\mathscr{A}$ 是 重言式（tautology，或 恒真）

(2) 若对 $\mathscr{A}$ 中变元的任一组真值指派， $\mathscr{A}$ 的真值都为 F，则

称 $\mathscr{A}$ 是 矛盾（式）（contradiction，或 恒假、不一致 (inconsistent)）$\diamondsuit$

注

判定一个命题形式是否为可满足/重言式/矛盾的方法就是构造其真值表

例 1.18

(a) $p \vee q$ 是可满足的

(b) $p \wedge \sim p$ 是矛盾

(c) $p \vee \sim p$ 是重言式

(d) $p \leftrightarrow \sim\sim p$ 是重言式

(e) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow ((\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow p)$ 是重言式

定义 1.19 (逻辑隐含与重言等价)

设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都是命题形式

(1) 若 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是重言式，则称 $\mathscr{A}$ 逻辑隐含 $\mathscr{B}$

(2) 若 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 是重言式，则称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 重言等价，或称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 等值，记为 $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ ◇

注

若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是含相同变元的命题形式，则 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 重言等价意味着它们的真值函数相同

例 1.20

(a) $p \wedge q$ 逻辑隐含 p

(b) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(c) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(b) 真值表如下

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

构造真值表的方法

对较复杂的命题形式，可用如下方法来构造真值表

(1) 在命题变元的下面列出所有的真值组合

(2) 按照括号从内到外的次序给出每层括号内的连接符对应的真值

例 1.20(b)，第 (1) 步

$(($~$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$(($~$\sim$	$p)$	$\vee$	$($~$\sim$	$q)))$
	T		T			T			T
	T		F			T			F
	F		T			F			T
	F		F			F			F

第 (2) 步

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
	T	T	T		F	T		F	T
	T	F	F		F	T		T	F
	F	F	T		T	F		F	T
	F	F	F		T	F		T	F

第 (3) 步

$(($∼	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$(($∼	$p)$	$\vee$	$($∼	$q)))$
F	T	T	T		F	T	F	F	T
T	T	F	F		F	T	T	T	F
T	F	F	T		T	F	T	F	T
T	F	F	F		T	F	T	T	F

第 (4) 步

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

操作和替换规则

命题 1.21

设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是命题形式, 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都是重言式，则 $\mathscr{B}$ 也是重言式 $\diamondsuit$

证

(反证法)　设若 $\mathscr{B}$ 不是重言式

因 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都是重言式，则对 $\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{B}$ 中出现的变元至少存在一组真值指派，使得 $\mathscr{B}$ 取值为 F，由于 $\mathscr{A}$ 是重言式，$\mathscr{A}$ 的真值必为 T

这样，$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的真值为 F，这与 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是重言式相矛盾 $\square$

注

反证法是逻辑中基本证法之一，亦是逻辑演算系统之外所需的证明之一

替换

设 $\mathscr{A}$ 是含有变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的命题形式，$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，$\cdots$，$\mathscr{A}_n$ 是任意的命题形式，$\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 是分别用 $\mathscr{A}_i$ 替换（substitute）p_i $(1 \leq i \leq n)$ 的所有出现得到的命题形式

命题 1.22

若 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 亦是重言式 $\diamond$

证

令 $\mathscr{A}$ 是重言式， $p_i(1 \le i \le n)$ 是 $\mathscr{A}$ 中出现的变元

设 $\mathscr{A}_i(1 \le i \le n)$ 是任意的命题形式

对 $\mathscr{A}_i$ 中出现的变元指派任意的真值（任意指派），p_i 的真值对等于 $\mathscr{A}_i$ 的真值，则 $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 在此真值指派下的真值对等于 $\mathscr{A}$（为 T）

$\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 在任意真值指派下的取值都为 T（重言式） □

定义 1.23 (替换实例)

$\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 是用 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 分别替换 $\mathscr{A}$ 中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的一个替换实例 ◇

重言式的任意替换实例仍是重言式

命题 1.24

对任意命题形式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$

$$\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \equiv \sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}$$

$$\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \equiv \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B} \qquad \diamondsuit$$

证

由 例 1.20(b) 知

$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ 是重言式

用 命题 1.10 知

$\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \leftrightarrow \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$ 是重言式

即 $\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ 重言等价于 $\sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$

同理可得 $\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ 重言等价于 $\sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}$ $\square$

例 1.25 (∧∨ 结合律)

对任意命题形式 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$

- $(\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})) \equiv ((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C})$
- $(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C})) \equiv ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C})$

例 1.26 (∧∨ 交换律)

对任意命题形式 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$

- $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \wedge \mathscr{A}$
- $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{A}$

$(\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}))$ 可简写成 $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$

$(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$ 可简写成 $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \vee \mathscr{C})$

命题 1.27

设 $\mathscr{A}_1$ 是含有命题形式 $\mathscr{A}$ 的命题形式，$\mathscr{B}_1(\mathscr{A}_{1\mathscr{A}/\mathscr{B}})$ 是用命题形式 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{A}_1$ 中的 $\mathscr{A}$ 一次或多次所得到的命题形式。若 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 等值, 则 $\mathscr{B}_1$ 重言等价于 $\mathscr{A}_1$ $\diamondsuit$

