复旦大学硕士学位论文

延时周期 Lotka–Volterra 系统的稳定性分析

Stability Analysis of Delayed Periodic Lotka–Volterra Systems

林　伟

指导教师

陈天平　教授

指导小组成员

陈天平　教授
陈纪修　教授
尚汉冀　教授

复旦大学数学研究所

2005 年 4 月

目　录

摘　要

Lotka–Volterra 系统是一类重要的数学生态学模型，自 20 世纪 20 年代提出以来已被广泛应用于自然科学与社会科学等各种领域，为理解复杂系统内部竞争替代与演化的规律提供了有力工具. 近年来，延时周期 Lotka–Volterra 系统由于引入了更贴近客观实际的时间延迟和周期性波动因素，逐渐成为研究的热点.

本论文研究了一类具有非常一般形式的延时周期 Lotka–Volterra 系统. 我们直接运用基本且直观的数学分析工具，详细讨论了具有重要生态学意义的正周期解和非负周期解问题，证明了若干周期解的存在性和稳定性定理.

全文共分为四章.

第一章，绪论. 我们首先介绍了 Lotka–Volterra 系统在生态学、神经网络以及其他领域的应用，阐述了延时周期 Lotka–Volterra 系统的研究意义，然后给出了具体的模型描述，并在归纳现有文献研究思路的基础上提出了亟待解决的问题.

第二章，正周期解的存在性与稳定性. Lotka–Volterra 系统的正周期解表明生态系统中的所有种群在周期性的波动中共存下去，而没有一个种群趋于灭绝. 对于这类特殊而重要的周期解，我们采用与现有文献不同的思路，直接使用泛函分析中基本的 Schauder 不动点定理，证明了更为宽松和一般的存在性条件. 我们还进一步讨论了正周期解的全局渐近稳定性和全局指数稳定性.

第三章，非负周期解的稳定性. Lotka–Volterra 系统收敛到一个某些分量为零的非负周期解，意味着某些种群在竞争中处于劣势而最终灭绝. 对这一更有普遍意义的周期解问题，我们首先讨论了解的有界性条件，然后通过构造与 Lyapunov 函数有相似形式的辅助函数，运用直接的分析方法证明了非负周期解的稳定性定理. 这一方法成功地克服了直接使用 Lyapunov 方法可能遇到的困难.

第四章，数值例子与讨论. 我们以一个综合性的数值例子，具体说明了前面得到的稳定性条件的验证方法，以及各类稳定性条件之间的区别与联系. 这些结果为深入理解复杂生态系统的动力学行为提供了有益的启发.

关键词：Lotka–Volterra 系统，神经网络，延时，周期解，全局渐近稳定性，全局指数稳定性，非奇异 M 矩阵.

中图分类号：O175.1, Q141.

Abstract

The Lotka–Volterra system is one of the most important models in mathematical ecology. Since it was proposed in the 1920's, successful applications of this model and its variants have been widely found in diverse areas of natural and social sciences, which have provided powerful tools for understanding the mechanisms of competition and dynamical evolution in a complex system. In recent years, the delayed periodic Lotka–Volterra systems, which introduce the time delays and periodic oscillations into the original model, have attracted increasing interest.

This thesis focus on the delayed periodic Lotka–Volterra systems of a very general form. Using fundamental and straightforward analytic techniques, we discuss in detail the issues on positive and nonnegative periodic solutions that have significant ecological meanings. Several new results of existence and stability of periodic solutions are proved.

This thesis is organized as follows.

Chapter 1: Introduction. We briefly introduce the applications of Lotka–Volterra systems in ecology, neural networks and other fields, and the necessity of research on delayed periodic Lotka–Volterra systems. Model descriptions are then given, and challenging problems are proposed based on analyzing the ideas and methods currently used to investigate the model.

Chapter 2: Existence and stability of positive periodic solutions. Positive periodic solutions of Lotka–Volterra systems imply that all the species in an ecosystem coexist permanently with periodic oscillations. Taking a different way from those in the literature and applying Schauder's fixed point theorem, we prove some existence conditions for positive periodic solutions. And the global asymptotic stability and global exponential stability are also addressed.

Chapter 3: Stability of nonnegative periodic solutions. The vanishing components of a stable periodic solution imply that the corresponding species are driven to extinction eventually. To study the stability of nonnegative periodic solutions, we first discuss the boundedness of solutions, and then prove the stability theorems by simple mathematical analysis. By using this approach, we avoid the possible difficulty in applying the Lyapunov's method.

Chapter 4: A numerical example and discussions. The comprehensive example is carefully designed and intended both to illustrate how to verify the stability criteria obtained in previous chapters, and to explain the distinction between the conditions for positive and nonnegative periodic solutions. All these results provide insights into the understanding of dynamical behavior of complex ecosystems.

Keywords: Lotka–Volterra system, neural network, delay, periodic solution, global asymptotic stability, global exponential stability, nonsingular M-matrix.

第一章　绪论

§1.1　应用背景与研究意义

“物竞天择，适者生存．”自然界中一个复杂的生态系统往往包含多个相互制约的种群，种群之间的关系通常用食物网 (trophic web) 来描述．简单的说，两个种群之间的关系可以归为三种主要类型：(1) 竞争关系，其中一个种群的增长对另一个种群的增长起阻碍作用；(2) 合作 (或共生) 关系，其中一个种群的增长对另一个种群的增长起促进作用；(3) 捕食 (或寄生) 关系，第一个种群的增长对第二个种群起阻碍作用，而第二个种群的增长对第一个种群的增长起促进作用，这时第一个种群称为“捕食者”(predator), 第二个种群称为“猎物”(prey), 所以这种关系又被称为捕食者－猎物关系．

首先用定量的数学模型来描述种群之间相互关系的先驱性工作是意大利数学家 Volterra 在 1926 年作出的 [29]. 为了解释第一次世界大战期间地中海鱼类捕捞量的波动现象，他提出了下述只包含两个种群的简单模型：

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(a - bP), \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d), \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $N(t)$ 和 $P(t)$ 分别为猎物和捕食者在时刻 t 的种群数量，a, b, c, d 都是正常数．无独有偶，1920 年 Lotka 在研究化学反应中反应物质的浓度变化时也导出了同样的方程 [12]，因此上述模型一般被称为 Lotka–Volterra 模型 (系统).

模型 (1.1) 很容易扩展到 n 个种群的情形，即

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $x_i(t)$ 为第 i 个种群在时刻 t 的数量，b_i 为第 i 个种群的自然增长率，$a_{ii} > 0$ 表示种内竞争对种群增长的限制作用，a_{ij} $(i \neq j)$ 表示种群之间的相互作用，一般来说没有符号限制，通过取不同符号的数值即可描述前述所有类型的种间关系．

Lotka–Volterra 模型成功地解释了生态系统中的种群数量波动现象，成为现代数学应用于生物学研究的范例．这一模型的改进和发展 (例如，进一步考虑延时、空间分布、年龄结构等因素的影响) 极大地扩展了生态学和种群动力学的研究手段，取得了丰富的成果 [5, 19]. 不仅如此，近年来它还被广泛用于物理学、化学、经济

学和金融学等其他领域，成为研究复杂系统内部竞争替代和演化动力学的有力工具 [14, 17, 18, 22].

特别值得指出的是，1997 年 Fukai 和 Tanaka 根据竞争神经元的传统膜动力学导出了以 Lotka–Volterra 方程描述的一类神经网络模型，为深入理解神经元的竞争与选择机制提供了数学基础 [7]. 随后，Asai 等学者报道了这一类型神经网络的 MOS 集成电路实现，为进一步的研究和工程应用提供了可能 [2]. 此外，连续时间的反馈型 (recurrent) 神经网络已被证明可通过坐标变换嵌入到 Lotka–Volterra 模型中 [17]. 这些事实表明，Lotka–Volterra 系统的分析方法与研究成果在神经网络这一新兴领域也有着重要的应用前景.

无论从理论兴趣还是应用价值出发，动力学性质分析尤其是稳定性分析都是 Lotka–Volterra 系统研究的核心内容. 长期以来，研究者们已对这一论题进行了广泛深入的研究，积累了大量文献，其中专著 [8, 9, 21, 23] 对 20 世纪 90 年代中期以前的主要研究成果从不同角度作了很好的总结.

但是，对 Lotka–Volterra 系统的早期研究主要集中在一些简单情形上，例如两种群或三种群的低维系统、参数不随时间变化的自治系统、不考虑延时的影响等，这些简化假设有效地降低了理论分析的难度，但也明显地限制了模型的适用范围，不仅计算结果不能与观察数据吻合，得到的定性结果也无法解释许多复杂的现象. 进一步的研究需要考虑更多的实际因素和更为一般的情形，理论分析的难度大大增加，对基本理论和研究方法提出了新的挑战.

周期系统，即所有参数均为周期函数的系统，是非自治系统中一类最重要的情形. 这一方面是因为周期函数相对来说比较简单，但更重要的是因为从环境条件变化到金融市场波动的一大类实际现象都可以用周期函数近似地描述. 因此，近年来周期动力系统的研究逐渐成为各种应用领域研究的热点，周期 Hopfield 神经网络的稳定性分析就是一例 [1, 13, 32]. 另一个必须考虑的实际因素是延时的影响. 信号的传递需要时间，效果的产生通常不是即时的，而是有时间的滞后，在数学模型中引入延时是对真实世界更为客观的反映. 综上所述，延时周期 Lotka–Volterra 系统的研究具有重要的现实意义，本论文将详细地讨论其动力学性质.

§1.2 模型描述与问题的提出

本论文研究的主要模型是包含 n 个种群的延时周期 Lotka–Volterra 系统. 它由

下述延时微分方程描述:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} x_j(t-s)d_s\mu_{ij}(t,s)\right], \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{1.2}$$

其中 $b_i(t)$ 和 $a_{ij}(t)$ 是以 $\omega > 0$ 为周期的连续函数，$a_{ii}(t) > 0$, 对任何固定的 $t \geq 0$, $d_s\mu_{ij}(t,s)$ 是广义测度且满足周期性条件 $d_s\mu_{ij}(t+\omega,s) = d_s\mu_{ij}(t,s)$, 存在与 t 无关的广义测度 $K_{ij}(s)$ 使得 $|d_s\mu_{ij}(t,s)| \leq |dK_{ij}(s)|$ 以及

$$\int_0^{\infty} |dK_{ij}(s)| < +\infty, \quad \int_0^{\infty} s|dK_{ij}(s)| < +\infty \tag{1.3}$$

对所有 $i, j = 1,2,\ldots,n$ 成立. 初始条件是

$$x_i(s) = \phi_i(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{1.4}$$

其中 $\phi_i(s)$ 是有界连续函数，且对所有 $s \leq 0$ 有 $\phi_i(s) > 0$.

