数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

课程介绍

课程主页 http://www.math.pku.edu.cn/teachers/linzq/
(亦见教学网，可能随开课情况随时变化)

讲义课件 数理逻辑 (1998 ∼)

参考教材 Logic for Mathematicians (revised ed)
Hamilton A G，清华大学出版社（影印版），2003
Introduction to Mathematical Logic (6th ed)
Mendelson E，CRC press，2015

时间地点 按课表（有调整另行通知）
辅导 办公室时间（见主页/电邮预约）

考试成绩 期末考试（笔试）+ 作业（20-30%)）[无期中考]
作业要求 每周上课前从教学网交上次作业给助教
不准补交（补交不批不计分）
用 LaTeX 交 pdf 文件（鼓励）
本科生比研究生作业成绩占比高 10%

注：习题见主页。用 AI 工具（如 ChatGPT）做本习题很多是错的或不合要求，应要求自己独立做题。用 AI 工具提出问题并判断回答的真假并不比做题容易，却是辅助学习的方法和能力

课程内容

0 引言
1 命题逻辑：语义
2 命题逻辑：语法
3 一阶逻辑：模型论
4 一阶逻辑：证明论
5 数学基础
6 不完全性定理
7 计算机科学基础*

*：加星号的章或页内容选讲（作为扩展知识不做考察）
学时安排：见课程主页

注：命题逻辑是一阶逻辑的基础，一阶逻辑是数理逻辑的基础（主要内容），包含数理逻辑中模型论、证明论、形式集论和递归论的基础，证明完全性定理（要求掌握）和不完全性定理，讨论元数学（数学基础）、计算机科学和人工智能的基础问题

0 引言

0.1 什么是数理逻辑
0.2 数理逻辑简史
0.3 数理逻辑的未来

什么是数理逻辑

- 逻辑，逻辑学和数理逻辑
- 数理逻辑的主要内容
  - 逻辑演算（一阶逻辑）+ 四论（证明论/模型论/递归论/形式集论）
  - 逻辑演算是数理逻辑的基础，亦称经典逻辑
- 交叉基础学科
  - 数学基础（元数学），数理哲学，数理语言学（计算语言学），理论计算机科学基础，人工智能逻辑基础
- 逻辑谱系（应用逻辑）
  - 非经典逻辑
    - 模态逻辑，多值逻辑（三值逻辑 $\cdots$） $\cdots$
  - 计算逻辑
    - 程序逻辑（时态逻辑 $\cdots$） $\cdots$
  - 人工智能逻辑
    - 非单调逻辑（缺省逻辑 $\cdots$） $\cdots$
  - 其它
    - 哲学逻辑（辩证逻辑 $\cdots$） $\cdots$

数理逻辑简史

- 古代哲学和逻辑学
  - 希腊/中国/印度发源地（公元前 5 世纪）
- 数学的第三次危机
  - 悖论问题
    1902，Russell 写给 Frege 一封信，提出“Russell 悖论”，指出 Cantor 建立的（朴素）集论是不一致的，由此引发数学基础危机
  - Hilbert 规划
    1921，Hilbert 提出“Hilbert 规划”，旨在解决“the foundational questions once and for all”
    数学机械化（算法）：“Once a logical formalism is established one can expect that a systematic, so-to-say computational, treatment of logic formulas is possible, which would somewhat correspond to the theory of equations in algebra”
  - Gödel 完全性定理和不完全性定理
    1931，Gödel 证明了不完全性定理，宣告了 Hilbert 规划失败
- 数学基础三大学派：逻辑主义，形式主义，直觉主义
  Bourbaki 学派：结构主义 $\Leftarrow$ 再无“主义”
  （继承形式主义，认为逻辑主义“极左”直觉主义“极右”）

数理逻辑简史

- 计算理论
  - 计算机科学
    - 1928，Hilbert 和 Ackermann 提出判定问题：是否存在一个算法判定一个（一阶）逻辑公式是有效的
    - 1936-1937，Church 和 Turing 独立地提出递归函数和 Turing 机作为计算模型，证明了判定问题是不可解的：不存在算法可检查逻辑公式的有效性（停机问题）
      —Church-Turing 论题可看成理论计算机科学的起点
    - Zuse 的 Z3 和 Atanasoff-Berry 的数字计算机是基于停机问题认识到机械计算的内在局限性发展了计算机科学，之后诞生了第一台（电子数字）计算机
  - 人工智能
    - 1943，McCulloch 和 Pitts 提出人工神经网络，大脑的 Bool 电路（命题逻辑）模型
    - 1956，McCarthy 等人提出人工智能（AI），逻辑成为 AI 的基础之一

数理逻辑简史

- 数理逻辑在中国
  - 数理逻辑在北大
    - 逻辑（名学）必修课（钦定京师大学堂章程，1902），公共课（1904，一年周 3 学时）
    - 严复（译《穆勒名学》(1906)，《名学浅说》(1909)，作为教材）
    - Russell 在北大（1920-1921）
    - 汪奠基（教逻辑学，1925），张申府（北大毕业任助教，1917）
    - 金岳霖（《逻辑》，1936），沈有鼎，王宪钧（北大哲学系）
    - 胡世华在北大数力系开设数理逻辑课（-1965）
    - 王浩（金岳霖在西南联大的学生，数理逻辑通俗讲话，1977）
    - 北大数学系：吴允曾，马希文（-1989）
    - 北大计算机系开离散数学-数理逻辑课（不完整的一阶逻辑）
    - 北大哲学系取消逻辑学（本科）专业（1987-）
    - 北大数学学院重开数理逻辑课（即本课程，自 1998）

数理逻辑的未来

- 逻辑的应用
  - 逻辑的地位：（自然）科学
    - 广义的物理科学（物理、化学、生物等）
    - 数学（介于物理科学和计算机科学之间）
    - 计算机科学（关于人工制造的机器）

    — 逻辑是数学和计算机科学的基础
  - 计算机科学中的逻辑学，人工智能逻辑，哲学逻辑，语言逻辑
- 现代逻辑
  - 基本问题的研究现状
    - 数学的第三次危机仍未解决
    - 范畴论及数学的统一基础
  - 新逻辑层出不穷（逻辑谱系）
- 逻辑的未来
  - 走出数学，回归原始目标，作为关于思维（智能）的学问

参考资料

参考书 John Bell, Moshe Machover, A Course In Mathematical Logic, North Holland, 1977
Jean Gallier, Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving, John Wiley and Sons, 1988

经典书 Alonzo Church, Introduction to Mathematical Logic (Vol.1), Princeton University Press, 1951/1996

中文书 胡世华，陆钟万，数理逻辑基础（上、下册），科学出版社，1982
莫绍揆，数理逻辑导论，上海科学技术出版社，1965

更多阅读 王浩，数理逻辑通俗讲话，科学出版社，1981
Jean van Heijenoort, From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931, Harvard University Press, 2002

参考资料

科普书 Ernest Nagel, James R. Newman, (Douglas R. Hofstadter), Gödel's Proof, NYU Press, 1971 (Revised edition, 2001)
哥德尔证明，陈东威，连永君 译，中国人民大学出版社，2008
Douglas R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid, Basic Books, 1979/1999
哥德尔 · 艾舍尔 · 巴赫——集异璧之大成，北大翻译组，1997/2010