

des catégories dérivées
des catégories abéliennes

Abel 范畴的导出范畴

[法] J.-L. Verdier 著

傅颢硕 译

目录

引言	1
第一章 加性范畴的复形范畴	21
1. 分级范畴	21
1.1. G 形式的分级范畴	21
1.2. 群上范畴在同构意义下的运算	25
1.3. 两种语言的等价性	28
1.4. 群的变换	35
1.5. $\mathbb{Z}^n$ -范畴	44
1.6. Koszul 上闭链, 符号的规则	47
2. 加性范畴的复形	48
2.1. n -维复形	48
2.2. 关联的单复形	50
2.3. 复形范畴的分级结构	54

2.4.	复形之间的函子的扩张	57
2.5.	同伦	62
3.	特异三角形	68
3.1.	一个映射的锥	68
3.2.	锥函子的性质	73
3.3.	特异三角形的性质	84
3.4.	特异三角形的函子性质	91
第二章	剖分范畴	99
1.	定义和基础性质	99
1.1.	剖分范畴的定义	99
1.2.	特异三角形的基础性质	105
1.3.	剖分范畴的例子	116
2.	剖分范畴的局部化	121
2.1.	态射的乘性系 [14]	121
2.2.	范畴局部化的建立	130
2.3.	局部化函子的性质	141
3.	剖分范畴的 Abel 化	152
3.1.	范畴 $A(\mathcal{D})$ 的构造	152
3.2.	范畴 $A(\mathcal{D})$ 的性质 ($\mathcal{D}$ 是剖分范畴)	155
4.	谱对象	166
4.1.	谱对象的定义	166

4.2.	谱序列的机制	170
4.3.	项 $E\left[\begin{smallmatrix} n \\ -\infty, p, q, +\infty \end{smallmatrix} \right]$	176
4.4.	收敛	178
第三章	导出范畴	183
1.	导出范畴的定义	183
1.1.	记号与术语	183
1.2.	导出范畴的著名子范畴	185
1.3.	典范 δ -函子	192
2.	分解	199
2.1.	基础的态射	199
2.2.	对特定对象的集合的研究	204
2.3.	分解上的一些引理	210
2.4.	应用	221
3.	Ext 的研究	228
3.1.	不同定义的等价性	228
3.2.	Yoneda 的构造	232
3.3.	范畴 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$	240
4.	通常的谱对象	250
4.1.	第一个典范谱对象	250
4.2.	与 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中过滤对象关联的取值在 $\text{D}(\mathcal{A})$ 中的谱对象	263

4.3.	第二个典范谱对象	266
4.4.	常用谱序列	269
4.5.	收敛的问题	272
4.6.	Cartan-Eilenberg 谱对象	278

引言

在这里，我们提出超同调¹的形式。

1. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为两个 Abel 范畴， $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是加性函子。当 $\mathcal{A}$ 有足够内射对象时， F 的右导出函子的构造是经典的 [1]：设 X 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象， $X \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet(X)$ 是 X 的一个内射分解，在同伦意义下，这个分解是唯一的。从而复形 $F(I^\bullet(X))$ 的上同调在同构意义下是唯一的，它们由 X 唯一决定。这些函子定义为 F 的右导出函子。

因此，在同伦意义下，我们将 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 关联到一个复形。然而，同调代数中的一般构造中，我们不考虑同伦意义下的复形，而是考虑拟同构（两个复形之间的态射成为拟同构，如果由它导出的上同调映射是同构）。为了更好地说明这件事，我们提供两个例子：

首先注意到，为了研究函子 F 的导出函子，我们必须考虑比内射分解更一般的分解： F -零调的对象的分解： $X \xrightarrow{\varepsilon'} \mathcal{R}(X)$ 。（在层的理论中，由松²的层构成的对象 [23]；在模的理论中，由平坦模构成的对象……）这些分解在同伦的意义下不一定唯一，但给定一个 F -零调的分解 $X \xrightarrow{\varepsilon'} \mathcal{R}(X)$ 和一

¹hyperhomology

²flabby, fr:flasque

一个内射分解 $X \xrightarrow{\varepsilon'} I^\bullet(X)$, 存在一个且在同伦意义下唯一的一个分解的态射: $\rho: \mathcal{R}(X) \rightarrow I^\bullet(X)$ 使得以图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & \varepsilon' & \mathcal{R}(X) \\ X & \nearrow & \downarrow \rho \\ & \searrow \varepsilon & I^\bullet(X) \end{array}$$

此外, 给定另一个 F -零调的分解:

$$\begin{array}{ccc} & \varepsilon_1 & \mathcal{R}_1(X) \\ X & \nearrow & \downarrow \rho' \\ & \searrow \varepsilon_2 & \mathcal{R}_2(X) \end{array}$$

则 $\mathcal{B}$ 中的复形态射

$$F(\rho'): F(\mathcal{R}_1(X)) \rightarrow F(\mathcal{R}_2(X))$$

是拟同构。注意到我们现在有 $\mathcal{B}$ 中一个诱导的由复形和拟同构组成的系统, 其中有同伦意义下唯一的最大的元素: 由 F 作用在 X 的内射分解上的像。这个现象在我们讨论的第二个例子中不再发生。

这种用分解定义导出函子的方法有时在 $\mathcal{A}$ 没有足够内射对象或投射对象的时候实施。考虑拓扑空间 E 上的交换群的层, 这个范畴没有投射对象。然而, 我们仍然能够定义右正合函子 $G \mapsto F \otimes_{\mathbb{Z}} G$ (F 固定) 的左导出函子。当然, 这需要这样的定义满足左导出函子的性质 (正合序列和一些泛

性质)。在一些已知的情况下(如 E 退化为一个点), 这就是普通的张量积。

我们可以这么操作: 对每个层 G 有一个有限长度(事实上, 长为 2)的左平坦分解(每个点的茎都是平坦交换群): $L^\bullet \rightarrow G$ 。容易看到有以下事实:

a) 给定两个平坦分解 $L_i^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_i} G, i = 1, 2$, 存在第三个平坦分解 $L_3^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_3} G$ 和一个同伦的交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} & & L_1^\bullet & & \xrightarrow{\varepsilon_1} \\ & \nearrow \rho_1 & & \searrow \varepsilon_1 & \\ L_3^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_3} & & & G \\ & \searrow \rho_2 & & \nearrow \varepsilon_2 & \\ & & L_2^\bullet & & \end{array}$$

b) 给定两个平坦分解的同态

$$\begin{array}{ccc} L_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_1} & G \\ \rho \downarrow & \rho' \downarrow & \nearrow \\ L_2^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_2} & \end{array}$$

存在第三个平坦分解:

$$L_3^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_3} G$$

和一个分解的态射:

$$\begin{array}{ccc} L_3^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_3} & G \\ \sigma \downarrow & & \nearrow \\ L_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \end{array}$$

使得复形的态射 $\rho\sigma$ 和 $\rho'\sigma$ 是同伦等价的。

c) 对任意平坦分解的态射:

$$\begin{array}{ccc} L_1^\bullet & & \\ \rho \downarrow & \searrow \varepsilon_1 & \\ & G & \\ L_2^\bullet & \nearrow \varepsilon_2 & \end{array}$$

层复形的态射

$$F \otimes \rho : F \otimes_{\mathbb{Z}} L_1^\bullet \rightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}} L_2^\bullet$$

是拟同构。

于是对于层 G ，我们有一个良好定义的在拟同构意义下的层复形 $F \otimes_{\mathbb{Z}} L^\bullet$ 。在任何情况下，复形 $F \otimes_{\mathbb{Z}} L^\bullet$ ($L^\bullet$ 是 G 的平坦分解) 的上同调对象在同构意义下是由 G 唯一确定的。因此这个函子确实拥有需要的性质也值得“ F 的张量积函子的左正合函子”的名字。

当然，为了计算扭¹层 $\mathcal{T}or^{\mathbb{Z}}(F, G)$ ，我们可以采取由预层 $U \rightarrow \mathcal{T}or^{\mathbb{Z}}(F(U), G(U))$ (U 是 E 中的开集) 生成的层。但是我们使用的方法提供了一个在拟同构意义下良好定义的层复形，其上同调对象为 $\mathcal{T}or^{\mathbb{Z}}(F, G)$ 和 $F \otimes_{\mathbb{Z}} G$ 。我们将会看到这样处理的一些附加的方便信息。这个方法能立即推广到环化拓扑斯²并且在这个框架下，可以定义“层的张量积”的左导出函子。

¹torsion

²ringed topos, fr:topos annelés

2. 在研究两个函子复合后的函子的导出函子的结合性质时，尤其是 Künneth 的形式，需要将导出函子的定义域的形式从这个范畴的对象推广到这个范畴的复形。这个推广在 [1] 中就已经完成了。让我们回忆其中的主要线索。设 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是两个 Abel 范畴的加性函子，其中 $\mathcal{A}$ 由足够内射对象。 $Y^\bullet$ 是 $\mathcal{A}$ 中的复形。在 *loc. cit.* 中定义了复形 $Y^\bullet$ 的内射分解，我们称之为 $Y^\bullet$ 的 Cartan-Eilenberg 内射分解。由定义，这样的分解是一个双复形 $I^{\bullet\bullet}$ ，其元素为内射对象，和一个嵌入：

$$Y^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} I^{\bullet\bullet}$$

它包含了一般意义下的内射分解，边缘和复形 $Y^\bullet$ 的上同调对象。这些分解在双复形的同伦意义下是唯一的。于是我们有双复形 $F(I^{\bullet\bullet})$ ，于是关联的单复形 $\int F(I^{\bullet\bullet})$ 同样在同伦意义下由 $Y^\bullet$ 唯一确定。 $\int F(I^{\bullet\bullet})$ 的上同调对象 $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ 因此在同构意义下由 $Y^\bullet$ 唯一确定。函子 $\mathcal{R}^n F$ 因此被称作 F 的右超导出¹函子。而且，这产生了两个谱序列，它们的始对象为：

$$I_2^{p,q} = H^p(R^q F(Y^\bullet)) \quad (*)$$

$$\Pi_2^{p,q} = R^p F(H^q(Y^\bullet)) \quad (**)$$

¹hyperderives

而它们无穷维上的对象则是 $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ 的过滤。为了简单起见，让我们考虑复形在足够小的次数上为 0 的情况，这时两个谱序列 $(*)$ 和 $(**)$ 均收敛。一个复形的态射 $m : Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ 诱导出态射

$$\mathcal{R}^n F(m) : \mathcal{R}^n F(Y^\bullet) \rightarrow \mathcal{R}^n F(Z^\bullet)$$