上述模型中的延时具有非常一般的形式. 事实上，只要令 $d_s\mu_{ij}(t,s) = b_{ij}(t)\delta(s+\tau_{ij})ds + c_{ij}(t,s)ds$, 其中 $\delta(\cdot)$ 是 Dirac 的 δ 函数，对所有 $i, j = 1,2,\ldots,n$, $b_{ij}(t)$ 和 $\tau_{ij}(t)$ 是以 ω 为周期的连续函数，$c_{ij}(t+\omega,s) = c_{ij}(t,s)$, $\tau_{ij}(t) \geq 0$, 系统 (1.2) 就化为常见的包含离散延时和分布延时的形式:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\Bigg[&b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)x_j(t-\tau_{ij}(t)) \\ &- \sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} c_{ij}(t,s)x_j(t-s)ds\Bigg], \quad i = 1,2,\ldots,n.\end{aligned} \tag{1.5}$$

本论文不讨论系统 (1.2) 的一般解的存在性与唯一性，而总是假设该系统初值问题的解在 $[0,\infty)$ 上存在且唯一. 此外，系统 (1.2) 的满足初始条件 (1.4) 的一类解具有下述引理表明的重要性质.

引理 1　*系统 (1.2) 的满足初始条件 (1.4) 的解在 $[0,\infty)$ 上恒为正数.*

证明　由系统 (1.2) 的形式，我们有

$$\log x_i(t) - \log x_i(0) = \int_0^t \left[b_i(u) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u)x_j(u) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} x_j(u-s)d_s\mu_{ij}(u,s)\right]du.$$

当 t 有限时，上式右边也有限. 于是 $\log x_i(t) > -\infty$, 从而对所有 $t > 0$ 和 $i = 1,2,\ldots,n$ 有 $x_i(t) > 0$.　□

注 1　此引理表明, 如果初始条件为正, 那么解也恒为正数, 而永远不会等于零. 虽然如此, 但仍有可能随着时间的增长解无限趋向于零, 这意味着对应的种群趋于灭绝.

由引理 1, 我们可以自然地做如下定义.

定义 1　系统 (1.2) 的满足初始条件 (1.4) 的解称为系统 (1.2) 的一个正解.

在后面的章节中，我们将要讨论系统 (1.2) 的全局渐近稳定性和全局指数稳定性，这里先给出它们的定义.

定义 2　设 $x^*(t)$ 是系统 (1.2) 的一个解，且对该系统的任意正解 $x(t)$ 均有

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x^*(t)\|=0,$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的某个范数，则 $x^*(t)$ 是全局渐近稳定的.

定义 3　设 $x^*(t)$ 是系统 (1.2) 的一个解，存在常数 $\varepsilon>0$, 对该系统的任意正解 $x(t)$ 均有

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x^*(t)\|=O(e^{-\varepsilon t}),$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的某个范数，则 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的，且收敛速度为 ε.

从生态学意义上说，如果一个生态系统中的所有种群两两之间均为竞争关系或合作关系，就称为竞争系统或合作系统. 在本论文中，我们采用如下定义.

定义 4　在系统 (1.2) 中，如果对 $i=1,2,\ldots,n$ 有 $\int_0^\omega b_i(u)du>0$, 对所有 $i\neq j$ 有 $a_{ij}(t)\geq 0$, 并且对所有 $i,j=1,2,\ldots,n$ 有 $d_s\mu_{ij}(t,s)\geq 0$, 则该系统称为竞争系统.

定义 5　在系统 (1.2) 中，如果对 $i=1,2,\ldots,n$ 有 $\int_0^\omega b_i(u)du>0$, 对所有 $i\neq j$ 有 $a_{ij}(t)\leq 0$, 并且对所有 $i,j=1,2,\ldots,n$ 有 $d_s\mu_{ij}(t,s)\leq 0$, 则该系统称为合作系统.

周期 Lotka–Volterra 系统的正周期解，即每个分量都大于零的周期解，在生态学中的意义特别重要. 它意味着一个生态系统中的所有种群在周期性的波动中永远共存下去，没有一个种群趋于灭绝. 因此，这一问题引起了广泛的兴趣，针对 Lotka–Volterra 系统的多种具体形式，文献中已报道了不少结果，例如 [6,10,11,24–26,28,30]. 需要注意的是，尽管任何周期 Lotka–Volterra 系统都存在平凡的非负周期解 (最简单的情形就是所有分量均恒为零的解), 但正周期解的存在性却远非平凡. 一般来说，系统 (1.2) 的正周期解不一定存在.

目前文献中对周期 Lotka–Volterra 系统正周期解的研究，主要有两种思路：一是先证明系统的持久性 (permanence), 这保证了系统的解不会趋向于零，然后在此基础上证明系统收敛到一个稳定的正周期解；二是先使用叠合度理论的延拓定理等方法证明正周期解的存在性，然后再用微分方程的定性理论研究其稳定性. 显然，依照前一种思路，得到稳定性的同时也得到了存在性，这有其方便之处. 但一般来说，存在性只是稳定性的前提，正周期解存在并不意味着该正周期解一定是稳定的. 因此，后一种思路有助于得到更为宽松的存在性条件.

在第二章中，我们将依照后一种思路研究系统 (1.2) 的正周期解. 注意到大多数文献采用叠合度理论等相当复杂的方法证明正周期解的存在性，不仅证明过程不够简洁，这些理论本身的复杂性也在一定程度上掩盖了问题的本质. 在本论文中，我们不采用这些复杂的方法，而直接使用泛函分析中十分基本的 Schauder 不动点定理，不仅证明过程简洁明了，而且得到的存在性条件更加宽松和一般.

正周期解反映的是所有种群的“和平共处”，然而自然界中往往不是这种情况. 在长期的生物进化过程中，过去已经有而且未来还将继续有大量的物种在竞争中处于劣势而最终归于灭绝. 这种最终状态，反映在 Lotka–Volterra 模型中，就是可能有某些分量为零的非负周期解. 研究在怎样的条件下，周期 Lotka–Volterra 系统收敛到一个稳定的非负周期解，是一个饶有趣味且有普遍意义的问题. 遗憾的是，现有文献对这一问题的研究还相当缺乏. 仅有少量文献讨论了某些特定类型的非负周期解的稳定性，例如只有一个种群存活、其余种群全部灭绝的情形，讨论的范围也仅局限于竞争系统等特殊形式 [15, 16, 27]. 针对一般形式的 Lotka–Volterra 系统研究非负周期解的稳定性，尚未见文献报道.

研究一般的非负周期解的稳定性，困难在于为 Lotka–Volterra 系统构造的 Lyapunov 函数 (或泛函) 含有周期解各分量的对数函数，要求周期解的所有分量均不能为零. 为了克服这一困难，我们在第三章中不直接利用 Lyapunov 类型定理的结论，而是通过构造与 Lyapunov 函数有相似形式、但不涉及系统周期解的辅助函数，运用基本的数学分析方法直接证明非负周期解的稳定性.

§1.3 预备知识

M 矩阵是一类与动力系统的稳定性关系十分密切的矩阵. 它有很多重要的性质，专著 [4] 的第六章中罗列了多达 50 条相互等价的性质. 为了后面章节研究的需要，我们在这里简单地列出 M 矩阵的一些性质. 这些性质的证明可参见 [4].

引理 2 设 $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 且所有非对角元均不大于零，则“$C$ 是非奇异 M 矩阵”与下列任何一条命题都等价:

(a) C 的所有前主子式都大于零.

(b) C^{T} 是非奇异 M 矩阵.

(c) C 是正稳定的, 即 C 的所有特征值的实部都大于零.

(d) 存在各分量均大于零的向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $C\xi$ 的各分量都大于零.

(e) 存在对角元均大于零的对角阵 D 使得 $CD + DC^{\mathrm{T}}$ 是正定阵.

(f) C^{-1} 存在, 且所有元素均非负.

从性质 (b) 和 (d) 容易推出下面的引理. 它表明对非对角元非正的一类矩阵, 广义行对角占优 (即加权行对角占优) 与广义列对角占优是等价的.

引理 3 设 $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 且所有非对角元均不大于零, 则下列命题等价:

(a) 存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 使得 $\sum_{j=1}^{n} \xi_j c_{ij} > 0$ 对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立.

(b) 存在正常数 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 使得 $\sum_{j=1}^{n} \eta_i c_{ji} > 0$ 对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立.

在讨论系统 (1.2) 的正周期解的稳定性时, 将会用到下面一类函数.

定义 6 函数 $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 属于 H 类函数, 当且仅当: 对所有 $t > 0$ 有 $f(t) \geq 0$, 且对任何区间序列 $\{[s_i, t_i]\}$, 其中 $s_i > 0$, $[s_i, t_i] \cap [s_j, t_j] = \varnothing$, $t_i - s_i = t_j - s_j > 0$ $(i \neq j)$, 都有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{s_i}^{t_i} f(u)du = +\infty.$$

注 2 显然, 如果存在常数 $a > 0$, 使得对所有 $t > 0$ 有 $f(t) > a$, 那么一定有 $f \in H$. 反之不一定成立.

在讨论系统 (1.2) 的非负周期解的稳定性时, 注意到下面的简单事实对启发证明的思路有很大帮助.

引理 4 设 $\{f_n\}$ 是定义在 $[0, \omega]$ 上的一致有界、等度连续函数序列, 其中 $\omega > 0$, 且满足

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\omega} |f_n(t)|dt = 0, \tag{1.6}$$

则 $f_n \to 0$ 在 $[0, \omega]$ 上一致成立.

证明 如果结论不成立, 则存在常数 $\varepsilon_0 > 0$, 对任何正整数 k, 存在相应的 $t_k \in [0, \omega]$ 和 $n_k > k$ 使得 $|f_{n_k}(t_k)| \geq \varepsilon_0$. 再由 $\{f_n\}$ 的等度连续性, 存在常数 $\delta > 0$

使得只要满足 $t_k - \delta \le t \le t_k + \delta$ 就有

$$|f_{n_k}(t)| \ge \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

于是有

$$\int_0^\omega |f_{n_k}(t)| dt \ge \delta \frac{\varepsilon_0}{2} > 0.$$

这与假设 (1.6) 式矛盾. 故结论成立. $\square$

第二章　正周期解的存在性与稳定性

§2.1　正周期解的存在性

在这一节中，我们先用 Schauder 不动点定理证明关于系统 (1.2) 正周期解的存在性定理，然后对仅包含有限延时的情形，证明有类似形式但更为宽松的存在性条件，最后对竞争系统与合作系统两种重要的特殊情形，分别导出两个推论.

为方便起见，我们做如下记号约定：$f^+ = \max\{0, f\}$, $f^- = \min\{0, f\}$, $[f]_m = \sup_t f(t)$, $[f]_l = \inf_t f(t)$. 首先证明下述主要定理.

