高等数学第十三周习题课讲义

向量代数与空间解析几何

作者：刘抒睿 (助教)

学院：北京大学数学科学学院

时间：2020 年 12 月 19 日

邮箱：chaneyrui@pku.edu.cn

这个世上，若没有让你甘愿赴死的人，活着何其无趣。——《庆余年》

前言: 预习导引

> A mathematician,who is not also some thing of a poet,will never be a complete mathematician.
>
> —-Weierstrass

本文是习题课预先发给同学诸君的讲义。本次**习题课的主题**是教材第五章向量代数与空间解析几何。

笔者私以为，这一章或许是高等数学教材上册中最为简单的一章；甚至多数内容，实属高中（理科）教学内容 (朴素的几何观点)，或实际上是线性代数等课程的特例（代数观点）。书中大多公式之推导并不困难，需熟知熟记，而大多题目套公式而已。笔者认为其中或可谓新知的，只有向量的叉乘与混合积、二次曲面分类、空间曲线的切线与弧长等。

本章的学习建议便是：总结并记忆所有公式与结论，大致理解其缘由；通过做书后习题刷题目来达到对公式的熟练运用。

鉴于笔者对于其难度、思想性、重要性等之考量，**本次习题课计划**将**首先**以较快的速度温习其中要点；**其次**补充讲一种换元法解不定积分习题的套路，**然后**视时间而定，略一阐述高等数学书中或许讲解未清之处 (dx 的多种含义，一阶微分的形式不变性)；**最终**，视听者兴趣而定，略一科普近代几何之故事与理念。笔者亦觉此讲颇为纠结：囿于教材，则无论从应试之角度还是从思想之高度，皆不可取；而科普需考量难度与可接受性，却又不应浅尝辄止、引起误解；科普所选内容应切合教材所学，却又应当具有近现代理学之精神；限于笔者能力与经验，着实为难，勉强试之，还望听者海涵。

讲义中题目多附提示，以求便于自学，亦望读者诸君勤于动手，自先尝试；选题用意限于篇幅不便尽列，相关诠释以课堂为准。请慎重用为笔记。

本文仅用于习题课使用，文中多处引用未注来源，诚致歉意 (I claim no originality for this note.)。

——刘抒睿

目录

第一部分 向量与几何习题：晓看天色暮看云

当我考虑这个问题时，有一个形象的类比："你愿意成为一个代数学家还是一个几何学家？"这个问题就像问"你愿意是聋子还是瞎子"一样。

————Atiyah

几何知识点简列

- 向量的运算（内积，外积，混合积）
- 平面方程（点法式、截距式、一般式、三点式）
- 空间直线方程（对称式、参数式、两点式、一般式）
- 位置关系（平行、垂直、相交；直线在平面内、两直线异面等）及其向量语言与坐标语言刻画
- 夹角、距离的计算（向量法与坐标法）
- 空间曲面的方程的求解（旋转面、柱面等）
- 二次曲面的分类
- 空间曲线的切线与弧长公式
- (复习) 旋转体的侧面积与体积

题目 1.1.

试证明 $(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta})^2 + (\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta})^2 = |\overrightarrow{\alpha}|^2|\overrightarrow{\beta}|^2$.

♡

提示 至少我们总可以用坐标法将其变成代数式的暴算。

提示 用内积 (点乘)、外积 (叉乘) 与向量模长、夹角关系的式子不难证明。

题目 1.2. (三角形面积坐标公式)

三角形 ABC 平面直角坐标系下顶点坐标为 $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$,$C(x_3, y_3)$. 试证明三角形 ABC 面积为

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| \tag{1.1}$$

♡

提示 把平面放到三维中去，然后运用叉乘的性质。

题目 1.3. (Jacobi 恒等式)

试证明：$\overrightarrow{\alpha} \times (\overrightarrow{\beta} \times \overrightarrow{\gamma}) + \overrightarrow{\gamma} \times (\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) + \overrightarrow{\beta} \times (\overrightarrow{\gamma} \times \overrightarrow{\alpha}) = 0$.