和相应的谱序列的态射。更具体地，当 m 是拟同构时，谱序列 $(**)$ 说明态射 $\mathcal{R}^n F(m)$ 是同构。从而 $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ 在拟同构意义下由 $Y^\bullet$ 唯一确定。于是，我们表明同调代数的一般方法提供了比在拟同构意义下的复形更多的内容，而超同调研究的对象则是“拟同构决定的复形的类”。

3. 我们下面的考虑自然是必须的。对每个 Abel 范畴，我们设 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的复形组成的范畴。然后我们把 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的拟同构的逆加入到其中而构造一个新的范畴。即称 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的导出范畴。通过右分解的方法，虽然这并不具体，我们把两个 Abel 范畴间的加性函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 变为函子 $\mathcal{R}F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ （通常更多地，从一个合适的子范畴 $\mathcal{D}^*(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 将设想的次数上的极限复形加入进去），称作 F 的右全导函子¹。对 $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ 中的对象 X ， $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ 中的对象 $\mathcal{R}F(X)$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个复形在拟同构意义下，因此上同调对象 $\mathcal{R}^n F(X)$ 也是良定的。函子 $X \mapsto \mathcal{R}^n F(X)$ 为 F 的右超导函子，这里的

¹total derived functor

定义不需要假设 $\mathcal{A}$ 有足够内射对象。全导函子使得 F 的右超导函子的重新定义成为可能，它含有更多的信息。例如，我们有另一个 Abel 范畴之间的加性函子 $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ，我们可以考虑它们的全导函子的复合：

$$RG \cdot RF: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{C})$$

在一般的情况下，函子 $RG \cdot RF$ 与 GF 的全导函子有典范同构：

$$R(GF) \xrightarrow{\sim} RG \cdot RF$$

如果把复合的公式转换到谱序列的复合的语言则会更加清楚，因为这不仅仅提供了上同调对象 $RGF(X)$ (X 是 $D^*(\mathcal{A})$ 中的对象)，而且它完全描述了拟同构意义下的复形的上同调；比如，复形的结构能够用来与另一个函子的全导函子复合。

4. 一般来讲，在这个形式下，我们可以直接处理拟同构下的复形，复形不被它所确定的唯一上同调而取代。（如果我们最终找到的不变量是复形的上同调就好了，但事实并不如此，这些谱序列的区别仍然是我们感兴趣的“不变量”）它建立了在拟同构下的复形，或是全导函子，或更一般地，在导出范畴之间的函子和它们之间的各种关系（同构关系，对偶形式的定理¹的加性关系等）。这些关系将会

¹duality theorems

提供完全自动的程序（谱序列），复形的上同调对象的信息，这些对象拥有的自然过滤的信息，等等。

即使我们只对这些传统的导出函子即这些上同调对象的值感兴趣，导出范畴的关系仍然是研究这些函子和一些重要关系的一个重要的技术中介。

最后，一个重要的优势是导出范畴建立的关系比上同调对象更显然和简单。谱序列的机制经常被简单地隐藏在这些现象中。在这个意义下，Künneth 的基本例子就很重要。

5. 设 X 和 Y 为紧空间， A 为一个交换幺环（为简单起见）， F 和 G 分别为 X 和 Y 上的 A -模层。当 A 为域的时候，我们知道笛卡尔积 [23] 定义了一个分级线性空间的同构：

$$H^*(X, F) \otimes_A H^*(Y, G) \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y, F \otimes_A G) \quad (\text{Kü})_{\text{coh}}^1$$

当 $A = \mathbb{Z}$ 且层 F 或 G 是无挠¹时，我们有分裂正合序列：

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, F) \otimes_A H^q(Y, G) \rightarrow H^n(X \times Y, F \otimes_A G) \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}^{\mathbb{Z}}(H^p(X, F), H^q(Y, G)) \rightarrow 0 \quad (\text{Kü})_{\text{coh}}^2 \end{aligned}$$

当 $A = \mathbb{Z}$ 并且 F 和 G 没有任何额外的要求时，我们有两个正

¹fr:sans torsion

合序列：

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, F) \otimes_A H^q(Y, G) \rightarrow \mathbb{H}^n \rightarrow$$

$$\rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H^p(X, F), H^q(Y, G)) \rightarrow 0 \quad (\mathrm{K}\ddot{\mathrm{u}})_{\mathrm{coh}}^3$$

$$0 \rightarrow H^{n+1}(X \times Y, \mathcal{T}or^A(F, G)) \rightarrow \mathbb{H}^n \rightarrow H^n(X \times Y, F \otimes_A G) \rightarrow 0$$

第一个公式 $(\mathrm{K}\ddot{\mathrm{u}})_{\mathrm{coh}}^1$ 非常复杂，但仍然可以用来显式计算。当环 A 变得更加复杂时，比如 $A = \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z}$ ， ℓ 为质数， $r > 1$ ，整体上同调维数为无限的环，一般地我们只有两个谱序列收敛到相同结果，它们的初始值为：

$$'K_2^{p,q} = \bigoplus_{r+s=q} \mathrm{Tor}_{-p}^A(H^r(X, F), H^s(Y, G)) \quad (\mathrm{K}\ddot{\mathrm{u}})_{\mathrm{coh}}^4$$

$$''K_2^{p,q} = H^p(X \times Y, \mathcal{T}or_{-q}^A(F, G))$$

然而，这些谱序列和它们之间结果的同构仅仅是一个结论而 A -模范畴的导出范畴的这些关系只有不完美的翻译：

$$\mathrm{RH}(X, F) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathrm{RH}(Y, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RH}(X \times Y, F \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A G) \quad (\mathrm{K}\ddot{\mathrm{u}})_{\mathrm{Der}}$$

这里 $\mathrm{RH}(X; \)$ 指 X 上的全截面的右全导函子（类似有 $\mathrm{RH}(Y; \)$ 和 $\mathrm{RH}(X \times Y, \)$ ）。而 $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A$ 指左张量积函子的全导函子。（我们假设 X 和 Y 是有限上同调维数的空间，如有限胞腔复形） $(\mathrm{K}\ddot{\mathrm{u}})_{\mathrm{Der}}$ 的两个对象都是 A -模复形，它们的上同调模由

$(\text{K}\ddot{\text{u}})_{\text{coh}}^4$ 的两个谱序列得到。当然，式 $(\text{K}\ddot{\text{u}})_{\text{Der}}$ 在 F 和 G 分别是 X 和 Y （有界的¹）上的层复形时也成立。这几乎是完全可控的，也同样允许交换律和多个因子时的结合律。

在导出范畴中，标量的拓展有类似的公式。当 $A \rightarrow B$ 是一个 A 代数，而 F 是一个 X 上的 A -模层，我们有以下关系：

$$\text{RH}(X, F) \otimes_A^{\mathbb{L}} B \xrightarrow{\sim} \text{RH}(X, F \otimes_A^{\mathbb{L}} B)$$

我们可以说，在一般情况下，在像中，一些错误的式子在导出范畴中变为正确的。

带环 $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ 的系数尤其是在概形的平展上同调中显得更加重要。我们知道 [6] 在这个理论中我们必须与扭层打交道。我们使用 ℓ -进上同调，即环 $\hat{\mathbb{Z}}_\ell$ 中的 ℓ -进整数，通过环 $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ 中的上同调的投影极限。而此处式 $(\text{K}\ddot{\text{u}})_{\text{Der}}$ 仍然是成立的（比如当 X 和 Y 是代数闭域上的正规概形， $A = \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ ），通过取极限便立即得到 $\hat{\mathbb{Z}}_\ell$ 上的层的公式。注意到 $\hat{\mathbb{Z}}_\ell$ 是 PID，式 $(\text{K}\ddot{\text{u}})_{\text{Der}}$ 得到 $(\text{K}\ddot{\text{u}})_{\text{coh}}^3$ 形式的上同调，通过与 $\mathbb{Q}_\ell$ 的张量积，便得到 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的层的式 $(\text{K}\ddot{\text{u}})_{\text{coh}}^1$ 。

6. 下面是我们在这本书中的想法的系统的发展。

在第一章中，我们研究了加性范畴的复形范畴，这些范畴是分级的。更准确地说，它们带有平移²函子（即在某

¹suitably bounded, properly terminals. fr: convenablement bornés

²translation

个方向上的次数的转换和对应微分¹上的变化)。复形的多
加性²函子的自然扩张不需要与这些平移相交换，而是在同
构意义下交换，除符号外由同构确定。这说明，在平移函
子的组成中，我们不能连续地选择这些同构，而要引入一
个符号。对这个符号的研究就是第一节（和附录）的主题。
在第二节中，我们定义了多复形的经典概念，单复形，单复
形下的函子和同伦。在第三节中，我们研究一个复形态射
的锥（“映射锥”和“映射柱”）。这为以后提供了非常重要的
构造。