定理 1　*如果存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, 使得下面两个条件*

$$b_i(t) - \xi_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j a_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty [d_s\mu_{ij}(t,s)]^- < 0, \quad \text{对所有 } t > 0, \tag{2.1}$$

$$\int_0^\omega \left\{ b_i(u) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j a_{ij}^+(u) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty [d_s\mu_{ij}(u,s)]^+ \right\} du > 0, \tag{2.2}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，则系统 (1.2) 至少存在一个正的 ω 周期解.

证明　令 $C = C((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ 为装备以下范数的 Banach 空间

$$\|\phi\| = \max_i \sup_{-\infty<\theta\leq 0} |\phi_i(\theta)|.$$

记

$$\begin{aligned}
\xi &= \max_i \xi_i, \\
\gamma_1 &= \max_i \sup_t |b_i(t)|, \\
\gamma_2 &= \max_{i,j} \sup_t |a_{ij}(t)|, \\
\gamma_3 &= \max_{i,j} \sup_t \int_0^\infty |d_s\mu_{ij}(t,s)|, \\
K &= \exp\{[\gamma_1 + (\gamma_2+\gamma_3)\xi]\omega\}, \\
L &= \xi[\gamma_1 + (\gamma_2+\gamma_3)\xi],
\end{aligned}$$

并选取正常数 η 使得

$$\eta < \min_i \left\{ \frac{\int_0^\omega \left\{ b_i(u) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j a_{ij}^+(u) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty [d_s\mu_{ij}(u,s)]^+ \right\} du}{K \int_0^\omega a_{ii}(u) du}, \xi_i \right\}. \tag{2.3}$$

记

$$\Omega=\{x(\theta)\in C\colon \eta\le x_i(\theta)\le\xi_i\,(i=1,2,\dots,n),\|\dot{x}(\theta)\|\le L\},$$

容易验证 Ω 是 C 中的凸紧集.

定义从 Ω 到 C 的映射 T 为

$$T\colon \phi(\theta)\mapsto x(\theta+\omega,\phi),$$

其中 $x(t)=x(t,\phi)$ 是系统 (1.2) 的满足初始条件 $x_i(\theta)=\phi_i(\theta)$ $(-\infty<\theta\le 0)$ 的解.

为了应用 Schauder 不动点定理，我们只需证明 $T\Omega\subset\Omega$, 即，如果 $\phi\in\Omega$, 那么 $x\in\Omega$. 假设存在 $t_0\ge 0$ 和某个下标 i_0 使得

$$x_{i_0}(t_0)=\xi_{i_0},\qquad x_{i_0}(t)\le\xi_{i_0},\quad \text{对所有 } t<t_0,$$

且对任何 $j\ne i_0$ 有

$$x_j(t)\le\xi_j,\quad \text{对所有 } t\le t_0.$$

直接计算并利用 (2.1) 式可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\log x_{i_0}(t)}{dt}\right|_{t=t_0}&=b_{i_0}(t_0)-\sum_{j=1}^n a_{i_0j}(t_0)x_j(t_0)-\sum_{j=1}^n\int_0^\infty x_j(t_0-s)d_s\mu_{i_0j}(t_0,s)\\&\le b_{i_0}(t_0)-\xi_{i_0}a_{i_0i_0}(t_0)-\sum_{j=1,\,j\ne i_0}^n\xi_j a_{i_0j}^-(t_0)-\sum_{j=1}^n\xi_j\int_0^\infty[d_s\mu_{i_0j}(t_0,s)]^-\\&<0.\end{aligned}$$

这意味着对所有 $0<t\le\omega$ 和 $i=1,2,\dots,n$ 都有 $x_i(t)\le\xi_i$.

我们还需证明 $x_i(t)\ge\eta$ 对所有 $0<t\le\omega$ 和 $i=1,2,\dots,n$ 成立. 如果结论不真，则存在 $0<t_1\le\omega$ 和某个下标 i_1 使得 $x_{i_1}(t_1)<\eta$, 那么对任何 $0<s\le\omega$ 有

$$x_{i_1}(t_1-s)=x_{i_1}(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1-s}^{t_1}\frac{d\log x_{i_1}(u)}{du}du\right\}<K\eta.$$

直接计算并利用 (2.3) 式便得到

$$\begin{aligned}\int_{t_1-\omega}^{t_1}\frac{d\log x_{i_1}(u)}{du}du&=\int_{t_1-\omega}^{t_1}\left\{b_{i_1}(u)-\sum_{j=1}^n a_{i_1j}(u)x_j(u)-\sum_{j=1}^n\int_0^\infty x_j(u-s)d_s\mu_{i_1j}(u,s)\right\}du\\&\ge\int_0^\omega\left\{b_{i_1}(u)-\sum_{j=1,\,j\ne i_1}^n\xi_j a_{i_1j}^+(u)-\sum_{j=1}^n\xi_j\int_0^\infty[d_s\mu_{i_1j}(u,s)]^+\right\}du\\&\quad-K\eta\int_0^\omega a_{i_1i_1}(u)du\\&>0.\end{aligned}$$

从而有

$$x_{i_1}(t_1) = x_{i_1}(t_1-\omega)\exp\left\{\int_{t_1-\omega}^{t_1}\frac{d\log x_{i_1}(u)}{du}du\right\} > \eta.$$

这与假设 $x_{i_1}(t_1) < \eta$ 矛盾. 因此对所有 $0 < t \le \omega$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 有 $x_i(t) \ge \eta$. 此外，容易验证 $\|\dot{x}(\theta+\omega)\| \le L$. 这样，我们就证明了 $T\Omega \subset \Omega$.

最后，由 Schauder 不动点定理知道，存在 $\phi^* \in \Omega$ 使得 $T\phi^* = \phi^*$. 从而 $x(t, \phi^*) = x(t, T\phi^*)$, 即

$$x(t,\phi^*) = x(t+\omega, \phi^*).$$

故 $x(t, \phi^*)$ 就是系统 (1.2) 的一个正的 ω 周期解. □

注 3　由此定理的证明可以得到正周期解 $x^*(t)$ 的一个上、下界的估计:

$$\eta \le x_i^*(t) \le \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

这个估计在应用中很有用.

特别地，对于仅包含有限延时的情形，即考虑系统

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^{\sigma_{ij}} x_j(t-s)d_s\mu_{ij}(t,s)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.4}$$

其中 $\sigma_{ij} > 0$ 是有限常数，下面的定理给出了比定理 1 更为宽松的条件.

定理 2　如果存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, 使得下面两个条件

$$b_i(t) - \xi_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \xi_j a_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^{n}\xi_j\int_0^{\infty}[d_s\mu_{ij}(t,s)]^- < 0, \quad 对所有\ t > 0,$$

$$\int_0^{\omega}\left\{b_i(u) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n}\xi_j a_{ij}^+(u) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n}\xi_j\int_0^{\infty}[d_s\mu_{ij}(u,s)]^+\right\}du > 0,$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，则系统 (2.4) 至少存在一个正的 ω 周期解.

证明　我们使用与定理 1 相似的证明思路. 只需注意，为证明对所有 $0 < t \le \omega$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 有 $x_i(t) \ge \eta$, 可令

$$\sigma = \max_{i,j}\sigma_{ij},$$

$$K_1 = \exp\{[\gamma_1 + (\gamma_2+\gamma_3)\xi](\omega+\sigma)\},$$

则对任何 $0 < s \le \omega + \sigma$ 有

$$x_{i_1}(t_1 - s) = x_{i_1}(t_1) \exp\left\{ - \int_{t_1-s}^{t_1} \frac{d \log x_{i_1}(u)}{du} du \right\} < K_1 \eta.$$

于是类似地得到

$$\int_{t_1-\omega}^{t_1} \frac{d \log x_{i_1}(u)}{du} du \ge \int_0^{\omega} \left\{ b_{i_1}(u) - \sum_{j=1,\, j\ne i_1}^{n} \xi_j a_{i_1 j}^{+}(u) - \sum_{j=1,\, j\ne i_1}^{n} \xi_j \int_0^{\sigma_{i_1 j}} [d_s \mu_{i_1 j}(u,s)]^{+} \right\} du$$
$$- K_1 \eta \left\{ \int_0^{\omega} \left[a_{i_1 i_1}(u) + \int_0^{\sigma_{i_1 i_1}} [d_s \mu_{i_1 i_1}(u,s)]^{+} \right] du \right\}.$$

容易选择正常数 η 使得上述不等式右边大于零. 从而用与定理 1 相同的推理过程便可证得结论. □

对于竞争系统与合作系统的特殊情形, 不难从定理 1 分别得到两个推论. 首先, 对于竞争系统, 有

推论 1　设系统 (1.2) 为竞争系统. 如果

$$\int_0^{\omega} \left\{ b_i(u) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} a_{ij}(u) \left[\frac{b_j}{a_{jj}} \right]_m - \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} d_s \mu_{ij}(u,s) \left[\frac{b_j}{a_{jj}} \right]_m \right\} du > 0 \tag{2.5}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立, 则该系统至少存在一个正的 ω 周期解.

证明　由竞争系统的定义 (定义 4), 定理 1 中的两个条件 (2.1) 和 (2.2) 成为

$$b_i(t) - \xi_i a_{ii}(t) \le 0, \quad 对所有\ t > 0,$$

$$\int_0^{\omega} \left\{ b_i(u) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \xi_j a_{ij}(u) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^{\infty} d_s \mu_{ij}(u,s) \right\} du > 0.$$

令 $\xi_i = [b_i / a_{ii}]_m$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 则上述两个条件均成立. 由定理 1 即证得结论. □

对于合作系统, 则有

推论 2　设系统 (1.2) 为合作系统. 如果存在正常数 $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ 使得

$$\zeta_i a_{ii}(t) + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \zeta_j a_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \int_0^{\infty} d_s \mu_{ij}(t,s) > 0 \tag{2.6}$$

对所有 $t > 0$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立, 那么系统 (1.2) 至少存在一个正的 ω 周期解.

证明　由合作系统的定义 (定义 5), 定理 1 中的条件 (2.2) 成为

$$\int_0^\omega b_i(u)du > 0,$$

这已包含在定义中. 条件 (2.1) 则成为

$$b_i(t) - \xi_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j a_{ij}(t) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty d_s\mu_{ij}(t,s) < 0, \quad \text{对所有 } t > 0. \tag{2.7}$$

选取正常数 a 使得

$$a > \max_i \sup_t \frac{b_i(t)}{\zeta_i a_{ii}(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \zeta_j a_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \int_0^\infty d_s\mu_{ij}(t,s)},$$

并且令 $\xi_i = a\zeta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 则 (2.7) 式成立. 由定理 1 即证得结论. □

§2.2　存在性条件的比较

在这一节中，我们把上一节得到的定理和推论与文献中的若干结果进行比较. 通过比较，可以看出我们得到的存在性条件更加宽松，适用范围更广.

