

北京大学数学科学学院期末试题

2021 - 2022 学年 第 1 学期

考试科目: 数理逻辑 考试时间: 2022.1.3

姓 名: _____ 学 号: _____

本试题共 10 道大题, 满分 100 分

1. (10 分) 阐述以下概念: (1) 重言式, (2) 规范模型, (3) 递归, (4) 归纳公理, (5) ω 一致性。
2. (5 分) 形式化以下数学定义: 实数集 A 上函数 f 在 $a \in A$ 连续。
3. (10 分) 证明: 一阶逻辑 K 是一致的。
4. (10 分) 证明 $\vdash_K \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\exists x_i \mathcal{A} \rightarrow \exists x_i \mathcal{B})$
5. (10 分) 在带等词的一阶逻辑中, 令 t, s, r 为任意项, 证明 $(t = s) \rightarrow (s = r \rightarrow t = r)$ 是定理。
6. (10 分) 求以下公式的子句范式: $\exists x_1 \mathcal{A}(x_1, x_2) \rightarrow (\mathcal{B}(x_1) \rightarrow \sim \forall x_2 \mathcal{A}(x_1, x_2))$
7. (15 分) 用一阶逻辑描述如下推理 (写出形式化的前提、结论和证明):
任一自然数, 若它只能被 1 和自身整除, 则它是素数; 若它能被 2 整除, 则它不是素数, 但有唯一能被 2 整除的素数。有的自然数能被 2 整除, 故有的自然数不是素数。
8. (15 分) 令 $\mathcal{A}(x_i)$ 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 中 x_i 自由出现的公式, x_j 是一个不自由出现在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中的变元。证明: 若 x_j 在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由, 则 x_i 在 $\mathcal{A}(x_j)$ 中对 x_j 自由, 这里 $\mathcal{A}(x_j)$ 是对 $\mathcal{A}(x_i)$ 中以 x_j 替换 x_i 的处处出现的结果。
9. (10 分) 证明一阶逻辑 (形式系统 $K_{\mathcal{L}}$) 的完全性定理 (要求写出所引用的引理或定理)。
10. (5 分) 什么是罗素悖论? 试论证之; 形式集论 ZF 系统中哪条公理能避免罗素悖论? 写出该公理形式。