一个 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 由两步组成。第一
步中，我们构造 $\mathcal{A}$ 中的复形在同伦意义下的范畴 $K(\mathcal{A})$ 。将
 $K(\mathcal{A})$ 中的拟同构的逆加入到 $K(\mathcal{A})$ 中便得到了 $D(\mathcal{A})$ 。这些范
畴 $K(\mathcal{A})$ 和 $D(\mathcal{A})$ 不一定是 Abel 的，但它们有额外的结构：即
三角形的结构：特异三角形 (distinguished triangles)。在这些
范畴里面，特异三角形扮演了 Abel 范畴中的正合序列的
角色。含有这些附加结构的加性范畴已由 Puppe 在 [2] 研
究了，称作剖分范畴 (triangulated category)，这正是我们
第二章中的主要研究内容。第一节中介绍了剖分范畴的基
础结果。第二节中，我们指出将 $K(\mathcal{A})$ 中的拟同构的逆正是

¹différentielle

²multi-addictive

$\mathbf{k}(\mathcal{A})$ 作为剖分范畴的分式范畴[16]。在第三节中，我们证明 Freyd 的一个定理 [17]：一个剖分范畴 $\mathcal{D}$ 可以一般地分裂为一个 Abel 范畴 $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ 。而范畴 $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ 有一个子集 E ，使得 E 中的元都是内射对象和投射对象，使得 $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ 中的元是 E 中元的子对象也是 E 中元的商对象。由 E 定义的全子范畴与 $\mathcal{D}$ 同构。最后，在第四节，我们考虑剖分范畴或 Abel 范畴中的“谱对象”。这里我们采用 [1] 中的定义。

第三章立志于更细致地研究导出范畴。设 X 和 Y 为 Abel 范畴的导出范畴 $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ 中的两个对象，当 $\mathcal{A}$ 有足够投射对象，而 Y 在次数足够小时为 0， X 到 Y 的 n 次态射就像 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ ， X 和 Y 的第 n 次超扩张¹（在 [1] 的意义下）。当 X 和 Y 都是有界（只在有限个维数上不为 0）的时候， X 到 Y 的第 n 次同态就像可以被定义为 Yoneda[3] 的构造的推广。 $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ 中态射的构造恰恰就是 Yoneda 的构造。在第四节中，我们研究通常意义的谱对象。 $\mathcal{A}$ 中的每一个对象都给出一个在 $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ 中的谱对象，这让我们可以自动地写出最主要地谱序列。对于任何复形 $\cdots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n+1} \rightarrow \cdots$ 和复形的态射（这里平移态射不需要是单的）都给出了一个谱对象。

7. 粗略地讲，建立一般形式主义的基础仍然有困难。这些工作的一些困难有：要通过逻辑推理得到结论并无困

¹hyper-ext

难，但是经常需要很多时间（也很无聊）的检查。因此，这样的工作只有限制在形式主义下，运用其灵活性和普遍性，才能得到“真正的”定理的制定和规范。考虑叙述和证明上同调对偶定理是这个形式主义的第一动机。已经知道的存在了很多不同上同调定理的内容，它们的形式都非常相似：

- 1) Théorie de la dualité la cohomologie des faisceaux cohérents sur les schémas [4].
- 2) Théorie de la dualité la cohomologie des faisceaux pour la topologie étale des schémas [5], [6].

这些定理属于 A. Grothendieck.

- 3) Théorie de la dualité dans la cohomologie des modules galoisiens due à J. Tate et J.-L. Verdier [7].
- 4) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux sur un espace localement compact [9], [10].
- 5) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux analytiques cohérents. 该定理本质上还只是猜测。
- 6) Théorie de la dualité pour les corps locaux, corps de nombres ou corps de fonctions et ses relations avec la théorie du

corps de classes. 这个定理还需要发展。第一步是由于 M. Artin [8].

所有的这些定理都有一个共同的出发点：导出范畴之间特定函子的关联性质。局部紧空间的某个特殊情形提供了我们的叙述的模型。设 X 和 Y 为两个局部紧空间（有有限上同调维数）， A 为一个诺特环， X_A, Y_A 分别为 X 和 Y 上的 A -模层范畴， $D(X_A)$ 和 $D(Y_A)$ 为对应的导出范畴。 $f: X \rightarrow Y$ 为连续映射。在这个情况下可以定义：

a) 一个函子 $f_! : X_A \rightarrow Y_A$ ，其正向像¹为真支集。其对应的全导函子：

$$Rf_! : D(X_A) \rightarrow D(Y_A)$$

(这里 $f: X \rightarrow Y$ 是一个合适的映射，函子 $f_!$ 是通常的正向像)

b) 一个函子 $f^! : D^+(Y_A) \rightarrow D^+(X_A)$ （符号 $+$ 意味着我们限制在下有界的复形上），其准确的定义在技术上已足够了，但作为一个特征，由性质 c) 有一个唯一的同构。

c) 一个双因子的同构：

$$\Delta_f(F, G) : R\text{Hom}(Rf_! F, G) \rightarrow R\text{Hom}(F, f^! G)$$

¹direct image

对任意 $D(X_A)$ 中的对象 F 和 $D^+(Y_A)$ 中的对象 G ($R\text{Hom}$ 是“复形同态”的全导函子)。

最重要的事实如下：

$D1)$ 当 f 变动时，函子 $f^!$ 的定义是传递的。

$D2)$ 同构 Δ_f 与映射的复合是相容的。

$D3)$ 当 X 在 Y 相关的 n 维上光滑时，即在 X 的局部上， X 是 Y -同构于 Y 的一个开集与拓扑空间 $\mathbb{R}^n$ 的积（如 Y 是一个点，而 X 是拓扑流形），对于 $D^+(Y_A)$ 中的任意一个对象 G ，有典范同构：

$$f^!(G) \simeq f^*(G) \otimes \omega_{X/Y}[n]$$

这里 $f^*(G)$ 是通常意义下的逆像， $\omega_{X/Y}$ 是秩为 1 的局部纤维层： X 到 Y 的相对定向层，而 $\omega_{X/Y}[n]$ 为被复形 $\omega_{X/Y}$ 通过位移 n 次得到的复形。

$D4)$ 当 X 是 Y 中的闭集， f 是嵌入时，函子 $f^!$ 是支集在 X 上的截面的函子的全导函子。

这个定理和它在上述其它书中的变化包含了传统的对偶形式：拓扑意义下的庞加莱对偶定理，在射影和光滑代数

簇上的凝聚¹代数层的 Serre 对偶定理。但是导出范畴的语言不仅能得到这些定理，而且能给出更一般定理，虽然我们只关心它的简单独立的情况。例如，我们还不知道如何用一般的对偶定理建立代数闭域上的非投影的光滑 proper 代数簇上的凝聚代数层的传统的对偶定理（Serre 对偶形式）。同样的情况还发生在非奇异²射影代数簇上的平展上同调的对偶定理。

8. 情形 1),2),4) 的对偶定理导出非传统意义下的 Lefschetz 不动点定理，涉及可以包含奇点³的层 [10],[11],[12]。设 X 是一个有有限上同调维数的紧拓扑空间， A 为诺特环， F 是 X 上的 A -模层，含有以下性质：

1) F 在 X 的每一个点上的纤维是有限 A -模和有限投影维数。

2) X 上点的邻域有一个正规性，与 Wilder 在 [9] 中定义的性质相似。

设 $\Phi = (\Phi_X, \Phi_F) : (X, F) \rightarrow (X, F)$ 是拓扑空间 X 上的层 F 上的

¹coherent

²fr:non singulières

³fr:singularités

自同态。自同态 Φ 导出一个 A -模复形上的自同态：

$$\mathrm{RH}(\Phi) : \mathrm{RH}(X, F) \rightarrow \mathrm{RH}(X, F)$$

在 $a)$ 和 $b)$ 的假设下，复形 $\mathrm{RH}(X, F)$ 是 A -模上的完美的复形，即它同构与导出范畴中一个有限复形，其组成为有限投射 A -模。因此可以定义 Lefschetz 数 $\chi(\mathrm{RH}(\Phi))$ 为复形 $\mathrm{RH}(\Phi)$ 的组成作为有限投影模的自同态的秩的交错和。我们现在假设，固定某个理想，使得 Φ 中关联的点被固定。我们有以下等式：

$$\chi(\mathrm{RH}(\Phi)) = \sum_{P \text{ fixed}} \chi_P(\Phi) \quad (\text{Lef})$$

这里 $\chi_P(\Phi)$ 是局部不变的，这能由 F 和自同态 Φ 在 P 临近的值所知道。当 X 是一个拓扑流形，而 F 在每个纤维上是秩为 1 的时候，我们就得到了一般意义下的 Lefschetz 公式。

在光滑层的上同调中，我们有一个类似的公式。我们必须假设 X 是一个合适的域 k 上的有限概形，而 F 是一个光滑层，有有限扭维数，或者更一般地，一个完美的复形。接下来引入的局部不变的研究只限制于某个特殊的情况。当域 k 是代数闭的，而 k 上的光滑 X -概形上的层 F 在点 P 固定时的局部纤维正规地相交¹，我们有：

$$\chi_P(\Phi) = \frac{\mathrm{Tr}(\Phi_{F,P})}{\det(1 - d\Phi_{X,P})}$$

¹normal crossing, fr: croisement normal

这里 $\Phi_{F,P}$ 是由 Φ 作用在层 F 在点 P 的纤维上的限制所决定的自同态（为一个有限维 k 线性空间）。而 $d\Phi_{X,P}$ 为 Φ_X 在点 P 处的微分。

当我们不再假设固定的点 P 是正规相交时，即我们不再假设同态 $1 - d\Phi_{X,P}$ 是可逆的，则局部不变量仍然能由 [4] 中的计算留数¹的方法计算出来。

