高等数学(B)第四次习题课讲义

刘抒睿(助教)

18级数学科学学院本科生

chaneyrui@pku.edu.cn

2020 年 10 月 29 日

目录

摘要

本文是习题课预先发给同学诸君的讲义。本次习题课的主题是极限与连续。第一部分将快速概述与复习教材第一章内容，第二部分为一些习题的演算与练习。如有多余时间，或可补充讲解课本内容，或补述上次习题课未解之两题。

讲义中题目多附提示，以求便于自学，亦望读者诸君勤于动手，自先尝试；选题用意限于篇幅不便尽列，相关诠释以课堂为准。请慎重用为笔记。

本文仅用于习题课使用，文中多处引用未注来源，诚致歉意(I claim no originality for this note.)。

1 前言：人生若只如初见

此情可待成追忆，只是当时已惘然。

————李商隐

忆昔故往，岁月漫漫；笔者早已忘记初识微积分之惊异与懵懂，亦不能忆初学分析之艰涩与迷茫；今秋时年，初为助教，毫无经验，唯怀一心。或源于斯，在上次习题课中便过揠苗助长，不合水土，诚表歉意；故此番决心另加调整，以求效果，愿有改良。

课余私信之间，多闻挫败之伤，则其大可不必。盖各行各业，皆有艰深之处；学业无高低，唯生疏熟练之别。读者诸君只欲略知一二、无异深究者，大不必苦陷于此；有心精学者，亦不必为之丧气————有钻研之意，持恒之心，向之所惧，终归于易；曾不解者，终归平凡。笔者于数院二年，亦常遭挫败之事，亦常生自疑之心；然理学之精深，本已非今生所能尽悟；但怀近仁之志，何求圣贤之功!

遂思蔡元培先生之言语，诚哉斯言：

> 平时则放荡冶游，考试则熟读讲义，不问学问之有无，惟争分数之高低。试验既终，书籍束之高阁，毫不过问。敷衍三、四年，潦草塞责，文凭到手，即可借此活动于社会，岂非与求学初衷大相背驰乎？光阴虚度，学问毫无，是自误也。
>
> ————蔡元培

数学不以有用为目的，却是极为有用之学问。读者诸君无论志于经世济用、商贾文艺，还是志在穹宇、情系星野，皆不得不略一领会数学之深邃、善美、博用。唯愿我等，总守初心；无负光阴，不为自误；生时有限，学海无涯，路其修远，与君共勉。

乏善可陈，下述正文。

2 知识复习：回首处，只君知

> 回首向来萧瑟处，归去也无风雨也无晴。
>
> ————苏轼

2.1 概论

宏观来看，第一章的主要内容是为后面章节做必要的铺垫（点明对象、指出工具），然后将引入的工具用于我们以往惯常的视角(中观)，即连续性的讨论。

首先，是点明我们在高等数学中讨论的**对象**：

- 舞台(空间):实数(实直线)；
- 角色(变换):实值映射(离散版本(数列) and "连续"版本(实直线上的函数)。

Remark 1 *这几乎是结构主义下每一门(入门)数学课的开篇语。比如线性代数，那就要引入线性空间、线性映射；比如概率论，就要引入概率空间、概率分布(或随机变量等等)……*

不同于初等数学的是，我们开发新的**工具**———极限。

有了极限以后，我们有了一种新的考察"数与空间"的思维方式(即所谓分析学)。笼统而言，我们有

- 微观(放大镜)：导数或微分(局部近似)；
- 中观(平常视角)：连续；
- 宏观(望远镜)：积分(整体指标)。

这便是一元微积分中，我们的整体内容。第一章我们只引入连续；微观和宏观的考察，将留待后面章节。

2.2 知识点与考点

下面我们框架性的列一些知识点：

2.2.1 实数

- 实数的构造(代数观点、几何观点……)
- 实数的基本性质(加减乘除运算，完备性)

其中实数的构造其实观点不唯一，有许多种观点(当然从逻辑上它们是等价的)。实数的完备性其实是实数构造的直接推论，具体由以下定理刻画(它们彼此是逻辑等价的)：

- 戴德金分割定理。
- 单调有界序列必收敛。
- 闭区间套原理。
- 有限开覆盖定理。
- 确界存在定理。
- 聚点原理。
- 任一有界序列必有收敛子列。

Moral 1 (刘抒睿) *实数系的完备性(分析运算封闭性)和实数系有界闭区间的紧致性(拓扑性质)是等价的。直观地说，实数的完备性(分析性质)实际上完全是几何性质(直线的性质)。*

