

陈大岳的研究课题及其相关论文为

随机环境中的随机游动 [6][13][14][15][16][18][19];

马氏过程的亚稳态性 [4][5][7][8][9][11];

树与图上的无穷粒子系统 [1][2][3][10][12][17].

(1) **随机环境中的随机游动.** 随机环境是指渗流模型中的无穷开簇(infinite cluster)或分枝过程的样本(Galton-Watson树). 随机游动是最简单的概率模型, 是研究其他概率问题的基石. 因此很受重视, 如最近两届数学家大会做邀请报告的M. Barlow, A. Sznitman和O. Zeitouni等都致力于此专题.

文章[13]研究 Scherk 图上的渗流模型, 发现并证明了另一类相变现象. 我们知道 Scherk 图上的边渗流模型的临界点比  $1/2$  小, 在临界点以上存在一个无穷开簇. 我们的研究表明, 当  $p > 1/2$  时无穷开簇上的随机游动是非常返的, 而当  $p < 1/2$  时无穷开簇上的随机游动是常返的. 这说明 Scherk 图在临界点以上有另一类相变现象. 这方面的最早结果属于 Grimmett, Kesten 和 Zhang, 他们于 1993 年证明了在三维格点渗流模型的无穷开簇上随机游动是非常返的. Grimmett 是剑桥大学数学系主任, 概率论最主要杂志之一 PTRF 主编; Kesten 是 Cornell 大学教授, 2002 年国际数学家大会一小时报告人. 他们这项工作引发极大兴趣, 人们进一步要问, 若图上的随机游动是非常返的, 其无穷开簇上的随机游动也是非常返的? 此前的结论都是肯定的, 例如 Angel, Benjamini, Berger 和 Peres(2004)就考虑三维格点中一个锥

体，得到同样的结论的。即在临界点以上，随机游动在无穷开簇和原图上同为常返或同为非常返。我的研究给出了第一个反例，也是迄今为止唯一已知的在临界点以上另有相变现象的例子，表明 Scherk 图具有更丰富的结构。由于这项工作，瑞典 Chalmers University of Technology 教授 Jeff Steif 邀请我在第六届伯努利学会世界大会上做报告。伯努利学会是以欧洲概率统计学家为主体的世界性学会，与以美国学者为主体的 IMS 旗鼓相当，每四年举办一次世界大会，IMS 的年会也掺乎其中。伯努利学会每年还举办 Conference on Stochastic Processes and Their Applications (SPA)。

文章[16]研究 Lampligher Group 上无穷开簇上的随机游动的速度。这项工作是与加州大学教授、2002年国际数学家大会邀请报告人 Yuval Peres 合作完成的。对于非常返的随机游动，人们更深入一步研究其速度。把渗流模型看成是一个随机扰动，人们希望验证“随机游动的速度为正”和“随机游动的速度为零”这两个命题是随机扰动下不变的。Benjamini, Lyons 和 Schramm(1999)研究了 Cheeger 常数为正或球体积增长较慢这两类图，而困难部分是具有下列性质的图：Cheeger 常数为零而球体积随半径增大以指数速度增长。Lampligher Group  $G_k$  正是这样一类特殊的图，其中  $k$  为自然数。在  $G_1$  或  $G_2$  上的简单随机游动的速度为零，而当  $k \geq 3$  时，在  $G_k$  上的简单随机游动的速度为正。我和 Y. Peres 合作，考察  $G_k$  的无穷开簇上的简单随机游动，证明“随机游动的速度为正”和“随机游动的速度为零”是随机扰动下不变的。文章[16]还讨论了一个类似 Cheeger 常数的几何量在两种随机扰动下的不变性。

由于这些结论也为其他概率学家所关注，在[16]发表之前已被同行引用6次。

文章[18]更进一步讨论无穷开簇上的随机游动的速度与边渗流模型的数量关系。对于Galton-Watson树，边保留的概率越大，随机游动的速度也越大。

文章[6]证明Galton-Watson树上的 $\lambda$ -biased随机游动的速度满足下列不等式：

$$\frac{m - \lambda}{m + \lambda} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} \geq \frac{m' - \lambda}{m' + \lambda},$$

其中 $m$ 是Galton-Watson树的分支数的算术平均， $m'$ 是分支数的调和平均。其中上界乃Lyons, Pemantle & Peres 的一个猜测，后来Virag(2000)更进一步得到了一般树上的随机游动的速度的上界估计。一般来说下界估计更困难，因此这一下界估计仍是迄今为止最好的结果。由于这方面的研究结果，Yuval Peres邀请我在第四届伯努利学会世界大会上做报告(奥地利维也纳, 1996)。同时做报告的还有J.F. Le Gall (现为法国高等师范学校数学系主任)和O. Haggstrom (现为瑞典皇家科学院院士)。

(2) 马氏过程的亚稳态性. 亚稳态性是指某个物理系统在达到稳定状态之前所发生的一些奇特现象，例如临界状态下晶体的生长过程，是统计物理中的一个重要概念。在过去十多年间理论物理学家和概率学家对亚稳态的研究一直持续不断，欧洲的研究联合体Eurandom在2003年的报告中将其列为重点研究方向之一，德国Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics 的概率组在A. Bovier带领下长年研

究亚稳态性, Bovier将在今年的国际数学家大会上做45分钟邀请报告.