代数几何的教材中的 Lefschetz 定理仍然能被推广到一些相关的情况中去。我们设有一个合适光滑的 Y -概形 $X \xrightarrow{f} Y$ ，其中 Y 局部诺特，和 X 上有限挠维数的连续层 F 。 Y 上层的复形 $Rf_*(F)$ 是一个完美复形。设 $\Phi : (X, F) \rightarrow (X, F)$ 为概形 X 以及层 F 的一个 Y -自同态，而假设概形在 P 为 Φ 的一个不动点时在 Y 上有限。则自同态 Φ 得到自同态：

$$Rf_*(\Phi) : Rf_*(F) \rightarrow Rf_*(F)$$

又因为复形 $Rf_*(F)$ 是完美的，我们能定义 Lefschetz 数 $\chi(Rf_*(\Phi))$ 为 Y 上有结构的层的一个截面，也就是说，有等式：

$$\chi(Rf_*(\Phi)) = \chi_P(\Phi)$$

这里 $\chi_P(\Phi)$ 是局部不变量，从而也能被留数的计算所确定。

在 étale 拓扑的框架下，我们有类似的 Lefschetz 公式。这个公式应用到有限域上的光滑代数曲线 Frobenius 自同

¹fr:résidus

态和一个 étale 拓扑的可构造的层上，可以证明函数 L 的推广的合理性 [11]。我们说，在这个证明中，我们用到了 Lefschetz 公式，这里带系数的层拥有足够多的奇点。

9. 在 Lefschetz 公式的拓扑的情形下，我们有复形 $\mathrm{RH}(X, F)$ 是完美的，这允许我们定义以下的 Lefschetz 数：

$$\mathrm{RH}(\Phi) : \mathrm{RH}(X, F) \rightarrow \mathrm{RH}(X, F)$$

一个复形不能被它的上同调对象的全体所确定，这是非常惊人的。我们不能定义以下自同态的迹

$$\mathrm{H}^i(\Phi) : \mathrm{H}^i(X, F) \rightarrow \mathrm{H}^i(X, F)$$

除非加上非常严格的限制。比如，环 A 的全部上同调的维数都是有限的，即 A 是正规的，我们能够通过有限投射分解来定义 $\mathrm{H}^i(\Phi)$ 的迹。于是我们有

$$\chi(\mathrm{RH}(\Phi)) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\mathrm{H}^i(\Phi))$$

但正如我们所看到的，尤其在 étale 拓扑的层的理论中，我们要用到的环 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$ ($l > 2$) 不是正规的。

完美复形的观念在代数几何中也非常有用：K-理论和 Riemann-Roch 定理 [14]。

10. 最终，看起来导出范畴的语言是用来计算和证明上面提到的重要结果所必不可少的工具。

在这里，我们只限制在加性的同调代数中：Abel 范畴和加性函子。但在 [14] 中讨论的 Riemann-Roch 定理中，这个架构是不必要的。我们也没有研究不同的群组成的类，或者是 Grothendieck 群，这能仅由剖分范畴所形成。最后，我们留下相关的同调的问题，它们也能在剖分范畴的框架下考虑 [15]。

第一章 加性范畴的复形范畴

1. 分级范畴

1.1. G 形式的分级范畴

1.1.1. 设 G 为任意一个群，我们把它关联到一个范畴，记为 $\mathcal{G}$ 。定义如下：

- $\text{Ob}(\mathcal{G})$ 为一个元素构成的集合。
- $\text{FI}(\mathcal{G})$ 是 G 中的元构成的集合。
- $\text{FI}(\mathcal{G})$ 的像和原像在 $\text{Ob}(\mathcal{G})$ 中是唯一的。恒同映射将 $\text{Ob}(\mathcal{G})$ 中的唯一一个元映射到 G 中的单位元。

- $\text{Fl}(G)$ 中箭头的复合 $\xrightarrow{g} \xrightarrow{h}$ 的结果是 G 中元素 h 和 g 的积。

则 G 形式的分级范畴是 $\mathcal{G}$ 上的纤维范畴¹[18]。一个 G 形式的分级范畴 $(\mathcal{C}, G)$ 是一个范畴 $\mathcal{C}$ 和一个函子 $\text{deg} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ 使得 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{G}$ 上的纤维范畴。函子 $\text{deg} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ 被称作次数函子。 $\mathcal{C}$ 中态射在 deg 下的像被称作这个态射的次数。设 e 是 G 中的单位元。我们记 $\mathcal{C}_e$ 为 $(\mathcal{C}, G)$ 上的纤维 (范畴), 即 $\mathcal{C}_e$ 为 $\mathcal{C}$ 的子范畴, 其对象为 $\mathcal{C}$ 的对象, 其态射为 $\mathcal{C}$ 中次数为 e 的态射。

设 $(\mathcal{C}, G)$ 和 $(\mathcal{C}', G)$ 都是 G 形式的分级范畴, $(\mathcal{C}, G)$ 到 $(\mathcal{C}', G)$ 的分级函子 F 是一个 G 上的笛卡尔函子²。定义函子 $F_e : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}'_e$ 为 F 在纤维范畴上的限制。最后, 我们定义分级函子之间的态射 $m : F \rightarrow F'$ 为与分级相容的函子态射, 简称为 $\mathcal{G}$ -函子态射。

1.1.2. 设 $\mathcal{C}$ 是 G 形式的分级范畴, g 是 G 的一个元素, X 和 Y 是 $\mathcal{C}$ 中的两个元素。定义 $\text{Hom}^g(X, Y)$ 为 X 到 Y 的次数为 g 的态射。于是我们有:

$$\text{Hom}(X, Y) = \bigsqcup_{g \in G} \text{Hom}^g(X, Y). \quad (1.1.2.1)$$

¹fibred category

²cartesian functor

则集合 $\text{Hom}(X, Y)$ 有了一个 G 分级的结构。因为次数是可乘的，对于态射 $m: X \rightarrow Y$ 和 $n: Y \rightarrow Z$ ，有

$$\deg(n) \deg(m) = \deg(nm). \quad (1.1.2.2)$$

上述公式反映出 c 是 G 上的范畴的事实。但我们要找一个充分条件。事实上，只需说明每一个 c 中的对象都是一个给定次数的超笛卡尔态射¹的像。而我们立即发现 c 中的超笛卡尔态射是 c 中的同构。因此 c 是纤维当且仅当以下条件成立：

对 G 中的任何一个元素 g 和 c 中的任何一个对象 x ，存在一个次数为 g 的同构，其像为 x 。

$$(1.1.2.3)$$

设 (c, G) 和 (c', G) 都是 G 形式的分级范畴， $F: c \rightarrow c'$ 是分级函子。则 F 是 G -函子且保持次数的态射。它同样把 c 中的笛卡尔态射映为 c' 中的笛卡尔态射，因为 c 中的笛卡尔态射都是同构的。从而 c 到 c' 的分级函子即 c 到 c' 的保存次数的函子。

最后，一个和分级相容的分级函子 $m: F \rightarrow F'$ 中的态射就是次数为 e 的函子的态射，即以下关于 c 中对象 x 的态

¹hypercartisian morphism

射

$$m(X) : F(X) \rightarrow F'(X)$$

次数为 e 且满足通常的相容的性质。

定义 1.1.3. G 上的分级范畴被成为加性的，如果每个纤维 c_e 是加性的 [20]。两个加性的分级范畴上的函子被成为加性的，如果它们限制在每个纤维上是加性的。

设 c 为 G 上的加性分级范畴，当 $G \neq \{e\}$ 时， c 去掉纤维的结构则不是加性的。然而，我们仍然可以通过以下步骤将 c 关联到一个加性范畴：对 c 中的两个对象 X 和 Y 和 G 中的元素 g ，有 $\text{Hom}^g(X, Y)$ 自然拥有一个 Abel 群结构。则我们可以构造这样的范畴 c_{add} ，其对象为 c 的对象，其 X 和 Y 之间的态射为：

$$\text{Hom}_{c_{\text{add}}}(X, Y) = \bigoplus_{g \in G} \text{Hom}_c^g(X, Y). \quad (1.1.3.1)$$

c_{add} 中的态射的复合被定义为显然的形式，则 c_{add} 是一个加性范畴。对于两个加性分级范畴之间的加性笛卡尔函子 $F : c \rightarrow c'$ ，我们同样可以构造对应的加性函子 $F_{\text{add}} : c_{\text{add}} \rightarrow c'_{\text{add}}$ 。但我们不会去使用这个构造。

注意我们这里用的分级范畴的定义比自然的构造更有限制性¹。除了性质 (1.1.2.1) 和 (1.1.2.2)，我们还需要性质

¹restrictive

(1.1.2.3)。

1.2. 群上范畴在同构意义下的运算

1.2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是 G 上的分级范畴，让我们选择一个纤维范畴 $\mathcal{C}_e \xrightarrow{\deg} \mathcal{C}$ 的标准劈丛¹，即对任意 $g \in G$ ，选择一个基变换的函子：

$$\begin{cases} T(g) : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}_e \\ T(e) = \mathcal{C}_e \text{ 上的恒同变换} \end{cases} \quad (1.2.1.1)$$

对 G 中的任意两个元素 (g, h) ，我们有函子同构：

$$\begin{cases} c(h, g) : T(hg) \rightarrow T(g)T(h) \\ c(g, e) = c(e, g) = T(g) \text{ 的恒同变换} \end{cases} \quad (1.2.1.2)$$