在文献 [25] 中，作者研究了下述包含离散延时和分布延时的周期 Lotka–Volterra 系统:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\Bigg[& b_i(t) - a_{ii}(t)x_j(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)x_j(t-\tau_{ij}(t)) \\ & - \sum_{j=1}^{n}\int_0^{\sigma_{ij}} c_{ij}(t,s)x_j(t-s)ds\Bigg], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $\sigma_{ij} > 0$ 是有限常数. 显然，这是系统 (2.4) 的一种具体形式. 作者应用有限延时泛函微分方程的 Lyapunov–Razumikhim 定理证明系统的持久性，进而得到如下结果.

命题 1　如果存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 和 α, 使得下面两个条件

$$b_i(t) - \xi_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1}^{n}(1+\alpha)\xi_j b_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^{n}(1+\alpha)\xi_j \int_0^{\sigma_{ij}} c_{ij}^-(t,s)ds \le 0, \quad \text{对所有 } t > 0,$$

$$\int_0^\omega \left\{ b_i(u) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j b_{ij}^+(t) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j \int_0^{\sigma_{ij}} c_{ij}^+(t,s)ds \right\} du > 0,$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立, 则系统 (2.8) 至少存在一个正的 ω 周期解.

显然，对系统 (2.8) 应用定理 2 就得到上述命题. 文献 [25] 中使用的方法受限于有限延时的假设，能否将命题 1 推广到无穷延时系统是作者提出的开放性问题之一. 定理 1 完满地解决了这个问题.

在文献 [10] 中，作者研究了具有下述形式的周期竞争系统：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_j(t) - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}(t)\int_0^{T_{ij}} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.9}$$

其中 $T_{ij} > 0$ 是有限常数或无穷大，$\int_0^{T_{ij}} K_{ij}(s)ds = 1$ $(i \neq j)$. 应用叠合度理论的延拓定理，作者证明了如下结果.

命题 2　定义记号 $\overline{f} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(u)du$. 设方程组

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}e^{y_j} = \overline{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.10}$$

有唯一解 $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 并且

$$\overline{b}_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \overline{a}_{ij}\left[\frac{b_j}{a_{jj}}\right]_m > 0 \tag{2.11}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，则系统 (2.9) 至少存在一个正的 ω 周期解.

显然，将推论 1 中的条件 (2.5) 应用于系统 (2.9) 就得到条件 (2.11). 并且，根据推论 1, 命题 2 中的条件 (2.10) 可以去掉而结论仍然成立.

在文献 [11] 中，作者研究了具有下述形式的周期合作系统：

$$\begin{aligned}\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\Bigg[&b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\int_0^{\tau_j} x_j(t-s)d\mu_j(s)\Bigg], \quad i = 1, 2, \ldots, n,\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $\tau_j > 0$ 是有限常数或无穷大，$\mu_j(\tau_j+) - \mu_j(0-) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. 还是应用叠合度理论的延拓定理，作者证明了如下结果.

命题 3　定义记号 $\overline{f} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(u)du$. 设方程组

$$\overline{b}_i - 2\overline{a}_{ii}e^{y_i} + \sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij} + \overline{b}_{ij})e^{y_j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.13}$$

有唯一解 $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 并且

$$[a_{ii}]_l - \left\{ \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [a_{ji} + b_{ji}]_m + [b_{ii}]_m \right\} > 0 \tag{2.14}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立, 则系统 (2.12) 至少存在一个正的 ω 周期解.

如果条件 (2.14) 成立，由引理 3 知道，存在正常数 $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ 使得

$$\zeta_i[a_{ii}]_l - \left\{ \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \zeta_j[a_{ij} + b_{ij}]_m + \zeta_i[b_{ii}]_m \right\} > 0$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立. 显然，推论 2 中的条件 (2.6) 比上述条件更为宽松. 并且，根据推论 2, 命题 3 中的条件 (2.13) 可以去掉而结论仍然成立.

§2.3　正周期解的稳定性

在这一节中，我们讨论系统 (1.5) 的正周期解的稳定性. 除了在第一章中所作假设，我们另外约定

$$\int_0^{\infty} s|c_{ij}(t,s)|ds < +\infty, \tag{2.15}$$

且 $\tau_{ij}(t)$ 为连续可微函数，$\dot{\tau}_{ij}(t) < 1$, 这意味着 $\psi_{ij}(t) = t - \tau_{ij}(t)$ 存在反函数 $\psi_{ij}^{-1}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. 特别地，当 τ_{ij} 与 t 无关时，$\psi_{ij}^{-1}(t) = t + \tau_{ij}$. 与定义 4 和定义 5 类似，我们有如下定义.

定义 7　在系统 (1.5) 中, 如果对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 有 $\int_0^{\omega} b_i(u)du > 0$, 对所有 $i \neq j$ 有 $a_{ij}(t) \geq 0$, 并且对所有 $i, j = 1, 2, \ldots, n$ 有 $b_{ij}(t) \geq 0$ 和 $c_{ij}(t,s) \geq 0$, 则该系统称为竞争系统.

定义 8　在系统 (1.5) 中, 如果对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 有 $\int_0^{\omega} b_i(u)du > 0$, 对所有 $i \neq j$ 有 $a_{ij}(t) \leq 0$, 并且对所有 $i, j = 1, 2, \ldots, n$ 有 $b_{ij}(t) \leq 0$ 和 $c_{ij}(t,s) \leq 0$, 则该系统称为合作系统.

首先考虑如果已知系统 (1.5) 存在一个正的 ω 周期解，在怎样的条件下可以保证系统收敛到该周期解. 我们有下面的定理.

定理 3　设系统 (1.5) 存在一个正的 ω 周期解 $x^*(t)$, 并且存在正常数 $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ 使得

$$\beta_i(t) = \zeta_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \zeta_j|a_{ji}(t)| - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1 - \dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))} - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \int_0^{\infty} |c_{ji}(t+s, s)|ds \in H \tag{2.16}$$

对 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则 $x^*(t)$ 是全局渐近稳定的．更进一步，如果存在常数 $\varepsilon>0$ 和 $p>0$ 使得

$$|\log x_i(t)-\log x_i^*(t)|\le p|x_i(t)-x_i^*(t)| \tag{2.17}$$

以及

$$\begin{aligned}\zeta_i(a_{ii}(t)-\varepsilon p)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t)}e^{\varepsilon(\psi_{ji}^{-1}(t)-t)}&\\-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^\infty|c_{ji}(t+s,s)|e^{\varepsilon s}ds\ge 0&\end{aligned} \tag{2.18}$$

对所有 $t>0$ 和 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的，且收敛速度为 ε.

证明　令 $w_i(t)=x_i(t)-x_i^*(t)$, $z_i(t)=\log x_i(t)-\log x_i^*(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 并定义函数

$$\begin{aligned}L(t)=&\sum_{i=1}^{n}\zeta_i|z_i(t)|+\sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t}\frac{|b_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(s))|}{1-\dot{\tau}_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(s))}|w_j(s)|ds\\&+\sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i\int_0^\infty\int_{t-s}^{t}|c_{ij}(\theta+s,s)||w_j(\theta)|d\theta ds.\end{aligned}$$

由 (2.15) 式和初始条件的有界性，容易证明 $L(0)$ 是有限的．对 $L(t)$ 沿着系统 (1.5) 的解求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt}=&\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\,\mathrm{sign}(z_i(t))\Bigg[-a_{ii}(t)w_i(t)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}a_{ij}(t)w_j(t)-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)w_j(t-\tau_{ij}(t))\\&-\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty c_{ij}(t,s)w_j(t-s)ds\Bigg]+\sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i\Bigg[\frac{|b_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(t))}|w_j(t)|\\&-|b_{ij}(t)||w_j(t-\tau_{ij}(t))|\Bigg]+\sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i\Bigg[\int_0^\infty|c_{ij}(t+s,s)||w_j(t)|ds\\&-\int_0^\infty|c_{ij}(t,s)||w_j(t-s)|ds\Bigg]\\\le&-\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\zeta_i a_{ii}(t)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))}\\&-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^\infty|c_{ji}(t+s,s)|ds\Bigg]|w_i(t)|\\=&-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)|w_i(t)|.\end{aligned}$$

对上式两边从 0 到 $+\infty$ 积分并整理得

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty}\beta_i(t)|w_i(t)|dt \le L(0) < +\infty. \tag{2.19}$$

由 $\frac{dL(t)}{dt} \le 0$ 可得 $L(t)$ 的有界性，这意味着 $x(t)$ 是有界的. 再由系统 (1.5) 的形式容易知道 $x(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续. 再结合 $\beta_i(t) \in H$, 从 (2.19) 式就可推出

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|x(t)-x^*(t)| = 0.$$

故 $x^*(t)$ 是全局渐近稳定的.

下一步，我们证明指数稳定性. 定义函数

$$\begin{aligned} L_1(t) = &\sum_{i=1}^{n}\zeta_i|z_i(t)|e^{\varepsilon t} + \sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t}\frac{|b_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(s))|}{1-\dot{\tau}_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(s))}|w_j(s)|e^{\varepsilon\psi_{ij}^{-1}(s)}ds \\ &+ \sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i\int_{0}^{\infty}\int_{t-s}^{t}|c_{ij}(\theta+s,s)||w_j(\theta)|e^{\varepsilon(\theta+s)}d\theta ds. \end{aligned}$$

对 $L_1(t)$ 沿着系统 (1.5) 的解求导，得到

$$\begin{aligned} \frac{dL_1(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\zeta_i\,\mathrm{sign}(z_i(t))e^{\varepsilon t}\Bigg[\varepsilon z_i(t) - a_{ii}(t)w_i(t) - \sum_{j=1,\,j\ne i}^{n}a_{ij}(t)w_j(t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)w_j(t-\tau_{ij}(t)) - \sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{\infty}c_{ij}(t,s)w_j(t-s)ds\Bigg] \\ &\quad + \sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i e^{\varepsilon t}\left[\frac{|b_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ij}(\psi_{ij}^{-1}(t))}|w_j(t)|e^{\varepsilon(\psi_{ij}^{-1}(t)-t)} - |b_{ij}(t)||w_j(t-\tau_{ij}(t))|\right] \\ &\quad + \sum_{i,\,j=1}^{n}\zeta_i e^{\varepsilon t}\left[\int_{0}^{\infty}|c_{ij}(t+s,s)||w_j(t)|e^{\varepsilon s}ds - \int_{0}^{\infty}|c_{ij}(t,s)||w_j(t-s)|ds\right] \\ &\le -e^{\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\zeta_i(a_{ii}(t)-\varepsilon p) - \sum_{j=1,\,j\ne i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)| - \sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))}e^{\varepsilon(\psi_{ji}^{-1}(t)-t)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_{0}^{\infty}|c_{ji}(t+s,s)|e^{\varepsilon s}ds\Bigg]|w_i(t)| \\ &\le 0. \end{aligned}$$

这意味着 $L_1(t)$ 是单调非增的. 注意 $L_1(t)$ 的第一项，便有

$$\sum_{i=1}^{n}\zeta_i|\log x_i(t) - \log x_i^*(t)| \le L_1(0)e^{-\varepsilon t}. \tag{2.20}$$

又由 $x^*(t)$ 的全局渐近稳定性知道，存在正常数 m_1 和 m_2 使得

$$m_1 \le x_i(t) \le m_2$$

对所有 $t > 0$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立. 从而存在正常数 q 使得

$$|x_i(t) - x_i^*(t)| \le q|\log x_i(t) - \log x_i^*(t)| \tag{2.21}$$

对所有 $t > 0$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立. 结合 (2.20) 式和 (2.21) 式得到

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta_i |x_i(t) - x_i^*(t)| \le qL_1(0)e^{-\varepsilon t}. \tag{2.22}$$

定义范数

$$\|x\|_{\{\zeta,1\}} = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i |x_i|,$$

则 (2.22) 式表明

$$\|x(t) - x^*(t)\|_{\{\zeta,1\}} = O(e^{-\varepsilon t}).$$

故 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的，且收敛速度为 ε. □

注 4　如果正周期解 $x^*(t)$ 是全局渐近稳定的，那么存在正常数 m_1 和 m_2 使得 $m_1 \le x_i(t) \le m_2$ 对所有 $t > 0$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立. 由此可直接得到满足条件 (2.17) 的正常数 p 的存在性.