文章[8]和[9]应用Freidlin和Wentzell的大偏差理论证明了三维随机伊辛模型的亚稳态性,是与钱敏平、冯建峰合作完成的.美国UCLA教授R. Schonmann在研究二维随机伊辛模型时把亚稳态性的一些数量特征以数学定理的形式加以证明,并在1998年国际数学家大会上做了题为Metastability and the Ising Model的报告.但他的方法不能证明三维随机伊辛模型的亚稳态性,而三维情形才是物理上有意义的.他将此列为待解决的公开问题.我们根据随机伊辛模型的哈密顿量确定了各阶吸引子和吸引域,找到了从最高阶吸引子到次高阶吸引子的最小势能差的路径,刻画了临界组态,完满回答了Schonmann的公开问题.由于问题的重要性,法国(包括瑞士的Ben Arous)、意大利、巴西等国学者也曾研究过同样的问题,竞争非常激烈,以至于没有人以在国际公认的主要刊物发表论文而取得优先权.我们是较早研究这一问题的群体之一,但在成果推介方面做的不到位.

文章[7]和[11]讨论了 Majority Vote Process 的亚稳态性.该模型是不可逆的,没有类似哈密顿量的势能函数.我们引入虚拟势能,从最高阶吸引子到次高阶吸引子的最小虚拟势能差的路径与随机伊辛模型的情形完全不同.非对称情形则更复杂,最小虚拟势能差的路径敏感地依赖于非对称程度.这项研究成果丰富了我们对于马氏过程亚稳态现象的了解.其中[11]是与法国巴黎六大教授 O. Catoni (*Directeur de Recherche Probabilités et Modèles Aléatoires*)合作完成的.

文章[5]是为证明马氏链亚稳态性而建立的大偏差理论,是前述

[7] [8] [9] [11]等文章的基础. 文章[5]提出的马氏链吸引子的金字塔型结构,与图像处理、科学与工程计算中的**Multi-Scale**方法有相通之处,是描述复杂结构的有效方法,在方法上是一突破,具有较大适用范围. 文章[5]被他人引用的次数也最多,参见附件三. 例如可以用于估计模拟退火计算的收敛速度. 去年中科院应用数学研究所的概率讨论班在研究网络上检索某个目标的算法时也归结为这一情形. 钱敏平教授近年研究基因网络结构,应用文章[5]的结论可以解释一些复杂的生物功能. 申请人今年访问法国,曾就此专题在巴黎第六大学做系列演讲,长达8个小时. 巴黎第13大学胡跃云教授对其中的一些结论十分赞赏.

钱敏平教授和我因为这方面研究成果而共同获得2001年度北京市科技进步二等奖.

(3) **树与图上的粒子系统.** 八十年代末人们开始考虑树上的粒子系统,发现了更丰富的相变现象. 例如接触过程的**survival**应进一步细分为**weak survival**和**strong survival**两种. 这一发现刺激人们去深入研究粒子系统的极限行为与图的几何性质之间的关系,大大扩展了离散型随机过程的研究前沿. 从事这一领域研究的有T.M.Liggett(UCLA教授, *Ann.of Probab.*原主编)、S. Lalley (U. of Chicago教授, *Ann.of Probab.*前任主编)、R. Lyons (Indiana大学教授, *Probability on Trees and Networks*一书作者)等.

文章[3] 定义了规则树上有限近邻系统, 利用其可逆性质确定了

它的临界值. 我们较早独立开始这方面的研究, 同样的想法后来也出现在Liggett指导的A. Puha的博士论文A reversible interacting particle system on the homogeneous tree中, Puha的论文引用了[3].

文章[10]讨论Galton-Watson树上的接触过程, 证明了两个临界值为非随机的常数, 在某些限制条件下两个临界值是不同的, 从而证明Galton-Watson树上的接触过程也有weak survival和strong survival两种. 这个问题也为其他同行如 R.Pemantle (U Penn 教授), R.Stacey (Cambridge U.)等所关注.

文章[17]受R. Durrett等人关于接触过程的一系列文章的启发, 讨论有限区间上的可逆近邻系统, 考察灭绝时间和区间长度的关系. 尽管在有限区间上可逆近邻系统的灭绝时间总是有限的, 但平均灭绝时间与区间长度的关系却与相互作用的强度参数有关, 从而揭示了无限直线上可逆近邻系统的相变具有不可忽视的作用.