同时对 G 中的三个元 (g, h, k) ，有以下关系：

$$(T(g) \star c(k, h))c(kh, g) = (c(h, g) \star T(k))c(k, hg). \quad (1.2.1.3)$$

定义 1.2.2. 设 G 是一个群。我们称 G° -范畴 (G° 是群 G 的反群) 为一个范畴 $\mathcal{C}_e$ 和一族函子 $T(g) (g \in G)$ 和函子同构 $c(h, g) (h, g \in G)$ 满足性质 (1.2.1.1), (1.2.1.2) 和 (1.2.1.3)。

所以一个 G° -范畴是一个范畴 $\mathcal{C}_e$ 和一些同构意义下由 G 决定的运算。我们用记号 $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ 来表示一个 G° -范畴。

¹cleavage

这里 $c(h, g)$ 就是转移同构。特别地, 如果转移同构都是同构, 即对任意 $g, h \in G$ 有 $T(hg) = T(g)T(h)$, 我们称 G° -范畴是严格 (strict) 的。

1.2.3. 我们现在假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是两个群 G 上的分级范畴。 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 为分级函子。选择它们的一个标准劈丛。这些标准劈丛的选择定义了以下的函子同构:

$$m(g): F_e T(g) \rightarrow T'(g) F_e, g \in G, \quad m(e) \text{ 是 } F_e \text{ 上的恒同} \quad (1.2.3.1)$$

使得对于任意 $g, h \in G$, 下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} F_e T(hg) & \xrightarrow{m(hg)} & T'(hg) F_e \\ \downarrow F_e \star c(h, g) & & \downarrow c'(h, g) \star F_e \\ F_e T(g) T(h) & & \\ \downarrow m(g) \star T(h) & & \\ T'(g) F_e T(h) & \xrightarrow{T'(g) \star m(h)} & T'(g) T'(h) F_e \end{array} \quad (1.2.3.2)$$

定义 1.2.4. 设 $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ 和 $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ 为两个 G° -范畴。定义 G° -函子为这样的函子:

$$F_e: \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}'_e$$

和一个同构:

$$m(g): F_e T(g) \rightarrow T'(g) F_e, \quad g \in G$$

使得图表 (1.2.3.2) 交换。

则一个 G° -函子是保持 G° -操作同构的函子，我们用记号 (F_e, m) 来表示。当对任意 $g \in G$ 有同构 $m(g)$ 是恒同时，即对任意 $g \in G$ 有 $F_e T(g) = T'(g) F_e$ 时，我们称 G° -函子是严格 (strict) 的。

1.2.5. 设 c, c', c'' 为三个分级范畴和 $c \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F'} c'', F'' = F' F$ 为三个分级函子。选择 c, c', c'' 的标准劈丛。由前面所述，我们可以得到三个 G° -范畴 $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c), (\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c'), (\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$ 和三个 G° -函子 $(F_e, m), (F'_e, m'), (F''_e, m'')$ ，而我们立即得到以下关系：

$$\begin{cases} F''_e = F'_e F_e \\ m''(g) = (m'(g) \star F_e)(F'_e \star m(g)) \end{cases} \quad (1.2.5.1)$$

定义 1.2.6. 设 $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c), (\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c'), (\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$ 为三个 G° -范畴和 G° -函子

$$(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c) \xrightarrow{(F_e, m)} (\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c') \xrightarrow{(F'_e, m')} (\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$$

则由 (1.2.5.1) 定义的 G° -函子称为 G° -函子 (F_e, m) 和 (F'_e, m') 的复合。

1.2.7. 设 F 和 F' 为 G 上的分级范畴 c 和 c' 之间的两个分级函子，而 $m : F \rightarrow F'$ 为次数为 e 的分级函子态射。取 c 和 c' 的标准劈丛。我们便得到了两个 G° -范畴 $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ 和 $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ 和两个 G° -函子 (F_e, m) 和 (F'_e, m') 。则由 u 决定的函

$$u_e : F_e \rightarrow F'_e \quad (1.2.7.1)$$

使得以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F_e T(g) & \xrightarrow{u_e \star T(g)} & F'_e T(g) \\ m(g) \downarrow & & \downarrow m'(g) \\ T'(g) F_e & \xrightarrow{T'(g) \star u_e} & T'(g) F'_e \end{array} \quad (1.2.7.2)$$

定义 1.2.8. 设有两个 G° -范畴 $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ 和 $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ 和两个 G° -函子 (F_e, m) 和 $(F'_e, m') : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}'_e$ 。我们说函子态射 $u_e : F_e \rightarrow F'_e$ 于 G° 的运算相容如果对任意 $g \in G$ 有图表 (1.2.7.2) 交换。

最终，我们说一个 G° -范畴是加性的，如果它基础¹的范畴是加性的。根据定义 (1.1.3)，一个加性的分级范畴所关联的 G° -范畴是加性的。

1.3. 两种语言的等价性

1.3.1. 我们限定在一个范围 $\mathcal{U}$ 中。我们设 $\text{Grad}(G)$ 是 $\mathcal{U}$ -范畴，其元素属于 $\mathcal{U}$ 的 G 形式的分级范畴，其态射为分级函子。我们设 $G^\circ\text{-Cat}$ 为 $\mathcal{U}$ -范畴，其元素为 G° -范畴，其态射为 G° -函子。我们立刻从 (1.2.1), (1.2.3) 和 (1.2.5) 中知道，对于每一

¹underlying, fr:sous-jacente

个 G° -范畴选择一个标准劈丛，则有以下函子：

$$\Psi : \text{Grad}(G) \rightarrow G^\circ\text{-Cat} \quad (1.3.1.1)$$

则 [18] 的结果被解释为以下命题：

命题 1.3.2. 函子 Ψ 是一个范畴等价。

我们可以在 [18] 中找到函子 Ψ 的拟逆¹。这里，我们简要描述一下如何把一个 G° -范畴 $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ 关联到一个分级范畴 $\mathcal{C}_{[G]}$ 。首先取 $\mathcal{C}_{[G]}$ 的对象为 $\mathcal{C}$ 的对象，对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 和 Y ，有

$$\text{Hom}^g(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T(g)Y), g \in G \quad (1.3.2.1)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{[G]}}(X, Y) = \bigsqcup_{g \in G} \text{Hom}^g(X, Y). \quad (1.3.2.2)$$

接下来我们构造两个态射的复合。设 X, Y, Z 为 $\mathcal{C}$ 的三个元素， $u \in \text{Hom}^g(X, Y), u' \in \text{Hom}^{g'}(Y, Z), g, g' \in G$ 。则函子 $T(g)$ 定义了以下映射：

$$\text{Hom}^{g'}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g)T(g')Z) \quad (1.3.2.3)$$

而同构 $c(g, g')^{-1}$ 定义了以下映射：

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g)T(g')Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g'g)Z) \quad (1.3.2.4)$$

¹quasi-inverse

则 v 的像得到了一个 $v' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g'g)Z)$ 。从而 $\mathcal{C}$ 中 u 和 v' 的复合得到一个元素

$$w = v' \circ_{\mathcal{C}} u, w \in \text{Hom}^{g'g}(X, Z) \quad (1.3.2.5)$$

这由定义便得到 $\mathcal{C}[G]$ 中 u 和 v 的复合。则纤维函子 $\mathcal{C}[G] \rightarrow G$ 为显然的函子，而纤维范畴 $\mathcal{C}[G] \rightarrow G$ 自然有一个标准劈丛。

1.3.3. 事实上，我们有一个更精确的结果。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 为两个有标准劈丛的 G 形式的分级范畴，设函子 Ψ 定义了以下双射：

$$\Psi(\mathcal{C}, \mathcal{C}') : \text{Hom}_{\text{Grad}(G)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \text{Hom}_{G^{\circ}-\text{Cat}}(\Psi(\mathcal{C}), \Psi(\mathcal{C}')) \quad (1.3.3.1)$$

但是，这些集合是以下范畴的对象的集合：

$$\mathcal{H}\text{om}_{\text{Grad}(G)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'), \quad \mathcal{H}\text{om}_{G^{\circ}-\text{Cat}}(\Psi(\mathcal{C}), \Psi(\mathcal{C}')) \quad (1.3.3.2)$$

其态射分别为次数为 e 的函子态射和保持运算的函子态射。此外，从 (1.2.7) 立刻可以得到映射 $\Psi(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ 可以拓展为一个函子：

$$(\mathcal{C}, \mathcal{C}') : \mathcal{H}\text{om}_{\text{Grad}(G)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{G^{\circ}-\text{Cat}}(\Psi(\mathcal{C}), \Psi(\mathcal{C}')) \quad (1.3.3.3)$$

而容易验证：

命题 1.3.4. 函子 Ψ 是一个范畴同构。

1.3.5. 最后, 要完成这个证明, 我们需要注意函子 Ψ (拓展到函子态射) 是函子和函子态射的卷积。这个验证留给读者。

1.3.6. 在大多数情况下, 我们将会使用严格的 G° -范畴 (1.2.2)。设 $(\mathcal{C}, G^\circ, T)$ 和 $(\mathcal{C}', G^\circ, T')$ 为两个严格的 G° -范畴。于是一个 G° -函子 (F, m) 是一个函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 和一个同构:

$$m(g): FT(g) \rightarrow T'(g)F, g \in G, \quad m(e) \text{ 为恒同} \quad (1.3.6.1)$$

使得以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} FT(hg) & \xrightarrow{m(hg)} & T'(hg)F \\ \parallel & & \parallel \\ FT(g)T(h) & & T'(g)T'(h)F \\ m(g) \star T(h) \downarrow & \nearrow T'(g) \star m(h) & \\ T'(g)FT(h) & & \end{array} \quad (1.3.6.2)$$