我们指出，文献 [3,25,26] 也提出了与 (2.16) 式类似的条件，并得到了一些全局稳定性结果. 但是，上述文献均未讨论指数稳定性问题，而定理 3 不仅证明了正周期解的指数稳定性，而且给出了收敛速度.

现在，将定理 1 和定理 3 结合起来，就得到如下定理.

定理 4　如果存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ 使得下列条件

$$b_i(t) - \xi_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \xi_j a_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty c_{ij}^-(t,s)ds < 0, \quad 对所有\ t > 0,$$

$$\int_0^\omega \left[b_i(u) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \xi_j a_{ij}^+(u) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^+(u) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty c_{ij}^+(u,s) \right] du > 0,$$

$$\zeta_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \zeta_j |a_{ji}(t)| - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1 - \dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))} - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \int_0^\infty |c_{ji}(t+s,s)|ds \in H$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，则系统 (1.5) 存在一个全局渐近稳定的正的 ω 周期解 $x^*(t)$. 更进一步，如果存在常数 $\varepsilon > 0$ 和 $p > 0$ 使得

$$|\log x_i(t) - \log x_i^*(t)| \le p|x_i(t) - x_i^*(t)|$$

以及

$$\zeta_i(a_{ii}(t)-\varepsilon p)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t)}e^{\varepsilon(\psi_{ji}^{-1}(t)-t)}$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^{\infty}|c_{ji}(t+s,s)|e^{\varepsilon s}ds\geq 0$$

对所有 $t>0$ 和 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的，且收敛速度为 ε.

特别地，对于竞争系统与合作系统，我们分别有下面的推论.

推论 3　设系统 (1.5) 为竞争系统. 如果存在正常数 $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$ 使得下面两个条件

$$\int_0^{\omega}\left\{b_i(u)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}a_{ij}(u)\left[\frac{b_j}{a_{jj}}\right]_m-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(u)\left[\frac{b_j}{a_{jj}}\right]_m-\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty}c_{ij}(u,s)ds\left[\frac{b_j}{a_{jj}}\right]_m\right\}du>0,$$

$$\zeta_i a_{ii}(t)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))}-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^{\infty}|c_{ji}(t+s,s)|ds\in H$$

对 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则系统 (1.5) 存在一个全局渐近稳定的正的 ω 周期解 $x^*(t)$. 更进一步，如果存在常数 $\varepsilon>0$ 和 $p>0$ 使得

$$|\log x_i(t)-\log x_i^*(t)|\leq p|x_i(t)-x_i^*(t)|$$

以及

$$\zeta_i(a_{ii}(t)-\varepsilon p)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t)}e^{\varepsilon(\psi_{ji}^{-1}(t)-t)}$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^{\infty}|c_{ji}(t+s,s)|e^{\varepsilon s}ds\geq 0$$

对所有 $t>0$ 和 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的，且收敛速度为 ε.

证明　由推论 1 和定理 3 即得结论.　□

推论 4　设系统 (1.5) 为合作系统. 如果存在正常数 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$ 使得下面两个条件

$$\xi_i a_{ii}(t)+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\xi_j a_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j b_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int_0^{\infty}c_{ij}(t,s)ds>0,\quad \text{对所有 } t>0,$$

$$\zeta_i a_{ii}(t)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))}-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^{\infty}|c_{ji}(t+s,s)|ds\in H$$

对 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则系统 (1.5) 存在一个全局渐近稳定的正的 ω 周期解 $x^*(t)$. 更进一步，如果存在常数 $\varepsilon>0$ 和 $p>0$ 使得

$$|\log x_i(t)-\log x_i^*(t)|\leq p|x_i(t)-x_i^*(t)|$$

以及

$$\begin{aligned}\zeta_i(a_{ii}(t)-\varepsilon p)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\zeta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\frac{|b_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\psi_{ji}^{-1}(t)}e^{\varepsilon(\psi_{ji}^{-1}(t)-t)}\\-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^{\infty}|c_{ji}(t+s,s)|e^{\varepsilon s}ds\geq 0\end{aligned}$$

对所有 $t>0$ 和 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的，且收敛速度为 ε.

证明　由推论 2 和定理 3 即得结论.　□

第三章　非负周期解的稳定性

§3.1　解的有界性

在第三章中，我们已经详细讨论了延时周期 Lotka–Volterra 系统的正周期解问题. 正如第一章中所述，非负周期解的稳定性有着更为普遍的生态学意义，但同时也需要更高的处理技巧. 在这一章中，我们将使用基本的分析工具，以颇具技巧性的方式解决这一问题.

在下一节中我们将会看到，保证系统 (1.2) 的任意正解的有界性是证明非负周期解稳定性的关键. 因此，在这一节中我们先来讨论这个问题. 下述有界性定理的证明是直观且直接的.

定理 5　如果存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 使得

$$\xi_i a_{ii}(t) + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \xi_j a_{ij}^{-}(t) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^{\infty} [d_s\mu_{ij}(t,s)]^{-} > 0 \tag{3.1}$$

对所有 $0 \le t < \omega$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，则系统 (1.2) 的任意正解 $x(t)$ 是有界的，即存在正常数 M_i 使得 $x_i(t) \le M_i$ 对所有 $t > 0$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立. 并且，$x(t)$ 是一致连续的.

证明　令

$$\alpha_i = \inf_t \left\{ \xi_i a_{ii}(t) + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \xi_j a_{ij}^{-}(t) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^{\infty} [d_s\mu_{ij}(t,s)]^{-} \right\} > 0,$$

$$H = \max_i \left\{ \frac{\sup_{s\le 0} \phi_i(s)}{\xi_i} \right\},$$

$$\lambda > \max_i \left\{ \sup_{0\le t<\omega} \left[\frac{b_i^{+}(t)}{\alpha_i} \right], H \right\},$$

及 $M_i = \lambda \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 那么我们有 $\phi_i(s) \le H\xi_i \le \lambda\xi_i = M_i$ 对所有 $s \le 0$ 成立. 假设存在 $t_0 \ge 0$ 和某个下标 i_0 使得

$$x_{i_0}(t_0) = M_{i_0}, \qquad x_{i_0}(t) \le M_{i_0}, \quad \text{对所有 } t < t_0,$$

且对任何 $j \neq i_0$ 有

$$x_j(t) \le M_j, \quad \text{对所有 } t \le t_0.$$

直接计算并利用前述假设得

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\log x_{i_0}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} &= b_{i_0}(t_0) - \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}(t_0)x_j(t_0) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} x_j(t_0-s)d_s\mu_{i_0 j}(t_0,s) \\ &\le b_{i_0}(t_0) - a_{i_0 i_0}(t_0)M_{i_0} - \sum_{j=1,\, j\ne i_0}^{n} a_{i_0 j}^{-}(t_0)M_j - \sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} M_j[d_s\mu_{i_0 j}(t_0,s)]^{-} \\ &= b_{i_0}(t_0) - \lambda\left\{\xi_{i_0}a_{i_0 i_0}(t_0) + \sum_{j=1,\, j\ne i_0}^{n}\xi_j a_{i_0 j}^{-}(t_0) + \sum_{j=1}^{n}\xi_j\int_0^{\infty}[d_s\mu_{i_0 j}(t_0,s)]^{-}\right\} \\ &\le b_{i_0}(t_0) - \lambda\alpha_{i_0} < 0,\end{aligned}$$

这意味着对所有 $t>0$ 和 $i=1,2,\ldots,n$ 都有 $x_i(t)\le M_i$. 因此，$x(t)$ 是有界的. 更进一步，由系统 (1.2) 的形式，容易验证 $x(t)$ 的导函数也是有界的. 从而 $x(t)$ 是一致连续的. □

注 5 此定理的证明给出了对 $x(t)$ 的上界的一个估计. 但需要指出的是，在 M_i 的定义中用到了依赖于初始条件的参数 H, 从而降低了这一估计的实用性. 但是，大部分实际应用只涉及有限延时系统，对于这种情形，事实上可以得到一个与初始条件无关的对 $x(t)$ 的渐进上界的估计. 具体结果和证明可参看文献 [31] 用类似方法得到，在此不再赘述.

§3.2 稳定性定理

现在我们来讨论系统 (1.2) 的非负周期解的稳定性. 首先考虑，如果系统 (1.2) 的正解的有界性已经得到保证，在怎样的条件下该系统的任意正解会收敛到一个非负的 ω 周期解. 对此，我们有如下定理.

定理 6 设系统 (1.2) 的任意正解都是有界的. 如果存在正常数 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 使得

$$\eta_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n}\eta_j|a_{ji}(t)| - \sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_0^{\infty}|dK_{ji}(s)| > 0 \tag{3.2}$$

对所有 $0\le t<\omega$ 和 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则系统 (1.2) 存在一个全局渐近稳定的非负的 ω 周期解.

