高等数学第三次习题课讲义

刘抒睿(助教)

18级数学科学学院本科生
chaneyrui@pku.edu.cn

2020 年 10 月 14 日

目录

摘要

本文是习题课预先发给同学诸君的讲义。本次习题课的主题是极限。第一部分将一题一例常见的求解极限之方法(未完待续)，第二部分为与极限等知识相关的数学理解与运用。

讲义中题目或附提示，或毫无解答；选题用意限于篇幅不便尽列，相关诠释以课堂为准。请慎重用为笔记。

本文仅用于习题课使用，文中多处引用未注来源，诚致歉意(I claim no originality for this note.)。

1 引子：可跳过的废话与感想

That which does not kill me, makes me stronger.[1]

————F.Nietzsche

提起数学，大家可能第一反应就是高难的计算或者是严谨而抽象的证明。但或许，真正的数学应当是在计算/证明之后我们所领悟到的东西；他们或者将我们直觉或经验上的观察严谨无模糊地表达出来，或者让我们对某一事物有了更深刻的认识，逻辑只是我们清晰表达以及错误防范的工具。自然，在此过程中，数理基础(或者更确切地说，知识的积累与技术的熟练)是重要的；然而，他们绝不等于全部。因而我们应当常常反思，我们学到的东西”究竟告诉了我们什么”；我们做出的题目”究竟有什么意义”。我们也应当常常结合自己的日常经验/观察或自己所学的其他学科的知识，进行一些不严格的”民科式”思考(然后试图用数学语言准确地描述出来)。事实上早在柯西、维尔特拉斯等人严格化分析的基础之前，微积分就已经蓬勃发展和广泛运用了(牛顿、欧拉....)。而在Kolmogorov引入概率论公理体系之前，概率论就已经取得诸多辉煌的成就了(伯努利大数定律、中心极限定理……)。我们出于精准以及深入学习的考虑，不能不重视逻辑细节与公理；但我们也不能过度纠缠细节而舍本逐末。简言之，我们应当意识到：

[1] I hope that maths will make you stronger $\varphi(>\omega<*)$.——Shurui Liu

Moral 1 数学≠逻辑学。*What we really care about is not logic,but real maths.*

正如谢助教老师在其讲义中所强调的反思的重要性，我们秉持下面的价值观：

Moral 2 一场结果无甚蕴意的计算亦或一次过程无甚启发的证明，终归只是一道习题。

一道做后无甚技术提升亦或无甚方法总结的习题，只配做给你带来一秒钟快感、证明自己蛮聪明的小游戏。

如果快感都没有，那么它真的就是垃圾。

出于以上的考虑，**我初步计划将习题课的内容分为两部分**：

- 纯粹的技术训练(习题演练/方法总结);
- 有一定蕴意的题目。

其中前者，读者听众诸君可视己情况，勤于动手，若有一时不解者，亦莫怀挫败之心；**多学多见，勤于反思，必日精进，向之所难，终归于易**。其中后者，限于笔者之能力、课堂之时间，终只能蜻蜓点水、抛砖引玉，但求能略有启发；读者听众诸君亦可持己之见，择所喜者自行深入探索。

初做助教，战战兢兢；经验匮乏，能力局限，还望读者听众诸君多加包涵；于讲义以及课堂内容有何建议以及批评，亦恳请指出，笔者诚不胜感激。

闲言已多，下列正文。

两个简单的注记，(这两个平凡的情形)或许可以帮你对实数定义以及完备性有一点”体验”：

问题 用极限说明$0.\dot{9} = 1$。

问题 说明”实数是有限小数、无限循环小数或是无限不循环小数”。(即用闭区间套原理说明实数十进制表达的具体含义)。

Remark 1 笔者认为高数的三个基本收获是能计算(像十以内加减法一样能完成简单的微积分运算)、会应用（将高数的知识和思维方式用在自己的学科上)、知原理（从数学内部结构的角度深刻理解微积分奏效的逻辑原因、结构性原因)。笔者推荐的部分参考书已在微信群发布。此不赘述。

2 习题演练：求解极限

> 数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来, 但证明却隐藏的极深。
>
> ————高斯

下面的题目基本上每题均代表了一种方法乃至于几种想法。可以先自己尝试做一做，并自己尝试总结出来[2]。请先自己思考再适当看提示。”问题”是试图提示读者继续思考；但不必局限于此，反而束缚了思路。

Problem 1 (Cauchy命题) 已知数列$\{a_n\}$的极限为a，试证明：$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$。