应当指出的是, 即使在 G° 的运算严格地作用在范畴上的情况下, 函子也不一定与 G° 运算的严格性交换。因此, 当 G° 平凡地作用在范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 上 (即 $T(g) = T'(g) = \text{恒同}$) 时, 一个 G° -函子不仅仅是一个函子和一个 G 在自同构群中的表示。此外, 容易发现一个 G° -函子不一定与一个严格 G° -函子同构。一个可数的例子可以从 [19] 中的灵感建立起来。用 [loc. cit.] 的结果, 可以证明一个 G° -范畴与一个严格的

G° -范畴是 G° -等价的。也可以用同样的方式得到下面这个结果。对任意两个 G° -范畴 $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ 和 $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ ，存在两个严格的 G° -范畴 $(\tilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \tilde{T})$ 和 $(\tilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \tilde{T}')$ 和以下范畴等价：

$$(u, \mu) : (\tilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \tilde{T}) \rightarrow (\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$$

$$(v, \nu) : (\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c') \rightarrow (\tilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \tilde{T}')$$

使得对任意函子

$$(F, m) : (\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$$

函子的复合

$$(v, \nu)(F, m)(u, \mu) : (\tilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \tilde{T}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \tilde{T}')$$

同构与一个与 G° 运算的严格性交换的函子。我们不会用到这个结论。

1.3.7. 在这个问题上，我们注意到分级范畴和 G° -范畴这两个语言的等价性。因此我们只用 G° -范畴的语言。然而我们不会完全忘记“分级范畴”的观点，使用以下的术语：

定义 1.3.8. 设 G 是一个群， $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ 是一个 G° -范畴。设 g 和 h 是 G 中的两个元素，而 X 和 Y 是 $\mathcal{C}$ 中的两个对象， c 中的态射

$$u : T(h)X \rightarrow T(gh)Y$$

被称作 x 到 y 的次数为 g 的态射。

我们先证明这是良定义的。事实上，对 G 中的任意两个元素 h, h' ，函子 $T(h^{-1}h')$ 和同构 $c(h, h^{-1}h')$ 和 $c(gh, h^{-1}h')$ 定义了一个双函子的同构

$$i_g(h, h') : \text{Hom}_C(T(h)X, T(gh)Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_C(T(h')X, T(gh')Y) \quad (1.3.8.1)$$

而上闭链¹的恒同 (1.2.1.3) 得到以下关系：

$$i_g(h, h'') = i_g(h', h'')i_g(h, h') \quad (1.3.8.2)$$

对任意 $h, h', h'' \in G$. 这样，我们知道以下不同的集合

$$\text{Hom}_C(T(h)X, T(gh)Y)$$

通过 $i_g(h, h')$ 是同构的。而式 (1.3.8.2) 指出这些同构是相容的。另外，对任意 $g, g', h, h' \in G$ 和 $X, Y, Z \in C$ ，以下图表(1.3.8.3)交换：

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(T(h)X, T(gh)Y) \times \text{Hom}_C(T(gh)Y, T(g'gh)Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(T(h)X, T(g'gh)Z) \\ i_g(h, h') \times i_{g'}(gh, gh') \downarrow \simeq & & i_{g'g}(h, h') \downarrow \simeq \\ \text{Hom}_C(T(h')X, T(gh')Y) \times \text{Hom}_C(T(h')X, T(g'gh')Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(T(h')X, T(g'gh')Z) \end{array}$$

(其中横向的箭头就是 c 中态射的复合) 图表 (1.3.8.3) 允许我们明确地定义，或更明确地，在 $i_g(h, h')$ 所定义的同构意

¹cocycle

义下，定义两个次数分别为 g 和 g' 的态射的复合，而这个复合的定义与从范畴 $\mathcal{C}[G]$ 到 G° -范畴 $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ 的映射中的复合 (1.3.2.5) 相容。

1.3.9. 设 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 是一个 G -范畴。则 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 的反范畴是一个 G° -范畴 $(\mathcal{C}^\circ, G^\circ, T^\circ, c^\circ)$ (G° 是 G 的反群)，定义如下： c° 为 $\mathcal{C}$ 的反范畴，对 $g \in G^\circ$, $T^\circ(g)$ 定义如下：

$$T^\circ(g)X = T(g^{-1})X, \quad X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^\circ) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad (1.3.9.1)$$

$$T^\circ(g)u = T(g^{-1})u, \quad u \in \text{Ar}(\mathcal{C}^\circ) = \text{Ar}(\mathcal{C})$$

而 $\mathcal{C}^\circ$ 中的同构 $c^\circ(g, h)$ 定义如下：

$$c^\circ(g, h) : T^\circ(h \perp g) \rightarrow T^\circ(h)T^\circ(g) \quad (1.3.9.2)$$

$$c^\circ(g, h) = c^{-1}(g^{-1}, h^{-1})$$

这里 $\perp$ 是 G° 中的复合。

注 1.3.10. 设 $\mathcal{C}[G^\circ] \rightarrow \mathcal{G}^\circ$ 是 G° 分级范畴，它关联到一个范畴 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 。这个范畴有一个典范劈丛。现在设 $\mathcal{C}[G^\circ]^\circ \rightarrow \mathcal{G}$ 为通过反范畴得到的余纤维范畴，这个范畴有一个典范的余劈丛，同时，由于 G 是一个群，这个范畴同样有一个 G 上的纤维结构。于是我们得到一个典范劈丛 $\mathcal{C}[G] \rightarrow \mathcal{G}$ ，因此立刻得到一个 G° -范畴典范同构与范畴 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 的反范畴。

1.3.11. 设 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 是一个 G -范畴， $(\mathcal{C}', G', T', c')$ 是一个 G' -范

畴。则范畴 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ 自然地拥有一个 $G \times G'$ -范畴的结构。这个 $G \times G'$ -范畴被称为 G -范畴 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 和 G' -范畴 $(\mathcal{C}', G', T', c')$ 的积。

1.3.12. 设 $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ 是一个 G° -范畴。在实际中，我们一般把 G° 的运算写在右边。对于任意的 $\mathcal{C}$ 中的元 X ，有：

$$T(g) = X[g] \quad (1.3.12.1)$$

对于 $\mathcal{C}$ 中的态射 u 有：

$$T(g)u = u[g] \quad (1.3.12.2)$$

而对于任意一个对象 X ，同构 $c(g, h)$ 定义了同构：

$$c(g, h)X : X[gh] \rightarrow X[g][h] \quad (1.3.12.3)$$

这个记号有一个特殊的优势就是把 G° 在 $\mathcal{C}$ 上的作用写成 G 在 $\mathcal{C}$ 的右乘的作用。

1.4. 群的变换

1.4.1. 设 $f : H \rightarrow G$ 是群同态。我们把任意一个 G -范畴 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 关联到一个 H -范畴 $(\mathcal{C}, H, T_f, c_f)$ 利用 H 通过 f 作用在 $\mathcal{C}$ 上，即：

$$T_f(h) = T(f(h)), \quad h \in H \quad (1.4.1.1)$$

$$c_f(h, h') = c(f(h), f(h')), \quad h, h' \in H$$

而对于一个 G -函子

$$(F, m) : (\mathcal{C}, G, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', G, T', c')$$

我们关联到一个 H -范畴的 H -函子：

$$m_f(h) = m(f(h)) \quad (1.4.1.2)$$

最后，一个 G -函子的态射与 G 运算相容，则一定与 H 运算相容。

以上的方式定义了一个函子，被称作群变换的函子：

$$f^* : G\text{-Cat} \rightarrow H\text{-Cat} \quad (1.4.1.3)$$

更确切地说，设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是两个 G -范畴，则函子 f^* 定义一个映射：

$$f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}') : \text{Hom}_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \text{Hom}_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}')) \quad (1.4.1.4)$$

但是， $\text{Hom}_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ 和 $\text{Hom}_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}'))$ 是范畴 $\text{Hom}_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ 和 $\text{Hom}_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}'))$ 中的对象，而它们的态射都是和群作用相容的函子态射。因此映射 $f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ 自然拓展成一个函子：

$$\underline{f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}')} : \text{Hom}_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \text{Hom}_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}')) \quad (1.4.1.5)$$

这是一个忠实的函子。

1.4.2. 设 $e \rightarrow K \xrightarrow{n} H \xrightarrow{f} G \rightarrow e$ 是一个正合序列。 K 通过 n 为 H 的一个子群，设 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 和 $(\mathcal{C}', G, T', c')$ 为两个 G -范畴，而 $(\mathcal{C}, H, T_f, c_f)$ 和 $(\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$ 是通过群变换 $H \xrightarrow{f} G$ 得到的 H -范畴。最后，设

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f) \quad (1.4.2.1)$$

是一个 H -函子。由图表 (1.2.3.2) 得到对任意 $k, k' \in K$ 都有以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{m(kk')} & F' \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ m(k) & F & m(k') \end{array} \quad (1.4.2.2)$$

因此 K° 有一个在 F 的自同构中的表示。如果函子 (F, m) 是从 G -函子得到的，则这个表示是平凡的。反之，若这个表示是平凡的，我们立即可以得到，由图表 (1.2.3.2)，对任意 $h \in H$ 和任意 $k \in K$ 有：

$$m(hk) = m(kh) = m(h) \quad (1.4.2.3)$$

因此， H -函子 (F, m) 是由一个 G -函子通过群变换 f^* 得到的。在本文的余下部分，我们要研究在一个特殊情形下，什么 H -函子 (F, m) 导出预先给出的 K 在 F 的自同态中的表示。

1.4.3. 我们用 (1.4.2) 的记号。我们假设范畴 $\mathcal{C}'$ 是加性的而 $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。符号群 $\{-1, +1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用在范畴 $\mathcal{C}'$ 上的恒同函

子上为对任意 $X \in \mathcal{C}'$ 关联到一个态射:

$$\varepsilon(X) : X \xrightarrow{\varepsilon \cdot \text{id}_X} X, \quad \varepsilon \in \{-1, +1\} \quad (1.4.3.1)$$