上面这句话的具体含义不必掌握，仅笔者兴起提之。

Remark 2 上面的内容实际上是理解"微积分"奏效根本原因或者说微积分原理的必备知识；但在实际计算应用中并不会用到。牛顿和莱布尼茨并没有实数理论，甚至不清楚极限的严格定义是什么，但他们已经可以熟练运用微积分解决物理或几何上的问题了。

2.2.2 函数

数列可以看成自然数到实数的映射，几何上就是直线上标了次序的一列点。

函数一般指实数到实数的映射(几何上是直线到直线的变换，画在直角坐标系里是一条"曲线")。

我们需要熟悉基本的例子，也就是所谓"基本初等函数"：

- 常值函数。
- 幂函数。
- 对数函数。
- 指数函数。
- 三角函数。
- 反三角函数。

特别地，应当记住对数公式、三角函数公式以及一些常见的多项式(幂函数相关)公式(如平方差；等比数列求和；等等)。

2.2.3 极限

一如既往，我们分数列和(定义在区间或实数上的)函数两种情形来考虑。对**数列极限**：

- 定义
- 性质：唯一性、有界性、四则运算、有序性；数列收敛与其子列收敛性的关系；
- 判别与求法：夹逼准则；单调收敛原理；四则运算；e的妙用；Stolz定理；用函数极限求等等。

对**函数极限**：

- 定义：
  - 函数极限自变量的变化情况更为复杂，比如有从左趋近、从右趋近、趋近一个有限数、趋于无穷。
  - 函数在一点处的极限被这一点邻近的取值趋势所决定，与该点本身的取值无关。
- 性质：唯一性、局部有界性、四则运算
- 判别与求法：四则运算，e的妙用，等价无穷小，……(当然还有大家喜欢的洛必达法则)

两者的关联，即**函数极限与数列极限的关系**(Heine归结原理)。对极限的理解方式：

- 代数：一种特殊的运算(类似加减乘除对数……)
- 分析：度量空间
- 几何：凝聚或趋近。
- 直观：赋予一个动态变化过程一个表征其"趋势"的"指标"。亦即将试图将"有限的操作或运算"推至一个"无限的、宏观的、整体的属性"

2.2.4 连续性

一点泛谈 连续性可能是最为直观(在学微积分之前，我们就已经积累了相当的对连续性的直觉)。在极限、实数理论尚未严格建立的时代，微积分创始人(之一)莱布尼茨就已经敏锐地把握到了连续是自然宇宙的一种很"根本"的性质。莱布尼茨的哲学体系大抵便是三个主要概念:不可分的实体(单子)、连续律和前定和谐。

> *哲学所面临的问题大可归结为两大“迷宫”:一个是自由与必然之间的矛盾,一个是不可分的点与连续性之间的矛盾。*
>
> *————莱布尼茨《神正论》*

这种经验上的直观其实来自于宇宙自然一种表象的实质————在我们的尺度观察下(牛顿时空观下的物理学)"基本上"都是连续变化(甚至是光滑变化)的过程。这也是微积分之所以广泛用于物理的一个自然哲学基础————"(我们相信)自然界(大体)是连续变化的"。当然，后来的量子力学以及数学中拓扑流形理论的发展将革新发展这一观念；但不可否认的是，在我们生活经验的直观尺度下，"连续定律"的确是我们对宇宙自然最基本的认识之一。

然而数学上严格清晰地说明白何谓"连续"却并不是一件非常平凡的事情。这便需要利用我们的工具"极限"。

知识总结

- 定义
  - 八股文：$\epsilon-\delta$语言的描述(或者$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$)；
  - 更有启发性的理解：f连续iff f与极限lim可交换。
- 左连续、右连续的定义，以及与连续的关系；
- 连续函数的运算性质：连续函数的加、减、乘、“除”、复合仍连续。
- 连续函数的分析性质：
  - 零点定理、介值定理
  - 有界定理、最值定理(注意要求是有界闭区间上)
- 反函数的连续性：
  - 开区间到开区间的一一映射f，f连续则f的反函数也连续。
  - 严格单调递增的连续函数其反函数必定连续。