Hint 考虑平凡情形：如果a_n恒等于a，那么命题显然。极限为a和恒等于a，在n充分大时是不是差不太多呢？

[2]兴许你就是预言大师预言到我要讲的东西；兴许你总结出的比我的好得多。这多快乐！

Hint **行到水穷处，定义是归途。**请复习一下极限的定义。

Hint 如果又假定a=0，你是否会做呢？

Remark 2 一个数列都收敛了，它的平均值列还会远吗？

Remark 3 上述命题之逆一般情况下并不成立（你能构造反例吗？你的反例必然具有一个显著的特点，你能意识到吗？)；但对单调序列逆命题也是成立的。*(*想想这是为什么？*)*

问题 上面的命题形式上能一般化吗？(尝试推广Cauchy这个结论)。比如：

命题 2.1 数列$\{a_n\}$的极限为a，$\{b_n\}$的极限为b，则$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$的极限*(*当$n$趋于无穷大*)*是$ab$。

命题 2.2 若数列$\{a_n\}$的极限为a，则$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k$的极限*(*当$n$趋于无穷大*)*是$a$。

Problem 2 求解极限$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$。

Remark 4 此经典题的证明方法是不唯一的*(*我相信至少有5种*)*。根据作业题，你或许知道如何用定义去证明了；你能用更简洁的方法证明吗？你是否意识到你在定义法证明的过程中，真正的关键是什么？

Hint 用量级感觉一下。你也可以数字化的感知：依次取n=1,10,100,1000,近似估计一下(注意2的10次方就已经是1024了)，可以找一下感觉。

Hint 复习一下你学过的最常用的不等式。结合上一问你的感觉，进行估计(让尺度在能够允许的程度)。

Remark 5 一些常用的尺度比较*(*你可以利用不等式估计去证明*)*，结论本身很有用：$lnlnn << lnn << n << n^2 << n^3 << 2^n << 3^n << n! << n^n$。

Remark 6 一个事实*(Stirling*公式*)*：$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$。

Problem 3 试证明***(*以下极限过程均为*n*趋于无穷大*)*：**

$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+\cdots \sim \frac{n^2}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots \sim \frac{n^3}{3}$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots \sim \frac{n^4}{4}$

你已经猜出有一般的：$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k+2^k+3^k+4^k+\cdots \sim \frac{n^{k+1}}{k+1}$

Hint 回顾记号含义：$a_n \sim b_n$的含义是$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$。

Hint 对于前3问，请复习前两次习题课的内容。

Hint 对于k=4,5等较小的具体数字，你可以利用你学过的方法直接求出和公式来。

Hint 对于知道积分或导数公式的同学：这是不是像极了x^k的不定积分是$\frac{x^{k+1}}{k+1}$(+一个待定常数)?!

Problem 4 (Stolz定理1) *(*$\frac{0}{0}$型*)* 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：

1. $\{b_n\}$严格单调递减且趋于零*;*

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$.

则$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

Problem 5 (Stolz定理2) *($\frac{*}{\infty}$型)* 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：

1. $\{b_n\}$严格单调递增且趋于正无穷;

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$.

则$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

Remark 7 上面的L可以取有限实数也可以取正负无穷(即广义极限)。

Hint 你可以用定义对上面的两个问题进行证明。你也可以先证明下面非常一般非常强悍的命题，然后通过恰当的特殊化得到上面的Stloz定理(即上面两个定理为下面命题的推论)。你可能认为下面的命题将更难证————但似乎还真的不是。下面的命题证明只是麻烦，但手法完全类似于你在证明Cauchy命题时的论证过程。

Problem 6 (Toeplitz命题) 设n,k为正整数，t_{nk}均非负，且满足$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0$。若$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则有$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k = a$。

Remark 8 若将$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$条件放宽为$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，但要求$a = 0$，则命题仍然成立。

Remark 9 若不要求t_{nk}均非负,并将$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$放宽为一致有界性，即存在整数$M$，使得对所有$n$均有$\sum_{k=1}^{n} |t_{nk}| < M$，但要求$a$=0，则命题仍然成立。

Hint 这个命题几乎可以拿来证明本讲义前面所有的习题。你假装你会证了此题，你能应用它做出前面的题吗？

Hint 试试如何套用这个定理去证明Cauchy命题(Problem 1)。然后反过来：把Cauchy命题中特殊化的量换回这个一般的场景，你能否由此证明这个一般的结果？（这种方法就是：**从特殊到一般**，generalization与specialization.）

3 极限之思：时空内外

> 不能取得显著的成功我并不在意。想到自己不能走进那种只有真正的伟人才能进入的真理栖居的至高境界，我才会真正感到难过。而寻不到真理，我宁可死去，也不愿苟活。
>
> ————Simone Weil[3]