因此, 符号群作用在任意一个函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 为对任意 $Y \in \mathcal{C}$ 有态射:

$$\varepsilon(Y) : F(Y) \xrightarrow{\varepsilon \cdot \text{id}_{F(Y)}} F(Y), \quad \varepsilon \in \{-1, +1\} \quad (1.4.3.2)$$

这个作用被称为典范的作用。我们希望找到以下 H -函子:

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f) \quad (1.4.3.3)$$

使得它导出 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用在 F 上的典范作用。

设 $\alpha \in H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是一个元素描述了以下扩张:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{n} H \xrightarrow{f} G \rightarrow e \quad (1.4.3.4)$$

设 $\alpha_s \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为在 α 中的由 f 的正规化右逆 s 定义的正规范化的非齐次上闭链。即:

$$\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = s(\sigma_2)s(\sigma_1\sigma_2)^{-1}s(\sigma_1), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G$$

$$s(e) = H \text{ 中的单位元}$$

$$\alpha_s(\sigma_1, e) = \alpha(e, \sigma_1) = 1 \quad (1.4.3.5)$$

$$\delta\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \alpha_s(\sigma_2, \sigma_3)\alpha_s(\sigma_1\sigma_2, \sigma_3)^{-1}\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2\sigma_3)\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2)^{-1}$$

$$= 1, \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in G$$

右逆 $s: G \rightarrow H$ 定义了一个集合上的同构:

$$H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$$

和一个通过这个同构得到的群 H 与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$ 的同构, 其中群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$ 中的法则为

$$(\varepsilon_1, \sigma_1)(\varepsilon_2, \sigma_2) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_s(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1 \sigma_2) \quad (1.4.3.6)$$

这样就把群 H 看作由式 (1.4.3.6) 得到的群。我们有, 对任意 $(\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2) \in H$,

$$\begin{aligned} T_f(\varepsilon_1, \sigma_1) &= T(\sigma_1) \\ T'_f(\varepsilon_1, \sigma_1) &= T'(\sigma_1) \end{aligned} \quad (1.4.3.7)$$

$$c_f((\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2)) = c(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$c'_f((\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2)) = c'(\sigma_1, \sigma_2)$$

而且, 根据 (1.2.3.2), 对任意 (ε, σ) , 以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} FT(\sigma) & \xrightarrow{m((\varepsilon, \sigma))} & T'(\sigma)F \\ & \searrow & \nearrow \\ m((1, \sigma))T'(\sigma)FT'(\sigma) \star m(\varepsilon) & & \end{array} \quad (1.4.3.8)$$

即

$$m((\varepsilon, \sigma)) = \varepsilon m((1, \sigma)) \quad (1.4.3.9)$$

于是

$$m((1, \sigma)) = p(\sigma) : FT(\sigma) \rightarrow T'(\sigma)F \quad (1.4.3.10)$$

所有同构 $p(\sigma), \sigma \in G$ 的全体有以下性质：对任意 $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ ，以下图表称为并是 $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2)$ -交换（即当 $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = +1$ 时为交换的，当 $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = -1$ 时为反交换的）：

$$\begin{array}{ccc}
 FT(\sigma_1\sigma_2) & \xrightarrow{p(\sigma_1\sigma_2)} & T'(\sigma_1\sigma_2)F \\
 \downarrow F \star c(\sigma_2, \sigma_1) & & \downarrow \\
 FT(\sigma_1)T(\sigma_2) & & c'(\sigma_2, \sigma_1) \star F \\
 \downarrow p(\sigma_1) \star T(\sigma_2) & & \downarrow \\
 T'(\sigma_1)FT(\sigma_2) & \xrightarrow{T'(\sigma_1) \star p(\sigma_2)} & T'(\sigma_1)T'(\sigma_2)F
 \end{array} \quad (1.4.3.11)$$

反之，当给定一个函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 和同构 $p(\sigma) : FT(\sigma) \rightarrow T'(\sigma)F, \sigma \in G$ 满足对任意 $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ 有图表 (1.4.3.11) 是 $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2)$ -交换的，我们可以唯一确定一个 H -函子：

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

导出符号群在 F 上的典范作用，通过（此处把 H 看作由式 (1.4.3.6) 描述的群）：

$$m((\varepsilon, \sigma)) = \varepsilon p(\sigma) \quad (1.4.3.12)$$

直接的验证留给读者。

定义 1.4.4. 设 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 和 $(\mathcal{C}', G, T', c')$ 是两个 G -范畴。 c' 是一个加性范畴。设 $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是一个标准化的非齐次上闭

链。我们称由上闭链 α 扭¹成的 G -函子是对象 (F, p) 包含一个函子

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}' \tag{1.4.4.1}$$

和函子的同构：

$$p(\sigma) : FT(\sigma) \rightarrow T'(\sigma)F, \quad \sigma \in G \tag{1.4.4.2}$$

使得对任意 $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ ，图表 (1.4.3.11) 是 $\alpha(\sigma_1, \sigma_2)$ -交换的。

扩张 (1.4.3.4) 的正规化右逆 s 的选择使得我们可以建立一个导出符号群在 F 上的典范作用的 H -函子

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T', c')$$

与由右逆 s 定义的上闭链扭成的 G -函子之间的一一对应。

1.4.5. 我们用 (1.4.3) 中的记号。设

$$(F_1, m_1), (F_2, m_2) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f) \tag{1.4.5.1}$$

是两个 H -函子诱导符号群的典范作用，而

$$u : (F_1, m_1) \rightarrow (F_2, m_2) \tag{1.4.5.2}$$

¹twisted, fr:tordu

是一个于 H 的作用相容的函子态射。设 s_1 和 s_2 为正合列 (1.4.3.4) 中的 f 的两个规范右逆 ($s_1(e) = s_2(e) = e$)。设 $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2} \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为相应的规范的上闭链。设 $\beta: G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为映射:

$$\beta(\sigma) = s_2(\sigma)s_1(\sigma)^{-1}, \sigma_i nG \quad (1.4.5.3)$$

根据 (1.4.3), 函子 (F_1, m_1) 和 (F_2, m_2) 定义了分别由 $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}$ 扭成的 G -函子 $(F_1, p_1), (F_2, p_2)$ 。我们立刻得到态射 $u: F_1 \rightarrow F_2$ 有以下性质:

对任意 $\sigma \in G$, 以下图表

$$\begin{array}{ccc} F_1 T(\sigma) & \xrightarrow{p_1(\sigma)} & T'(\sigma) F_1 \\ u \star T(\sigma) \downarrow & & \downarrow T'(\sigma) \star u \\ F_2 T(\sigma) & \xrightarrow{p_2(\sigma)} & T'(\sigma) F_2 \end{array} \quad (1.4.5.4)$$

是 $\beta(\sigma)$ -交换的。

定义 1.4.6. 设 $(\mathcal{C}, G, T, c)$ 是一个 G -范畴, $(\mathcal{C}', G, T', c')$ 是一个加性的 G -范畴。 $\alpha_1, \alpha_2 \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为非齐次正规上闭链, $\beta: G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为一个映射使得:

$$\alpha_2(\sigma_1, \sigma_2)\alpha_1^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1) \quad (1.4.6.1)$$

最后设 $(F_1, p_1), (F_2, p_2): (\mathcal{C}, G, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', G, T', c')$ 分别是由 α_1, α_2 扭成的 G -函子。我们称从 (F_1, m_1) 到 (F_2, m_2) 的 β -态射为一个函子态射 $u: F_1 \rightarrow F_2$ 使得对任意 $\sigma \in G$ 有图表 (1.4.5.4) 是 $\beta(\sigma)$ -交换的。

1.4.7. 在 (1.4.5) 中已经指出两个标准右逆可以将导出符号群的典范作用的两个 H -函子之间的态射关联到对应扭成的 β -态射。我们立刻可以得到这个对应是一一对应的。此外，如果有三个 H -函子都导出符号群的典范作用，三个右逆 s_1, s_2, s_3 和两个 H -函子的态射 u, v 和它们的复合 vu :

$$\begin{aligned} u &: (F_1, m_1) \rightarrow (F_2, m_2) \\ v &: (F_2, m_2) \rightarrow (F_3, m_3) \\ vu &: (F_1, m_1) \rightarrow (F_3, m_3) \end{aligned} \tag{1.4.7.1}$$

和态射

$$\begin{aligned} u &: (F_1, p_1) \rightarrow (F_2, p_2) \\ v &: (F_2, p_2) \rightarrow (F_3, p_3) \\ vu &: (F_1, p_1) \rightarrow (F_3, p_3) \end{aligned} \tag{1.4.7.2}$$

这里 (F_i, m_i) 分别是由函子 (F_i, m_i) 通过右逆 s_i 扭成的，它们是 $\beta_{j,i}$ -态射，这里

$$\beta_{j,i}(\sigma) = s_j(\sigma)s_i(\sigma)^{-1}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j \tag{1.4.7.3}$$

于是我们有关系

$$\beta_{3,1} = \beta_{3,2}\beta_{2,1} \tag{1.4.7.4}$$

式 (1.4.7.2) 和 (1.4.7.4) 允许我们定义 $\beta_{3,2}$ -态射 v 和 $\beta_{2,1}$ -态射 u 的复合, 而且这个复合的定义与 H -函子态射的复合相容。

1.4.8. 设 c' 是一个加性范畴, 而

$$(F, p) : (C, G, T, c) \rightarrow (C', G, T', c')$$

是由正规上闭链 $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 扭成的 G -函子。我们称

$$(F^\circ, p^\circ) : (C^\circ, G^\circ, T^\circ, c^\circ) \rightarrow (C'^\circ, G^\circ, T'^\circ, c'^\circ) \quad (1.4.8.1)$$