我在这方面的兴趣也体现在我所指导的研究生的学位论文. 迄今为止由我指导毕业的硕士研究生共有11位(他们中有七人继续攻读博士学位), 以粒子系统为题的七篇硕士学位论文如下:

李 贺 (2005) 加长树上的接触过程和分支随机游动

王士模 (2004) 平面格点上的接触过程

王 烈 (2003) 随机伊辛模型L2收敛问题的研究

刘巨鑫 (2003) 有限区间上的近邻粒子系统与马氏链场的一个遍历定理

陈 南 (2001)  $T_d \times Z$ 上一类混合模型的研究

贾淑梅 (1999) 规则树上有偏接触过程的极限行为

赵立久 (1998) Galton-Watson树上接触过程的极限行为

其中两篇硕士学位论文经过修改与我联名发表, 即上述文章[10][17].

我的博士生贾淑梅的毕业论文题目是“齐次图上的接触过程”, 她发表了三篇这方面的论文:

[S1] 贾淑梅, Contact Process on Trees in Random Environments, 《北京大学学报》 2002 年, 第 38 卷第 3 期

[S2] 贾淑梅, 研究胆结石形成的一个模型, 《应用数学》 2002 年第 1 期

[S3] 贾淑梅, Complete Convergence Theorem for the Contact Process on  $T^d \times Z$ , 《数学物理学报》 Series B, Vol. 24, No. 4, 513-518

#### 参考文献:

[1] Dayue Chen, (1988), On the survival probability of generalized nearest-particle systems, *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol. 30, 209—223. (SCI)

[2] Dayue Chen & T.M. Liggett, (1992), Finite reversible nearest-particle systems in inhomogeneous and random environments, *Ann. of Prob.*, Vol.20, No.1, 152—173. (SCI)

[3] Dayue Chen, (1994), Finite nearest particle systems on a tree, *Acta Mathematica Scientia*, Vol.14, No.3, 348—353. (SCI)

[4] Dayue Chen, Jianfeng Feng & Minping Qian, (1995), The metastable behavior of the two dimensional Ising model, In *Proceedings of the International Conference on Dirichlet Forms and Stochastic Processes*, Editors, Z.M. Ma, M. Rockner & J.A. Yan, W. de Gruyter, New York, 73—86.

[5] Dayue Chen, Jianfeng Feng & Minping Qian, (1996), The metastability of exponentially perturbed Markov chains, *Science in China*, Series A, Vol.39, 7—28. 中文刊登在《中国科学》第 25 卷第 5 期, 465—477, 和第 6 期, 590—595. (SCI)

[6] Dayue Chen, (1997), Average properties of random walks on Galton-Watson trees, *Ann. Inst. H. Poincare*, Vol.33, No.3, 359—369. (SCI)

[7] Dayue Chen, (1997), The consensus times of the majority vote process on a torus, *J. Stat. Physics*, Vol.86, No.3/4, 779—802. (SCI)

- [8] Dayue Chen, Jianfeng Feng & Minping Qian, (1997), The metastable behavior of the three dimensional Ising model, I, *Science in China*, Series A, Vol.40, No.8, 832–842. 中文刊登在《中国科学》, 第 27 卷第 6 期, 504–513. (SCI)
- [9] Dayue Chen, Jianfeng Feng & Minping Qian, (1997), The metastable behavior of the three dimensional Ising model, II, *Science in China*, Series A, Vol.40, No.11, 1129-1135. 中文刊登在《中国科学》, 第 27 卷第 7 期, 619–623. (SCI)
- [10] 赵立久, 陈大岳, (1999), Galton-Watson 树上的接触过程,《应用概率统计》第 15 卷第 1 期, 43–47.
- [11] Olivier Catoni, Dayue Chen & Jun Xie, (2000), The loop erased exit path and the metastability of a biased majority vote process, *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol.86, No.2, 231–261. (SCI)
- [12] 张奎, 陈大岳, (2001), 可满足性(SAT)问题的概率研究,《数学进展》第 30 卷, 231–237.
- [13] Dayue Chen, (2001), On the infinite cluster of the Bernoulli bond percolation in the Scherk's graph, *J. Applied Probab.*, Vol.38, No.4, 828–840. (SCI)
- [14] Dayue Chen, (2002), Estimating the speed of random walks, *Applied Probability*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.26, 17–23.
- [15] Dayue Chen & Yuval Peres, (2003), The speed of simple random walk and anchored expansion in percolation cluster, an overview, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 39–44, 电子版见 <http://dmtcs.loria.fr/proceedings/dmACind.html>
- [16] Dayue Chen & Yuval. Peres, (2004), Anchored expansion, percolation and speed, *Ann. of Probability*, Vol.32, No.4, 2978-2995. (SCI)
- [17] Dayue Chen, Juxin Liu and Fuxi Zhang, (2006), The reversible nearest particle system on a finite set, *Bernoulli*, Vol. 12, No.1, 101-111. (SCI)
- [18] A Note on the finite collision property of random walks (with B. Wei and F. Zhang), *Statistics and Probability Letters*, 78(2008) 1742-1747
- [19] On the monotonicity of the speed of random walks on a percolation cluster of trees (with F. Zhang), *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2007, Vol.23(11), 1949-1954.