Remark 3 *上面连续函数的分析性质之所以两两配对的写，是因为其证明(即其实质)是一样的。比如介值定理可以推出零点定理，但由约简化归，零点定理亦可推出介值定理。有界与最值定理关系同理。*

Remark 4 *为何有界定理、最值定理要求有界闭区间，以及反函数连续性的本质，很难在高等数学或数学分析下看清楚看透彻，故这里不论述。但它们的严格证明是可以在数学分析或高等数学的知识范围内论证的。*

2.3 方法回顾

回顾一些习题课上大家学过的一些数学解题方法或想法。

- 综合法-分析法-两边夹方法。
- 数学归纳法：尝试-猜想-归纳-证明。
- 约简法：从特殊到一般，化一般为特殊。
- 分类讨论法：如分段拟合控制法，对主部余部分类控制。
- 类比法：数列与函数的类比。

3 习题演练：极限与连续

Finally, if you attempt to read this without working through a significant number of exercises , I will come to your house and pummel you with EGA[1] until you beg for mercy. It is important to not just have a vague sense of what is true, but to be able to actually get your hands dirty. To quote Mark Kisin:“You can wave your hands all you want, but it still won’t make you fly.”[2]

[1]代数几何“圣经”。

[2]这段话曾笑死我，兼之其所说甚在理，故引用之。

————Ravi Vakil

本小节万分感谢谢彦桐助教老师提供的素材和资料!

3.1 e的妙用

Problem 1 求极限$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$。

Problem 2 求极限$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2}$。

Problem 3 求极限$\lim_{x\to+\infty}(sin\frac{1}{x}+cos\frac{1}{x})^x$。

Hint 我们已经知道的是：

- $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$
- $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ [证毕]

Hint 尝试用变量代换的方法将上面题目化归为上面我们所知道的极限。

Hint 回顾对数函数与指数函数在化归中的用处。

Remark 5 尝试自己观察总结一下这种方法适用的情境和使用的套路格式。

3.2 等价无穷小

Problem 4 求极限$\lim_{x\to0}\frac{x^2sin3x}{tanx^3}$。

Problem 5 求极限$\lim_{x\to1}\tan\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}$。

Problem 6 求极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{sin(x^2)\sqrt{x}}{ln(1+x^{\frac{2}{3}})arctan(5x)}$。

Problem 7 求极限$\lim_{y\to0}(1-5y)^{\frac{1}{y}}$。

Hint 回顾总结我们常用的等价无穷小，代入。

Remark 6 对相信洛神的同学：上面的题如果要用洛必达，是不是会死人的？

3.3 函数与数列的关系

Problem 8 $f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数，则$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$当且仅当$f(x)$恒等于0.

Hint 一个方向的证明是平凡的。另一个方向尝试用反证法，利用Heine归结原理。

4 补充内容与预习建议：以备不时之需

4.1 备选内容

视有无剩余时间，取决于大家的兴趣（课堂上服从多数人选择或者服从声音大的选择），可从下面内容中补录：

1. 芝诺钟悖论(见上一次讲义；数列极限的计算相关)。
2. 广义的极限与十维时空(见上一次讲义；数列极限的定义相关)。
3. 常识VS共识(蓝眼睛岛之谜：数学归纳法的运用)
4. 实数的构造(戴德金构造或康托尔构造)。

4.2 预习建议

我们将以非常快的速度回顾总结第一章的知识点，然后较为仔细的讲讲义中的习题。因而建议：

- 复习巩固讲义第一部分提到的知识点(比如定义、定理内容等)。**一定要复习!**
- 如果有精力，强烈建议在习题课之前自己做一下讲义中的习题；如有卡顿，可以根据Hint获得一些思路；如果仍然做不出，可以做好标记，在习题课上重点听，并对比反思自己是卡顿在哪一个步骤上。

[结语] 茫茫宇宙有着许多美丽可贵的奇缘，比如远古的星光点缀了此刻的夜空，比如创世的星尘凝结成曼妙的生命，还有在苍凉时空之中，茫茫人海之内，我竟有幸在今生遇见了你。

————刘抒睿

（本篇完）