♡

提示 笔者认为这是叉乘最根本的性质之一 (另外两条是反交换性、线性)。你可以用坐标法去暴力运算验证；或注意到线性性，只需要对标准基去验证即可；或巧妙运用其他叉乘、点乘的恒等式。

题目 1.4. (直线、平面、曲面)

你的室友小明在做高等数学作业题时，遇到了一堆他不会的题目；然而明天早上就是他（她）的 ddl，于是他（她）来请求您的帮助。已知直线

$$l_1: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ 3y - z + 8 = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

与直线

$$l_2: x - 1 = y + 1 = z - 3, \tag{1.3}$$

以及曲面

$$S: x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1 \tag{1.4}$$

与在 yz 平面上的椭圆

$$E: \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{1.5}$$

1. 请您求出 E 绕 z 轴转一周所得曲面的方程；
2. 请您求出通过 l_1 且与 l_2 平行的平面 π 的方程；
3. 请您求出曲面 S 平行于平面 π 的切平面 Σ 的方程。

♡

提示 听大明透露说小明的作业是从书后第五章总练习题里选的。

题目 1.5. 球体

推导出球面 $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ 的表面积公式，以及球体 $B^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2\}$ 的体积公式。

♡

提示 运用旋转体的公式可以得到。

提示 请尝试用微元法做。这有助于理解很多同学问笔者的问题：为何侧面积是 ds 乘以周长，而体积是 dx 乘以面积 S。(另一个很好的例子是去考察圆台。)

提示 会重积分或曲面积分的同学也可尝试用这些知识去算。但实际上并不比上面的方法简单。

第 二 部分 dy 与 dx：雨打梨花深闭门

From the traveler,
whose sack of provisions is empty before the voyage is ended,
whose garment is torn and dust-laden,
whose strength is exhausted,
remove shame and poverty,
and renew his life like a flower under the cover of thy kindly night.

—-Rabindranath Tagore

笔者私认为，这是高等数学教材中讲解不够清晰的内容 (甚至数学分析教材也略有模糊之处)。譬如 dx 的符号多处出现，然含义各有不同，应当明示；微分形式不变性的含义阐述也有不清之处，至少，是微分的形式不变性，还是微分形式的不变性？中间断句理应明示[1]。

然而此处若欲窥其本质，难以用高等数学（数学分析）的语言和内容说清。故我们仍然浅尝辄止，只略一澄清记号。

2.1 dx 的含义

1. **不定积分**

此处 dx 纯系形式上的符号，没有实质性的含义，仅仅有使用上的方便，譬如可以指明变量 (标识作用)，譬如可以使凑微分方法写起来更简明，譬如可以衔接牛顿-莱布尼茨公式使之更自然⋯⋯但实际上并无实际意义 (或者说其没有明确的数学含义/定义)。写 $\int f(x)dx$ 与写成 $\int f$ 没有什么本质区别。

2.**(多) 重积分**

此处可以仍然理解无实际的符号，也可以理解成是测度 (读者可以理解为面积/体积微元) 的标识；见于在高等数学情境下，有标准的测度选取 [使得各边长为 1 的正方体的测度 (即" 体积") 等于 1]，两种理解应当可以等价。

3. **定积分、曲线积分、（第二类）曲面积分**

此处特别之处在于有" 定向" 的概念。此处 dx 应当理解为" 微分形式"，是具有明确数学定义、数学含义的数学对象 (在高等数学课上不讲何谓 “微分形式”，读者只需理解为此处 dx 是带了方向的、有确切数学含义的对象，而不仅仅再是无意义的标识符号)。

[1]需要强调的是，本部分多处内容乃是受启发自数学科学学院**范后宏**教授，此特感谢；且笔者诚推荐有兴趣的同学选修范老师所开的 A 类通选课《**古今数学思想**》。

4. **微分 dy,dx**

此处是给定一个可微函数 y=f(x), 则 dy=f'(x)dx 是一个关于 x 和 dx 的多元函数；并且其关于 dx 是线性函数 (固定一个 x)。

如 $f(x) = x^2$, 则 $df = 2xdx$，df 的值被 x，dx 取值共同决定。

或许，第 4 条的理解中用 dx 则记号丢失了很多信息，使得在微分形式不变性、微分含义的讨论中常常容易引起初学者的困惑。我们下面提出一种改进的方法。

2.2 微分形式不变性

当我们谈 dy,df 时，是默认已经指定了所考察的自变量是什么，而这一点没有被上面的记号所体现，因而会引起一些混淆。因而我们**建议**：

笔记 自变量为 x，则微分应完整地记作 $d_x y$，$d_x f$；相应地，$\Delta y, \Delta f$ 应完整地记作，$\Delta_x y, \Delta_x f$。