证

对 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{A}_1$ 中所有变元进行真值指派，则 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{A}_1$ 的区别在于 $\mathscr{B}_1$ 的某些出现 $\mathscr{A}$ 的地方被替换为 $\mathscr{B}$，因 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 等值，所以 $\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1$ 的真值总为 T，即为重言式，故 $\mathscr{B}_1$ 重言等价于 $\mathscr{A}_1$ $\square$

定义 1.28 (受限命题形式)

受限（或 **0 阶**）命题形式是指仅含有连接符 “$\sim$”、“$\vee$” 和 “$\wedge$” 的命题形式 $\diamondsuit$

命题 1.29

设 $\mathscr{A}$ 是受限命题形式，$\mathscr{A}^*$ 是通过如下方式所得的命题形式

(1) 互换 $\mathscr{A}$ 中所有的 “$\vee$” 和 “$\wedge$”

(2) 对 $\mathscr{A}$ 中任意的命题变元，用其否定式替换该命题变元在 $\mathscr{A}$ 中所有的出现

则 $\mathscr{A}^*$ 与 $\sim\mathscr{A}$ 重言等价 $\diamondsuit$

证

（归纳法）　对 $\mathscr{A}$ 中出现的连接符的数目（结构）用数学归纳法证明

基始：若 $\mathscr{A}$ 中出现的连接符数目为 0, 则 $\mathscr{A}$ 只包含一个变元 p,

即 $\mathscr{A}$ 就是 p，显然 $\mathscr{A}^*$ 就是 $\sim p$（即 $\sim\mathscr{A}$），结论成立

假设：假设结论对于至多包含 $n-1$ $(n>0)$ 个连接符的命题形式成立

归纳：当 $\mathscr{A}$ 包含 n 个连接符时，$\mathscr{A}$ 必是下面三种形式之一

(1) $\sim\mathscr{B}$

(2) $\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$

(3) $\mathscr{B}\wedge\mathscr{C}$

证（续）

(1) $\mathscr{B}$ 含 $n-1$ 个连接符，（据归纳假设）有 $\mathscr{B}^*$ 与 $\sim\mathscr{B}$ 等价

另，$\mathscr{A}^*$ 是 $(\sim\mathscr{B})^*$ 即 $(\sim\mathscr{B}^*)$（注意到 $*$ 操作 $\sim$ 只针对变元），由替换（命题 1.27），$\mathscr{A}^*$ 等价于是 $(\sim(\sim\mathscr{B}))$ 即 $(\sim\mathscr{A})$

(2) $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 含的连接符数目都小于 $n-1$，有 $\mathscr{B}^*$ 和 $\mathscr{C}^*$ 分别与 $\sim\mathscr{B}$ 和 $\sim\mathscr{C}$ 等价

现 $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{B}^* \wedge \mathscr{C}^*$，由替换

$\mathscr{B}^* \wedge \mathscr{C}^*$ 等价于 $\sim\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}^*$

$\sim\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}^*$ 等价于 $\sim\mathscr{B} \wedge \sim\mathscr{C}$，据 命题 1.24

$\sim\mathscr{B} \wedge \sim\mathscr{C}$ 等价于 $\sim(\mathscr{B} \vee \mathscr{C})$，即 $\sim\mathscr{A}$

(3) 类 (2) 同理 □

注

（数学）归纳法是逻辑中基本证法之二（逻辑演算系统之外所需）

逻辑证法

- 反证法和（数学）归纳法是逻辑中两种基本证法
- 反证和归纳是逻辑“之外”仅需的两种证法，此外，不需也不能再有逻辑外的证明

  — 逻辑是一个精确的体系，可作为数学的基础
- 反证法本身是逻辑体系内的定律，一定意义上归纳法亦然
- 用数学语言陈述的证明过程可被（一阶逻辑）形式化

  — 实质上，数学基础是关于一致性和证明

推论 1.30

令 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是变元，则

$$\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$$

等价于

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$$

◇

证

令 $\mathscr{A}$ 为 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$，用 命题 1.29 即得 □

记 $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i$ 表示 $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$

$\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i$ 表示 $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$

命题 1.31 (DeMorgan 律)

若 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，...，$\mathscr{A}_n$ 是任意命题形式，则

(1) $\bigvee\limits_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i) \equiv \sim(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i)$

(2) $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i) \equiv \sim(\bigvee\limits_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i)$ ◇

证

推论 1.30 和 命题 1.22 □

定律

(1) $\sim(\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{A})$ （无矛盾律）

(2) $\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{A}$ （排中律）

(3) $\mathscr{A} \equiv \sim\sim\mathscr{A}$ （双重否定律）

(4) $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A} \wedge \mathscr{A}$

$\mathscr{A} \equiv \mathscr{A} \vee \mathscr{A}$ （同幂律或重言律）

(5) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{C} \equiv \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ （赎出律 (exportation)）

(6) $\mathscr{A} \to \mathscr{B} \equiv \sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}$ （换位律）

(7) $\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \equiv \sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}$

$\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \equiv \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$ （DeMorgan 律）

定律（续）

(8) $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \wedge \mathscr{A}$

$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{A}$ （交换律）

(9) $\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C}$

$\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C}$ （结合律）

(10) $\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vee (\mathscr{A} \wedge \mathscr{C})$

$\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{A} \vee \mathscr{C})$ （分配律）

注

可推广到一般情况

反映思维的基本形式结构，数学推理（形式推理）的基本定律

体现在数学证明中，通常有直接证法、反证法、数学归纳法；如换位律可推导出反证法，换位律亦可作为证法，其它定律都可作为数学（直接）证法