下面的两题以思想为主，读者不妨结合自身经验与自己所学学科之体会，多进行一些开放性的思考。

Problem 7 (哲学：芝诺时空(阿克琉斯永远也追不上乌龟)) 古有哲人名芝诺，喜思运动之悖论。下为一例：

[3]法国思想家，大数学家Andre Weil的妹妹。

有一只乌龟在阿克琉斯前面距离为L(比如$100m$)，阿克琉斯想追她。慢慢的乌龟速度是v_1(比如$1m/s$)，飞快的阿克琉斯速度是v_2(比如$11m/s$)。请问阿克琉斯多久能追上乌龟？你轻松地运用小学算术，说是$\frac{L}{v_2-v_1}$(也就是$10s$)。但请你按下面的想法去看：

第一轮，阿克琉斯跑了距离L(比如$100m$)，那么乌龟在这段时间内向前爬了Lv_1/v_2(即$\frac{100}{11}m$)。阿克琉斯没追上小乌龟。

第二轮，阿克琉斯再跑到乌龟所在地(即跑了$\frac{100}{11}m$)，那么乌龟又爬了$L(v_1/v_2)^2$。

以此类推，每当阿克琉斯追到乌龟此时的出发点后，乌龟又向前爬了一段距离，从而飞毛腿阿克琉斯有无穷多个新的出发点等着他，怎么追也追不上乌龟。

——————芝诺(非原文，为改编)

问题：试用高等数学已经学到的知识对此做一些解释，或证明:倘若芝诺稍微学习一点点高数B，就不会觉得这是悖论了。

Hint 我们用更物理一点的语言去描述就是：所谓钟表就是用一个(我们规定/假定的)周期性运动作为标准，去量其他事件发生的时间。我们的原子钟是利用原子内部发生的某种周期运动去量的，我们将其测出的时间记为t，芝诺引入的是一种芝诺钟表(测出的时间记为t')，即规定阿克琉斯到达乌龟的出发点为标准周期运动，当$t' = n$时，阿克琉斯到达乌龟在$t' = n - 1$时刻的出发点。那么对于任何有限的t'，阿克琉斯都在乌龟的后面，永远也追不上乌龟。

Hint 其实我们要做的就是找出t'与t的"换算公式"。

问题 重新“哲学”地思考上面的过程，提出问题。

Remark 10 一个永恒的问题:时间是什么？

可能的想法:时间是事物发生的相对次序。时间是宇宙物质运动固有的属性，不依赖意识的存在而存在。我们无法定义时间是什么，只能定义如何去度量时间。···数学和物理学的发展不断革新着我们对时间以及空间的认识(牛顿时空观；相对论；普朗克时间；*etc.*)。

Problem 8 (物理：时空的维数) 试证明(或证伪或伪证)$1+2+3+4+\cdots$(极限为)$=-1/12$

Hint 不必追求严格，可以用民科一点。

Hint 想不到就算了hhh。因为如果你真的想到了————那么你的水平就已经企及"民科大牛"欧拉了。

问题 这个离谱的式子会有什么意义吗？

问题 如果从直观/哲学的角度理解这个离谱的式子？

Remark 11 从宏观而言，极限不过是连接局部(有限)与全局(无限)的方式，是一种"趋势"的刻画或依赖关系的指标······不管怎样理解，我们应当意识到：极限的理解乃至于定义方式是不唯一的。必然有很多不同于课本上的极限定义，早已广泛地在人类社会乃至大自然的斑驳现象中暗含影射了。因而我们的思路不妨打开一些，大可不必拘泥于书本之定义(当然我们需要先理解此定义之意义、妙处、拙劣处)。

4 补充内容：读者自证可能难

即得易见平凡，仿照上例显然。留作习题答案略，读者自证不难。反之亦然同理，推论自然成立，略去过程QED，由上可知证毕。

————《西江月》来自网络

以下内容用于备用补充课堂或有心之读者自作练习。内容相当部分来自谢助教老师的讲义或受其启发，特此感谢。尽管笔者自己也深恶痛绝“留作习题答案略，读者自证不难”之语，然限于篇幅及精力，亦不得不做此处理。

Problem 9 以下极限过程均为n趋近于正无穷，为简便而略去。

- 求解极限$(1-\frac{1}{n})^n$
- 求证极限$sin(nx)$不存在。
- $0 < a_0 < b_0$，递推关系$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$，求证明序列$\{a_n\},\{b_n\}$均收敛并且极限相同。
- 证明任意开区间(a,b)包含不可数个元素。证明有理数可数。从而直接干净地证明了你们的作业题：任意开区间(a,b)必然有无理数。

[结语] 茫茫宇宙有着许多美丽可贵的奇缘，比如远古的星光点缀了此刻的夜空，比如创世的星尘凝结成曼妙的生命，还有在苍凉时空之中，茫茫人海之内，我竟有幸在今生遇见了你。

————刘抒睿

（本篇完）