

## 《应用随机过程》期中考试解答

2013年11月5日下午, 闭卷, 每题10分

取一列独立同分布随机变量序列  $\{\eta_k, k \in Z\}$ ,  $P(\eta = k) = h_k$ ;

再取一族独立的分枝过程  $\{Z_{n,l}; n, l \in Z\}$ , 每个个体独立产生  $\xi$  个后代,  $P(\xi = k) = p_k$ .  $Z_{n,l}(k)$  表示第  $n, l$  个分枝过程  $Z_{n,l}$  的第  $k$  代个体数目, 约定  $Z_{n,l}(0) = 1$ .

令  $W = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\eta_k} Z_{k,s}(k)$ . 则  $EW = \sum_{k=0}^{\infty} (E\eta_k)m^k < \infty$ , 其中  $m = \sum_k kp_k < 1$ . 因此  $W$  几乎处处有限.

若  $X_0 = W$ , 则

$$X_1 = \eta_{-1} + \sum_{i=1}^W \xi_i = \eta_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\eta_k} \sum_{j=1}^{Z_{k,s}(k)} \xi_j^{(k,s)} = \eta_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\eta_k} Z_{k,s}(k+1). \quad (1)$$

其中  $\xi_i, \xi_j^{(k,s)}$  与其他一切随机变量独立. 由此可见  $X_1$  与  $X_0 = W$  同分布, 即  $\{X_n\}$  具有不变分布.

另外也可用特征函数. 记  $h(s) = \sum_k h_k s^k$ ,  $f(s) = \sum_k p_k s^k$ ,  $f^{k+1}(s) = f^{(k)}(f(s))$ , 并约定  $f^{(0)}(s) = 1$ . 则  $E_s^W = \prod_{k=0}^{\infty} h(f^{(k)})$ .

$$E_s^{X_1} = E_s^{(\eta_{-1} + \sum_{i=1}^W \xi_i)} = h(s)E(f(s))^W = h(s) \prod_{k=0}^{\infty} h(f^{(k)}(f(s))) = \prod_{k=0}^{\infty} h(f^{(k)}).$$

$W$  与  $X_1$  的特征函数相同, 因此分布相同, 即  $\{X_n\}$  具有不变分布.