证明 令 $w_i(t)=x_i(t+\omega)-x_i(t)$, $z_i(t)=\log x_i(t+\omega)-\log x_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 并定义函数

$$L(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i|z_i(t)| + \sum_{i,j=1}^{n}\eta_i\int_0^{\infty}\int_{t-s}^{t}|w_j(\theta)|\,d\theta\,|dK_{ij}(s)|.$$

由 (2.15) 式和初始条件的有界性，容易证明 $L(0)$ 是有限的. 再令

$$\beta=\min_i\inf_t\left\{\eta_i a_{ii}(t)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\eta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_0^\infty|dK_{ji}(s)|\right\}>0.$$

对 $L(t)$ 沿着系统 (1.2) 的解求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt}&=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\,\mathrm{sign}(z_i(t))\left[-a_{ii}(t)w_i(t)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}a_{ij}(t)w_j(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty w_j(t-s)d_s\mu_{ij}(t,s)\right]\\&\quad+\sum_{i,\,j=1}^{n}\eta_i\left[\int_0^\infty|w_j(t)||dK_{ij}(s)|-\int_0^\infty|w_j(t-s)||dK_{ij}(s)|\right]\\&\le\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left[-a_{ii}(t)|w_i(t)|+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}|a_{ij}(t)||w_j(t)|+\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty|w_j(t-s)||dK_{ij}(s)|\right]\\&\quad+\sum_{i,\,j=1}^{n}\eta_i\left[\int_0^\infty|w_j(t)||dK_{ij}(s)|-\int_0^\infty|w_j(t-s)||dK_{ij}(s)|\right]\\&=-\sum_{i=1}^{n}\left[\eta_i a_{ii}(t)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\eta_j|a_{ji}(t)|-\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_0^\infty|dK_{ji}(s)|\right]|w_i(t)|\\&\le-\beta\|w(t)\|,\end{aligned}$$

其中 $\|w(t)\|=\sum_{i=1}^{n}|w_i(t)|$. 对上式两边从 0 到 $+\infty$ 积分并利用 $L(t)\ge 0$ 得

$$\int_0^\infty\|w(t)\|dt\le\frac{1}{\beta}L(0)<+\infty.$$

注意到 $w(t)$ 的定义，可将上式重写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\omega\|x(t+n\omega)-x(t+(n-1)\omega)\|dt<+\infty.$$

由 Cauchy 收敛原理可知，$x(t+n\omega)$ 在 $L^1[0,\omega]$ 中收敛. 由 $x(t)$ 的有界性和系统 (1.2) 的形式，容易证明 $x(t)$ 是一致连续的. 因此，函数序列 $\{x(t+n\omega)\}$ 一致有界且等度连续. 于是，由 Arzéla–Ascoli 定理，存在一个子序列 $\{x(t+n_k\omega)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 的任意紧集上一致收敛. 记此极限为 $x^*(t)$. 显然，$x^*(t)$ 也是 $\{x(t+n\omega)\}$ 在 L^1 中的极限，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\omega\|x(t+n\omega)-x^*(t)\|dt=0.$$

令 $f_n(t)=x(t+n\omega)-x^*(t)$. 应用引理 4 可知，$f_n(t)\to 0$ 在 $[0,\omega]$ 上一致成立，即 $x(t+n\omega)\to x^*(t)$ 在 $[0,\omega]$ 上一致成立. 类似地可以得到 $x(t+n\omega)\to x^*(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 的任意紧集上一致成立.

下面我们证明 $x^*(t)$ 是系统 (1.2) 的一个 ω 周期解. 首先，因为

$$x^*(t+\omega) = \lim_{n\to\infty} x\big(t+(n+1)\omega\big) = \lim_{n\to\infty} x(t+n\omega) = x^*(t),$$

所以 $x^*(t)$ 是以 ω 为周期的周期函数. 在系统 (1.2) 中用 $x_{n_k}(t)$ 替换 $x(t)$, 并且为避免记号的混淆，将 $x_{n_k}(t)$ 的第 i 个分量记为 $x_i^{n_k}(t)$, 得到

$$\frac{dx_i^{n_k}(t)}{dt} = x_i^{n_k}(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j^{n_k}(t) - \sum_{j=1}^n \int_0^\infty x_j^{n_k}(t-s)d_s\mu_{ij}(t,s)\right], \quad i=1,2,\dots,n.$$

令 $k\to\infty$ 并利用 (1.3) 式和 $\{x_{n_k}(t)\}$ 的一致有界性，就可推出上式右边在 $\mathbb{R}$ 的任意紧集上一致收敛到

$$x_i^*(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j^*(t) - \sum_{j=1}^n \int_0^\infty x_j^*(t-s)d_s\mu_{ij}(t,s)\right].$$

因此，我们得到

$$\frac{dx_i^*(t)}{dt} = x_i^*(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j^*(t) - \sum_{j=1}^n \int_0^\infty x_j^*(t-s)d_s\mu_{ij}(t,s)\right], \quad i=1,2,\dots,n,$$

从而 $x^*(t)$ 是系统 (1.2) 的一个解.

令 $t=t_0+n\omega$, 其中 $0\le t_0<\omega$, 则有

$$\|x(t)-x^*(t)\| = \|x(t_0+n\omega)-x^*(t_0)\|.$$

于是由 $\{x(t+n\omega)\}$ 在 $[0,\omega]$ 上的一致收敛性，得到

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x^*(t)\| = 0. \tag{3.3}$$

最后证明系统 (1.2) 的任意正解收敛到 $x^*(t)$. 设 $y(t)$ 是任意一个正解. 重新定义 $w_i(t)=y_i(t)-x_i(t)$ 和 $z_i(t)=\log y_i(t)-\log x_i(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$. 用与前面类似的推理可得

$$\int_0^\infty \|y(t)-x(t)\|dt < +\infty.$$

由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的一致连续性，得

$$\lim_{t\to\infty}\|y(t)-x(t)\| = 0.$$

再结合 (3.3) 式，就得到

$$\lim_{t\to\infty}\|y(t)-x^*(t)\| = 0. \qquad \square$$

仔细观察有界性定理 (定理 5) 中的条件 (3.1) 和上述稳定性定理中的条件 (3.2), 容易发现它们有相似的形式. 事实上, 可以通过非奇异 M 矩阵的性质将它们联系起来. 记 $\underline{a}_{ii}=\inf_t a_{ii}(t)$ 和 $|\overline{a}_{ij}|=\sup_t|a_{ij}(t)|$ $(i\neq j)$. 应用引理 3 就得到下面的定理, 它给出了一个统一的条件.

定理 7 *如果存在正常数 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 使得*

$$\xi_i\underline{a}_{ii}-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\xi_j|\overline{a}_{ij}|-\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int_0^\infty|dK_{ij}(s)|>0 \tag{3.4}$$

对 $i=1,2,\ldots,n$ 成立, 则系统 (1.2) 存在一个全局渐近稳定的非负的 ω 周期解.

证明 显然, 从条件 (3.4) 可以推出条件 (3.1) 成立. 于是, 由定理 5 知道系统 (1.2) 的任意正解是有界的. 定义矩阵

$$C=(c_{ij})=\begin{cases}\underline{a}_{ii}-\displaystyle\int_0^\infty|dK_{ii}(s)|, & i=j,\\ -|\overline{a}_{ij}|-\displaystyle\int_0^\infty|dK_{ij}(s)|, & i\neq j.\end{cases} \tag{3.5}$$

应用引理 3 可知, 条件 (3.4) 等价于: 存在正常数 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 使得

$$\eta_i\underline{a}_{ii}-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\eta_j|\overline{a}_{ji}|-\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_0^\infty|dK_{ji}(s)|>0$$

对 $i=1,2,\ldots,n$ 成立. 显然由此可以推出条件 (3.2) 成立. 由定理 6 即证得结论. □

尽管上述定理给出了统一的稳定性条件, 但要找到使得这一条件成立的正常数 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 并不那么容易. 当然, 如果在条件 (3.4) 中简单地取 $\xi_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 可以得到一个容易验证的特殊情形. 但此条件显然比条件 (3.4) 要强得多 (参见下一章中的例 1). 事实上, 根据定理 7 的证明和引理 2, 下面的推论是显然的.

推论 5 *如果 (3.5) 式所定义的矩阵 C 是一个非奇异 M 矩阵, 则系统 (1.2) 存在一个全局渐近稳定的非负的 ω 周期解.*

由第一章的预备知识我们知道, 非奇异 M 矩阵有很多相互等价的定义. 这为使用上述推论提供了极大的便利. 例如, 根据引理 2 的性质 (a), 我们可以通过验证矩阵的所有前主子式是否为正来判断它是否为非奇异 M 矩阵.

注 6 验证矩阵的所有前主子式是否为正，通常的方法是使用 Gauss 消去法并检验主元是否为正. 但是，文献 [20] 中指出，这种方法的增长因子即使对 3×3 的情形也有可能很大，从而使数值稳定性不能得到保证. 为解决此问题，文献 [20] 提出了一个数值稳定的方法.

第四章　数值例子与讨论

§4.1　数值例子

在第二章和第三章中，我们分别讨论了系统 (1.2) 的正周期解和非负周期解的稳定性. 为了说明怎样使用前面给出的定理和推论，以及说明正周期解和非负周期解的稳定性条件的区别与联系，下面我们举一个综合性的例子.

例 1　*考虑下述包含三个种群的延时周期 Lotka–Volterra 系统:*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)[7+\sin t-(6+\sin t)x_1(t)-(2+\cos t)x_2(t-1)+(1+\sin t)x_3(t-1)],$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)[4+\cos t-(1+\sin t)x_1(t-1)-(5+\sin t)x_2(t)+(2+\cos t)x_3(t-1)],$$
$$\frac{dx_3(t)}{dt} = x_3(t)[1+\sin t-(3+\cos t)x_1(t-1)+(1+\cos t)x_2(t-1)-(9+\cos t)x_3(t)].$$

显然，例 1 包含了竞争、合作与捕食三种关系，如图 4.1 所示. 为验证推论 5 中的条件，首先写出 (3.5) 式所定义的矩阵：

$$C=\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

注意 C 并不是对角占优阵，也就是说它不满足在条件 (3.4) 中取 $\xi_i = 1$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ 的特殊情形. 但是容易计算它的所有前主子式如下：

$$5>0, \qquad \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 14 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

因此，由引理 3 的性质 (a) 可知 C 是非奇异 M 矩阵. 从而推论 5 的条件得到满足，故例 1 中的系统存在一个全局渐近稳定的非负的 ω 周期解.

为验证此结论，我们用 Matlab 中的 `dde23` 函数对例 1 进行数值求解，计算结果以两种方式分别显示在图 4.2 和图 4.3 中. 图 4.2 显示了对某个初始条件，三个种群的数量随时间 t 变化的趋势，显然它收敛到一个非负的 2π 周期解. 其中，第一个和第二个种群在周期性的数量波动中“和平共处”下去，而第三个种群最终归于灭绝. 为了研究不同初始条件对极限周期解的影响，图 4.3 绘出了三个不同的初始条

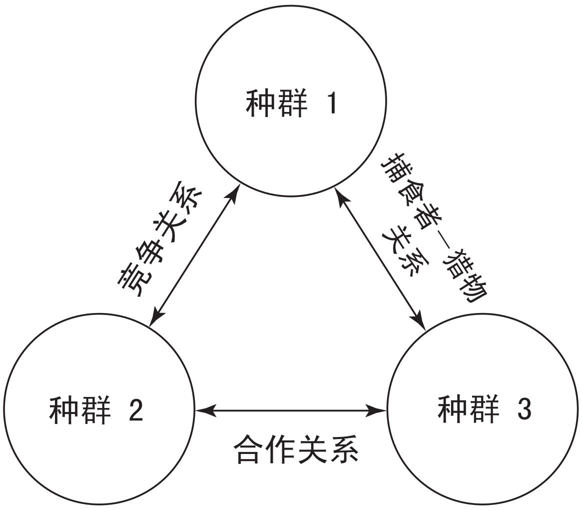

图 4.1　例 1 的种间关系示意图.