特别地，依据定义，我们总有

$$d_x f := f'(x) d_x x, \tag{2.1}$$

$$\Delta_x f := f(x + \Delta_x x) - f(x). \tag{2.2}$$

特别地，我们因而总有

$$d_x x = \Delta_x x. \tag{2.3}$$

特别地，利用符合函数求导，我们容易证明并将一阶微分的形式不变性表述如下：

命题 2.1. 一阶微分形式不变性

若 $y = f(x), z = g(y)$ 均可微，则 $d_x z = g'(y) d_x y$，即形式上与 $d_y z = g'(y) d_y y$ 相同，只需忘记自变量的选取 (即忘记 $d_?$ 的下标)。这便是一阶微分的形式不变性。

这样，在课本和配套习题书的相应章节中的诸多表述，将更为明确和清晰。感兴趣的读者可以以上述记号重新理解明辨相应内容。比如对于 $\Delta y = dy$ 是否成立，我们自然明白总有 $\Delta_y y = d_y y$，但一般不成立 $\Delta_x y = d_x y$(注意这个一般不成立！)。

对于高阶微分不具有形式不变性，我们利用上面的符号，读者对二阶微分进行演算推导，即明其意。而其中深蕴本质，远超本课之内容，故不再介绍。

第 三 部分 备选内容: 赏心乐事共谁论

Two roads diverged in a yellow wood,
And sorry I could not travel both,
And be one traveler, long I stood,
And looked down one as far as I could.

—–Robert Frost

Selective Topics

- ❑ 虚数的幻影 (不定积分补充; 双曲三角换元法; 椭圆积分与椭圆函数)
- ❑ 天才的野心 (欧几里得共设的讨论, 即存在观念、平行移动、平行公理……)
- ❑ 对称与永恒 (三维欧氏空间神秘叉乘结构的缘由)

3.1 虚数的幻影

笔者初学不定积分时，曾留有经验口诀

笔记 换元积分口诀: 先解后代，遇繁求反。

笔记 分部积分口诀：反对幂三指。

其中所谓求解，即对应于参数化一个方程。比如遇到 $\sqrt{1-x^2}$，我们即欲参数化 $y=\sqrt{1-x^2}$，亦即 $x^2+y^2=1$，我们有常用的三角换元和万能代换 $(x=\frac{t^2-1}{t^2+1}, y=\frac{2t}{t^2+1})$ 等。几个自然的问题是:

1. 遇到 $\sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$ 怎么办?
2. 上面这些代换的几何/数论意义是什么?
3. 遇到根号内三次、四次、五次及以上，怎么办?

对于上面第一个问题，我们可以利用正切和正割函数换元，但有时可能计算较为复杂，且与正弦余弦的三角换元差别很大；我们是否可以利用 $\sqrt{-1}$ 的引入，将问题 1 的情形化归为我们正弦余弦换元的情形？或至少与之类比？答案是肯定的。请读者自行验证文末的习题。

对于第二个问题，则是联系了古典几何与数论和近现代代数几何、代数数论的一个例子。(几何) 毕达哥拉斯定理（勾股定理）与 (数论) 勾股数，圆周与直线段的关系……毕达哥拉斯“万物皆数”的思想，是幼稚的，经不住推敲的，随着无理数的发现、科学的发展不久便衰亡，毕达哥拉斯学派成为历史尘埃；但“万物皆数”的理念以新的内涵，在某种意义上复兴……

对于第三个问题，则是数学史话最为精彩、最为震撼、最为漂亮的成就之一，可谓是近现代数学理念的源头之一。上溯分析学集大成者欧拉的代换技巧与慧眼独具，经往勒让德精湛的分析计算技巧与其囿于微积分视角的遗憾苦楚，再在高斯的天才眼光下升华璀璨；又有着魏尔斯特拉斯的苦心孤诣，伽罗瓦、阿贝尔、黎曼遗世独立的奇思与落寞死去的悲凉；又勾连物理单摆周期、三次振动、广义相对论水星近日点进动之诸多故事……这也部分地回答了一个问题：我们为什么研究几何？我们为什么要研究抽象空间？

3.2 天才的野心

分析学的实数本质是是直线的几何学。高维情形亦然，是欧式几何的分析学实现。而早在古希腊，欧几里得在几何原本就列出了欧式几何的公理刻画：

1. 过相异两点，能作且只能作一直线（直线公理）。
2. 线段 (有限直线) 可以任意地延长。
3. 以任一点为圆心、任意长为半径，可作一圆 (圆公理)。
4. 凡是直角都相等 (角公理)。
5. 两直线被第三条直线所截，如果同侧两内角和小于两个直角，则两直线则会在该侧相交。