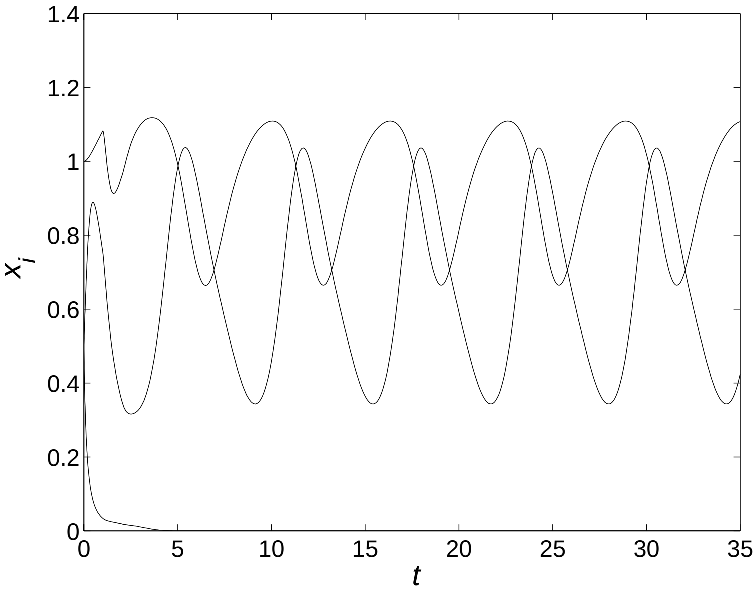

图 4.2　例 1 的某个正解收敛到一个非负的 2π 周期解. 初始条件为 $x(s) \equiv (1, 0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$. 图中趋势表明，第一个和第二个种群在周期性的数量波动中“和平共处”下去，而第三个种群最终归于灭绝.

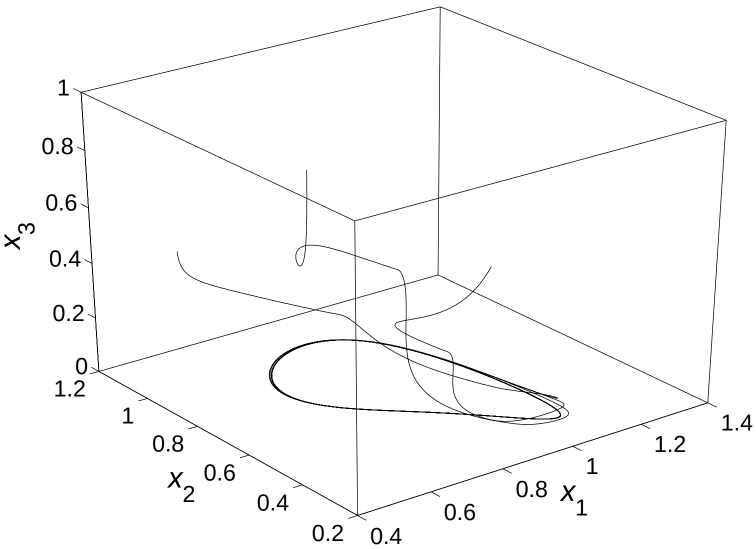

图 4.3　例 1 的满足三个不同初始条件的正解收敛到同一个位于平面 $x_3 = 0$ 上的 2π 周期解. 初始条件分别为 $x(s) \equiv (1, 0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$, $x(s) \equiv (0.5, 1, 0.5)^{\mathrm{T}}$ 和 $x(s) \equiv (0.5, 0.5, 1)^{\mathrm{T}}$.

件下相空间中的解曲线. 从图中容易看出，满足不同初始条件的正解收敛到同一个位于平面 $x_3 = 0$ 上的周期解.

为了研究种群的自然增长率对极限周期解的影响，将例 1 中的 $(b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ 分别替换为 $(7+\sin t, 4+\cos t, 4+\sin t)$, $(7+\sin t, 1+\cos t, 1+\sin t)$ 和 $(-1+\sin t, -1+\cos t, -1+\sin t)$, 计算结果如图 4.4 所示. 结合图 4.2 可知，通过改变例 1 中的自然增长率，可使该系统的解收敛到不同类型的周期解：正周期解、一个分量为零的非负周期解、两个分量为零的非负周期解、零解.

§4.2　讨论与结语

从例 1 中我们已经看到，虽然推论 5 的条件可以保证系统 (1.2) 的正解收敛到一个非负的 ω 周期解，但并不足以保证该周期解是正周期解. 一个自然的问题是：在怎样的特殊情形下，只需满足定理 7 或推论 5 的条件，就可以保证极限周期解一定为正? 事实上，合作系统正是这样一种特殊情形. 回忆第二章中的推论 2 并结合定理 7, 便不难得到下面的定理.

定理 8　设系统 (1.2) 为合作系统. 如果存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 使得

$$\xi_i \underline{a}_{ii} - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j |\overline{a}_{ij}| - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^{\infty} |dK_{ij}(s)| > 0 \tag{4.1}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，则该系统存在一个全局渐近稳定的正的 ω 周期解.

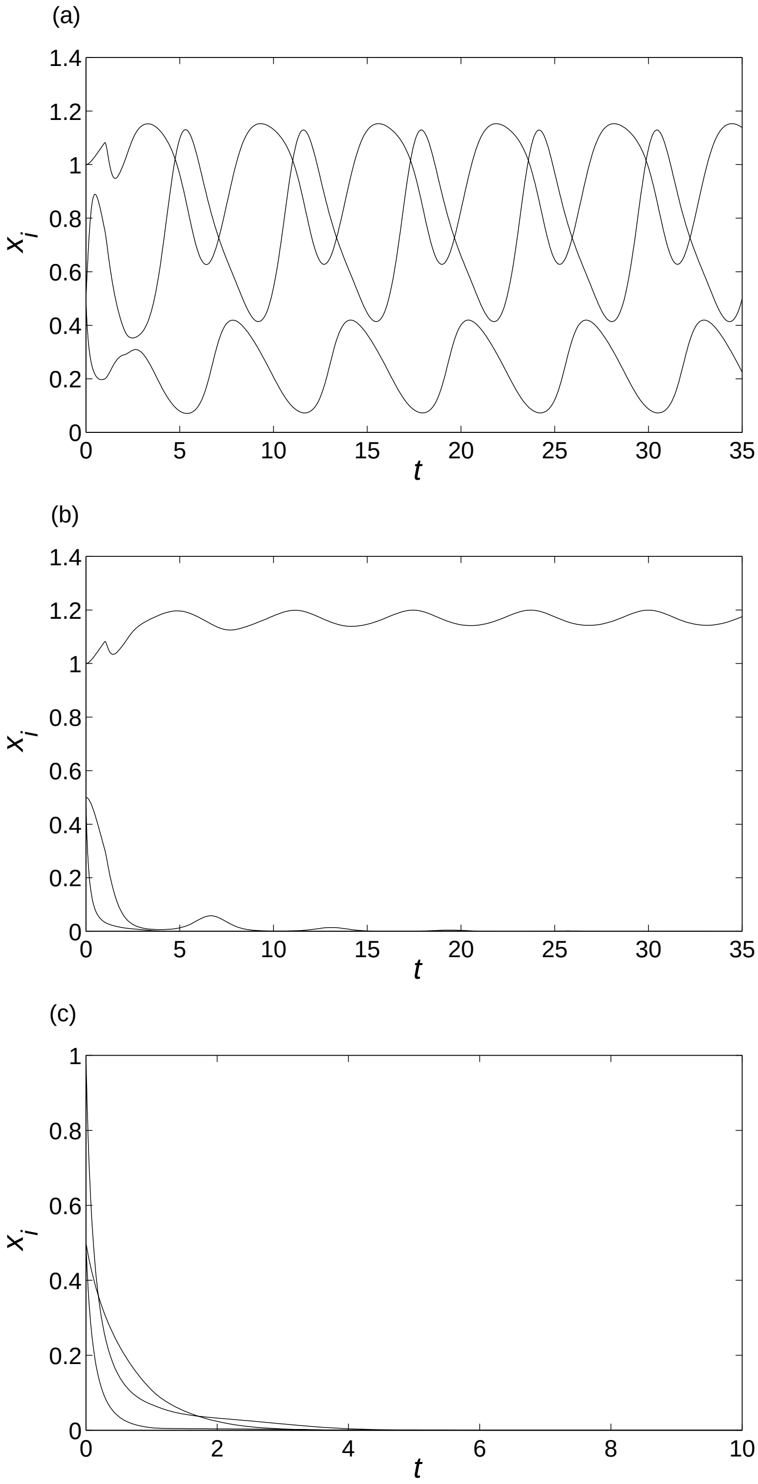

图 4.4　替换例 1 中的自然增长率，得到不同类型的极限周期解. 自然增长率 $(b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ 分别为：(a) $(7+\sin t, 4+\cos t, 4+\sin t)$, (b) $(7+\sin t, 1+\cos t, 1+\sin t)$, (c) $(-1+\sin t, -1+\cos t, -1+\sin t)$.

证明　显然，条件 (4.1) 蕴涵了推论 2 中的条件 (2.6). 因此，分别应用定理 7 和推论 2 就知道，系统 (1.2) 存在一个全局渐近稳定的非负的 ω 周期解 $x^*(t)$, 以及一个正的 ω 周期解 $x_+^*(t)$. 于是我们有

$$\lim_{t\to\infty} x_+^*(t) - x^*(t) = 0.$$

上式成立当且仅当 $x^*(t)$ 恒等于 $x_+^*(t)$. 它就是全局渐近稳定的正的 ω 周期解.　□

注 7　上述结果有一个自然的生态学解释. 这是因为，在一个合作系统中，除了种内竞争以外，事实上没有其他任何因素可以阻碍种群的增长. 而种内竞争只是起到限制种群增长上限的作用，而永远不会导致种群的灭绝.

让我们回到定理 7 中的条件上来再作一些讨论. 将这一条件与第二章中正周期解的存在性条件进行比较，我们可以得到不少启发. 首先，定理 7 表明，系统 (1.2) 的稳定性只取决于种内竞争与种间竞争，而与种群的自然增长率无关. 尽管种群的自然增长率不影响系统的稳定性，但它却对系统的极限周期解有着至关重要的影响. 这一点在例 1 中已得到清楚的说明. 因此，我们就容易理解为什么自然增长率不能从关于正周期解的条件中去掉，对于某些特定类型的周期解也是如此. 与现有文献中的大部分结果不同的是，我们在第二章中讨论了一般非负周期解的稳定性问题，不涉及周期解的某些分量为正的假定. 这使得我们能够得到更为一般和宽松的条件. 这些条件反映了周期 Lotka–Volterra 系统稳定性的本质要求，并且有利于区分不同因素对生态系统的演化与结果产生的影响.

延时是生态模型中一个非常重要的因素，它往往会对动力系统的性态产生关键性的作用，同时也增加了理论分析的难度. 在本论文中，我们处理延时的主要思想是对延时项的“效果”加以适当的控制. 具体地说，这种“效果”在系统 (1.2) 中就体现为 $\int_0^\infty |dK_{ij}(s)|$. 值得注意的是，在许多常见的情形中，延时本身的大小并不影响系统的稳定性. 为了简单地说明这一问题，我们考虑下述仅包含常数延时的周期 Lotka–Volterra 系统：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)x_j(t-\tau_{ij})\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

根据定理 7, 相应的非负周期解的稳定性条件为：存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 使得

$$\xi_i \underline{a}_{ii} - \sum_{j=1,\, j\neq i}^n \xi_j |\overline{a}_{ij}| - \sum_{j=1}^n \xi_j |\overline{b}_{ij}| > 0$$

对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，其中 $\underline{a}_{ii} = \inf_t a_{ii}(t)$, $|\overline{a}_{ij}| = \sup_t |a_{ij}(t)|$ $(i \neq j)$, $|\overline{b}_{ij}| = \sup_t |b_{ij}(t)|$. 我们看到，延时 τ_{ij} 并未出现在上述稳定性条件中，也就是说，上

述稳定性条件是“延时无关的”. 由于延时的大小通常难以估算，所以这种类型的稳定性条件在应用中有很大的优越性.

由于时间所限，本论文中仍然遗留了一些问题没能进一步研究和彻底解决. 这里仅举两例说明. 首先，我们注意到非负周期解的有界性条件 (3.1) 和稳定性条件 (3.2) 均依赖于 t, 显然比定理 7 给出的统一条件 (3.4) 要宽松得多. 但是，将条件 (3.1) 和条件 (3.2) 联系起来的引理 3 只涉及常数矩阵，对于元素为函数的矩阵，是否有类似结论尚不清楚. 因此，我们自然地提出如下猜想:

猜想 1 *如果存在正常数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 使得*

$$\xi_i a_{ii}(t) - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \xi_j |a_{ij}(t)| - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty |dK_{ij}(s)| > 0$$

对所有 $0 \le t < \omega$ 和 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，则系统 (1.2) 存在一个全局渐近稳定的非负的 ω 周期解.

其次，根据第三章中对非负周期解的讨论，我们可以对延时周期 Lotka–Volterra 系统的动力学行为作如下分类:

(1) 系统存在某些正解是发散的.

(2) 系统的任意正解均有界，但没有全局渐近稳定的非负周期解.

(3) 系统存在全局渐近稳定的非负周期解.

在本论文中，我们已经详细讨论了解的有界性和全局渐近稳定性问题. 但是容易看出，前者的条件比后者要宽松得多，因此，研究满足有界性条件但不满足全局渐近稳定性条件的情形，即上述分类中的第二类，仍然是一个开放性问题. 我们注意到，在文献 [31] 中，作者研究了有限延时自治 Lotka–Volterra 系统的完全稳定性 (complete stability), 即系统的任意正解都会收敛到某个平衡点，但这个平衡点不是唯一的. 在这种情形之下，系统有可能同时存在多个局部稳定的平衡点，这在许多实际应用中 (例如联想记忆) 都有突出的优点. 可以预计，类似的讨论对于延时周期 Lotka–Volterra 系统的研究也有重要的理论意义和应用价值.

结语: 在本论文中，我们对一类重要的数学生态学模型，即延时周期 Lotka–Volterra 系统，进行了深入细致的分析. 运用基本的数学分析工具，我们分别讨论了该系统的正周期解的存在性、稳定性以及非负周期解的稳定性问题，证明了比文献中已有结果更为一般和宽松的条件. 这些结果不仅有助于我们理解环境条件、自然增长率等波动性因素是如何对复杂生态系统的动态发展和演化发生作用的，而且，由于周期性波动在自然界和社会、经济现象中的广泛存在，它们也为我们从定量和定性的角度深入研究这些现象提供了有益的启示.

参考文献

[1] 郑衍旭. 周期延时神经网络的稳定性条件与性能分析. 复旦大学硕士学位论文，上海，2004.

[2] T. Asai, M. Ohtani, and H. Yonezu. Analog integrated circuits for the Lotka–Volterra competitive neural networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, 10: 1222–1231, 1999.

[3] H. Bereketoglu and I. Győri. Global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka–Volterra type system with infinite delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 210: 279–291, 1997.

[4] A. Berman and R.J. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic, New York, 1979.

[5] F. Brauer and C. Castillo-Chávez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, New York, 2001.

[6] J.C. Eilbeck and J. López-Gómez. On the periodic Lotka–Volterra competition model. *J. Math. Anal. Appl.*, 210: 58–87, 1997.

[7] T. Fukai and S. Tanaka. A simple neural network exhibiting selective activation of neuronal ensembles: From winner-take-all to winners-share-all. *Neural Comput.*, 9: 77–97, 1997.

[8] K. Gopalsamy. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands, 1992.

[9] Y. Kuang. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic, Boston, 1993.

[10] Y. Li. Periodic solutions for delay Lotka–Volterra competition systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 246: 230–244, 2000.

[11] Y. Li and Y. Kuang. Periodic solutions of periodic delay Lotka–Volterra equations and systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 255: 260–280, 2001.

[12] A.J. Lotka. *Elements of Physical Biology*. Williams & Wilkins, Baltimore, 1925.

[13] W. Lu and T. Chen. On periodic dynamical systems. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 25: 455–462, 2004.

[14] O. Malcai, O. Biham, P. Richmond, and S. Solomon. Theoretical analysis and simulations of the generalized Lotka–Volterra model. *Phys. Rev. E*, 66: 031102, 2002.

[15] F. Montes de Oca and M.L. Zeeman. Balancing Survival and extinction in nonautonomous competitive Lotka–Volterra systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 192: 360–370, 1995.

[16] F. Montes de Oca and M.L. Zeeman. Extinction in nonautonomous competitive Lotka–Volterra systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124: 3677–3687, 1996.

[17] Y. Moreau, S. Louies, J. Vandewalle, and L. Brenig. Embedding recurrent neural networks into predator–prey models. *Neural Networks*, 12: 237–245, 1999.

[18] S.A. Morris and D. Pratt. Analysis of the Lotka–Volterra competition equations as a technological substitution model. *Technol. Forecast. Soc. Change*, 70: 103–133, 2003.

[19] J.D. Murray. *Mathematical Biology I: An Introduction*. Springer, New York, 3rd ed., 2002.

[20] J.M. Peña. A stable test to check if a matrix is a nonsingular M-matrix. *Math. Comput.*, 73: 1385–1392, 2004.

[21] H.L. Smith. *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*. American Mathematical Society, Providence, 1995.

[22] J.C. Sprott. Competition with evolution in ecology and finance. *Phys. Lett. A*, 325: 329–333, 2004.

[23] Y. Takeuchi. *Global Dynamical Properties of Lotka–Volterra Systems*. World Scientific, Singapore, 1996.

[24] B. Tang and Y. Kuang. Existence, uniqueness and asymptotic stability of periodic solutions of periodic functional differential systems. *Tohoku Math. J.*, 49: 217–239, 1997.

[25] Z. Teng. Nonautonomous Lotka–Volterra systems with delays. *J. Differential Equations*, 179: 538–561, 2002.

[26] Z. Teng and L. Chen. Global asymptotic stability of periodic Lotka–Volterra systems with delays. *Nonlinear Anal.*, 45: 1081–1095, 2001.

[27] Z. Teng and Y. Yu. Some new results of nonautonomous Lotka–Volterra competitive systems with delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 241: 254-275, 2000.

[28] A. Tineo. Existence of global attractors for a class of periodic Kolmogorov systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 279: 365–371, 2003.

[29] V. Volterra. Variazionie fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Mem. Acad. Lincei.*, 2: 31–113, 1926. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. Translation by R.N. Chapman. In: *Animal Ecology.* pp. 409–448. McGraw–Hill, New York, 1931.

[30] W. Wang, P. Fergola, and C. Tenneriello. Global attractivity of periodic solutions of population models. *J. Math. Anal. Appl.*, 211: 498–511, 1997.

[31] Z. Yi and K.K. Tan. Dynamic stability conditions for Lotka–Volterra recurrent neural networks with delays. *Phys. Rev. E*, 66: 011910, 2002.

[32] J. Zhou, Z.R. Liu, and G.R. Chen. Dynamics of periodic delayed neural networks. *Neural Networks*, 17: 87–101, 2004.

致　谢

时光如白驹过隙，转眼三年忙碌充实的研究生学习即将结束．这三年是我人生中至关重要的一个阶段，已然在我的生命中留下难以磨灭的印迹．在这收获的时刻，我首先要感谢我的导师陈天平先生，谢谢您教会我做研究的方法，引导我走上学术的道路．您深厚的理论造诣和严谨的治学态度给我深刻的影响．您对新鲜事物始终保持的浓厚兴趣，以及学术上敏锐独到的眼光，尤令我敬佩不已．

感谢卢文联师兄，你的勤奋高产为我们树立了光辉的榜样．感谢李海滨、刘艳、刘强、侯磊、吴玮、刘锡伟，以及周进教授，我会永远怀念我们在讨论班上共同营造的讨论氛围．感谢我的室友周晟，谢谢你对我不太规律的作息习惯给予极大的包容．感谢王亦伦，尽管我们的专业方向并不相同，但我们却是最能交流学术想法的好朋友，我们都在这里找到了自己的学术兴趣．感谢李冀申、尹彬彬、沈喆颋、陆亦斌等研究生同窗，以及吴昊、王炯、张涛、陈宇、冀田、王哲、陆晓冬等本科同窗，我会怀念我们一起出去“腐败”的快乐时光．

感谢我的父母和姐姐，谢谢你们在我成长过程中无微不至的关怀，你们的爱是伟大而无私的．没有你们的支持，我不可能走到这里！

附录　攻读学位期间论文完成情况

[1] W. Lin and T. Chen. Positive periodic solutions of delayed periodic Lotka–Volterra systems. *Phys. Lett. A*, 334: 273–287, 2005.

[2] W. Lin and T. Chen. Controlling chaos in a chaotic neuron model. *Int. J. Bifurcation Chaos*, accepted for publication.

[3] W. Lin and T. Chen. Analysis of two restart algorithms. *Neurocomputing*, accepted for publication.

[4] W. Lin and T. Chen. Dynamics of delayed periodic Lotka–Volterra systems.