当然，上面的公理其实还不够完整，学过微积分的你们可能意识到还缺乏连续性公理，实际上其还缺乏合同公理。这些暂且不论；上面五条公理实际上在说什么？前三条规范了何谓存在，第四条规定了空间的某种齐次性 (实际上是对近代联络/平行移动概念的朦胧意识)，而第五条等价于平行公理，也等价于三角形内角和等于 180 读。第五条显得格外突兀，不知所云。

受到康德唯心主义学派等的影响，以及缺乏对" 数学存在" 的理解，一代数学家均试图证明第五条公设可以由前面的公设推出。比如希望一鸣惊人的勒让德。他成功地证明了以下定理：

1. 不用第五条公设的条件下，存在一个三角形内角和等于 180 度，则世界上所有地三角形内角和都等于 180 度。
2. 不用第五条公设的条件下，可以证明任意一个三角形的内角和都小于等于 180 度。

最后其证明了 “不依赖第五条公设，三角形内角和等于 180 度”，并兴奋地以为自己终能名垂青史。可惜现实总是悲凉的——其不久后其便发现，他最后的证明隐含了一处隐蔽的伪证。

但由他已经证明的结论，也能得到一些有趣的事实，比如

我们的世界是欧式的，等价于我们的世界上存在着矩形。

那么，如果你是严苛的广义相对论信仰者，你可以声称在地球上人们见到的矩形是虚假的，现实世界上不存在严格的矩形。

取消第五条公设，即进入非欧几何，比如黎曼几何和双曲几何 (罗氏几何)。当然，数学家并不是逻辑学家，黎曼几何和罗氏几何的意义并不在于对逻辑的考察上。譬如高斯，其早已意识

到非欧几何的存在，他认为这是“星空几何”。而黎曼更是建立在对几何的革命性新认识之上，建立了理解几何的革命性的新方式 (流形、拓扑的理念)。

3.3 对称与永恒

三维欧氏空间的叉乘结构是三维独有的性质之一，四维、五维、六维都不具备。这一结构来自于 3 维的哪些特殊性 (结构) 呢?

第 三 部分 习题

1. 我们定义记号 $shx := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$,$chx := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. 他们均是由你已经熟悉的指数函数经过四则运算得到的初等函数。
2. 验证公式 $ch^2x - sh^2x = 1$.

   提示 完全初等的验证。只需要把 chx,shx 的定义式代进来，进行运算就行。下面的题目同理。
3. 验证公式 $sh2x = 2shxchx$.
4. 验证公式 $ch2x = 2ch^2x - 1 = ch^2x + sh^2x = 2sh^2x + 1$.
5. 验证公式 $ch^2x = \frac{1+ch2x}{2}$,$sh^2x = \frac{ch2x-1}{2}$.
6. 验证公式 $(shx)' = chx, (chx)' = shx$.
7. 验证公式 $\int shx = chx + C, \int chx = shx + C$.
8. 求证 shx 的反函数为 $arcshx = ln(x+\sqrt{x^2+1})$,chx 的反函数为 $arcchx = ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
9. 验证公式 $(arcshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 以及 $(arcchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

   提示 设 $y = arcshx$，则 $x = shy = \frac{e^y-e^{-y}}{2}$，两边同时乘上 e^y，则变为关于 e^y 的一元二次方程，用求根公式求出 e^y，再取对数即可。
10. 你可能已经发现上面的公式非常类似于正弦和余弦函数的相应公式，但这是为什么? 观察 $e^x, sinx, cosx$ 在 0 处的泰勒展开公式，有无相似之处? 。如果引入 $i = \sqrt{-1}$, 直接用泰勒展开公式验证 $e^{ix} = cosx + isinx$. 我们于是得到 $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $sinx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. 则 sinx,cosx 可分别用 shx,chx 利用 $\sqrt{-1}$ 关联起来。

    提示 发现上面的公式与正弦余弦公式的区别就在于，遇见 sh^2x 就会比 $sinx$ 的相应公式多一个系数-1。

    提示 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 被称为上帝公式。

[结语] 茫茫宇宙有着许多美丽可贵的奇缘，比如远古的星光点缀了此刻的夜空，比如创世的星尘凝结成曼妙的生命，还有在苍凉时空之中，茫茫人海之内，我竟有幸在今生遇见了你。

————刘抒睿

（本篇完）