为函子 (F, p) 的反函子¹ (我们使用 (1.3.9) 中的记号), 定义如下:

其基础函子为 F 的反函子 F° , 对任意 $g \in G^\circ$, c' 中的同构

$$p^\circ(g) : F^\circ T^\circ(g) = FT(g^{-1}) \xrightarrow{\sim} T'^\circ(g)F^\circ = T'(g)F$$

为 $p^{-1}(g^{-1}) \circ$

函子 (F, p) 是由 $Z^2(G^\circ, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中 α 的逆 α° ($\alpha^\circ(g, g') = \alpha^{-1}(g^{-1}, g'^{-1})$) 扭成的 G° -函子。

1.4.9. 此处考虑群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的唯一好处是它在加性范畴的函子上的作用是典范的。我们可以同样考虑把 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 换为任何一

¹fr:foncteur gradué tordu opposé

个交换环 K 作用在所考虑的和 G 作用相容的范畴的恒同函子上。

1.5. $\mathbb{Z}^n$ -范畴

1.5.1. 设 $(\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c)$ 为一个 $\mathbb{Z}^n$ -范畴, $(\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$ 是一个加性的 $\mathbb{Z}^n$ -范畴。 $(F, p) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$ 是一个由正规上闭链 $\alpha \in Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 扭成的 $\mathbb{Z}^n$ -函子。 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基。 对任意 $i \in [1, n]$, 有一个函子同构:

$$p(e_i) : FT(e_i) \rightarrow T'(e_i)F \quad (1.5.1.1)$$

和任意一对 $(i, j), i \neq j$ 有 $\alpha(e_i, e_j)\alpha^{-1}(e_j, e_i)$ -交换图表 (1.5.1.2):

$$\begin{array}{ccccc} FT(e_i + e_j) & \xrightarrow{F \star c(e_i, e_j)} & FT(e_j)(e_i) & \xrightarrow{p(e_j) \star T(e_i)} & T'(e_j)FT(e_i) \\ \downarrow F \star c(e_j, e_i) & & & & \downarrow T'(e_j) \star p(e_i) \\ FT(e_i)T(e_j) & & & & T'(e_j)T'(e_i)F \\ \downarrow p(e_i) \star T(e_j) & & & & \downarrow c'(e_i, e_j)^{-1} \star F \\ T'(e_i)FT(e_j) & \xrightarrow{T'(e_i) \star p(e_j)} & T'(e_i)T'(e_j)F & \xrightarrow{c'(e_i, e_j)^{-1} \star F} & T'(e_i + e_j)F \end{array}$$

命题 1.5.2. 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 是一个函子而对任意 $i \in [1, n]$ 有函子同构:

$$p_i : FT(e_i) \rightarrow T'(e_i)F$$

使得对任意 $i, j, i \neq j$, 将图表 (1.5.1.2) 中的 $p(e_i)$ 换为 p_i 后为 $\alpha(e_i, e_j)\alpha^{-1}(e_j, e_i)$ -交换的。则存在唯一的由上闭链 α 扭成的 $\mathbb{Z}^n$ -函子

$$(F, p) : (C, \mathbb{Z}^n, T, c) \rightarrow (C', \mathbb{Z}^n, T', c')$$

使得

$$p(e_i) = p_i, \quad i \in [1, n]$$

构造的唯一性由检验图表 (1.4.3.11) 得到。我们将其验证留给读者。这里我们将只会给出存在性的构造的一点暗示。这将通过对 n 的归纳得到。

1.5.3. $n = 1$ 时的存在性。取

$$p(0) = \text{恒同} \tag{1.5.3.1}$$

$$p(e_1) = p_1$$

则

$$p(-e_1) = \alpha(e_1, -e_1)(T'(-e_1)F \star c^{-1}(-e_1, e_1))$$

$$(T'(-e_1) \star p^{-1}(e_1) \star T(-e_1))(c'(e_1, -e_1) \star FT(-e_1)) \tag{1.5.3.2}$$

即, 在相差一个符号 (即 $\alpha(e_1, -e_1)$) 的情况下, $p(-e_1)$ 是以下态射的复合:

$$\begin{aligned} FT(-e_1) &\xrightarrow{c'(e_1, -e_1) \star FT(-e_1)} T'(-e_1)T'(e_1)FT(-e_1) \xrightarrow{T'(-e_1) \star p^{-1}(e_1) \star T(-e_1)} \\ &\rightarrow T'(-e_1)FT(e_1)T(-e_1) \xrightarrow{T'(-e_1)F \star c^{-1}(-e_1, e_1)} T'(-e_1)F \end{aligned}$$

我们将对 $|q|$ 归纳来定义同构 $p(qe_1)$.

1.6. Koszul 上闭链, 符号的规则

1.6.1. 设 $e_1, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基。记 $\mathbb{Z}_{i,j}^n, i, j \in [1, n], i \neq j$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 的由 e_i, e_j 生成的子群。限制同态定义了以下同态:

$$H^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{i,j \in [1,n] \\ i < j}} H^2(\mathbb{Z}_{i,j}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad (1.6.1.1)$$

我们有典范同构

$$H^2(\mathbb{Z}_{i,j}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (1.6.1.2)$$

故同态 (1.6.1.1) 是同构。

命题 1.6.2. 1) 设 $\alpha \in Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是非齐次的正规上闭链, $\alpha \in H^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是对应的上同调类。 $\alpha_{i,j} \in H^2(\mathbb{Z}_{i,j}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 类似。我们有 (使用 (1.6.1.2)):

$$\alpha_{i,j} = \alpha(e_i, e_j)^{-1} \alpha(e_j, e_i) \quad (1.6.2.1)$$

(在群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中我们用乘法)。

2) 设 α_1 和 α_2 为 $Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的两个元, 对任意 $i \in [1, n], \beta_i$ 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的元。则有且仅有一个映射 $\beta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 使得

$$\alpha_2(\sigma_1, \sigma_2) \alpha_1^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta(\sigma_2) \beta(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1} \beta(\sigma_1), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n \quad (1.6.2.2)$$

$$\beta(e_i) = \beta_i \quad (1.6.2.3)$$

2. 加性范畴的复形

2.1. n -维复形

2.1.1. 首先让我们建立一些符号。首先记 $[n]$ 为集合：

$$[n] = \{p \in \mathbb{Z} : 1 \leq p \leq n\}$$

我们记 $\mathbb{Z}[n]$ 为由集合 $[n]$ 生成的自由 Abel 群，而对于 $i \in [n]$ 有 e_i 是 $\mathbb{Z}[n]$ 中 i 对应的生成元。设 $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ 为映射，我们同样用 $\varphi : \mathbb{Z}[n] \rightarrow \mathbb{Z}[m]$ 为对应群同态。在本节中， c 为一个加性范畴。

定义 2.1.2. c 中对象的 n -维复形为由以下定义的对象：

1) 对任意 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ ，有一个 c 中的对象 X^σ 。

2) 对任意 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ 和 $i \in [n]$ ，有一个态射

$$d^{\sigma, i} : X^\sigma \rightarrow X^{\sigma + e_i}$$

这些态射满足以下条件：

$$d^{\sigma + e_i, i} d^{\sigma, i} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], i \in [n]$$

$$d^{\sigma + e_j, i} d^{\sigma, j} = d^{\sigma + e_i, j} d^{\sigma, i}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], i, j \in [n]$$

(2.1.2.1)

2.1.3. 一个 c 中对象的 n -维复形通常被称作 c 的 n -维复形。设 $(X^\sigma, d^{\sigma,i})$ 为 c 上的一个 n -维复形，称 X^σ 为 $(X^\sigma, d^{\sigma,i})$ 中次数为 σ 的部分。态射 $d^{\sigma,i}$ 被称为次数为 σ 方向为 i 的微分。设 Y 为一个 c 上的 n -维复形，则次数为 σ 的部分记为 Y^σ ，次数为 σ 方向为 i 的微分记作 $d_Y^{\sigma,i}$ 。

定义 2.1.4. 设 Y 和 Y' 为两个 c 上的 n -维复形。则 Y 到 Y' 的态射为以下态射的全体：

$$(f^\sigma : Y^\sigma \rightarrow Y'^\sigma)_{\sigma \in \mathbb{Z}[n]}$$

它们与微分相容，即

$$f^{\sigma+e_i} d_Y^{\sigma,i} = d_{Y'}^{\sigma,i} f^\sigma \quad (2.1.4.1)$$

2.1.5. 称态射 f^σ 为态射 (f^σ) 的次数为 σ 的部分。设 $f : Y \rightarrow Y'$ 为 n -维复形的态射，则 f 的次数为 σ 的部分记为 f^σ 。 n -维复形之间的态射的复合为显然的形式：各个部分的复合。所有 c 上 n -维复形的全体形成一个范畴，记作 $\text{comp}^n(c)$ 。当 $n = 1$ 时，简记为 $\text{comp}^1(c) = \text{comp}(c)$ 。 $\text{comp}(c)$ 中的对象被称作 c 上的单复形，或者在不引起混淆的情况下，称作 c 上的复形。范畴 $\text{comp}^n(c)$ 是加性的。

2.1.6. 设 Y 是 c 上的 n -维复形。我们有时也用记号 $Y_{-\sigma}$ 来表示 Y 中次数为 σ 的部分。用记号 $d_{Y_{-\sigma},i}^Y$ 表示 Y 中次数为 σ

方向为 i 的微分。这个记号主要用在 Y 是单复形且除了有限部分外，其正的部分均为 0。设 $f: Y \rightarrow Y'$ 为 n -维复形的态射，我们有时也用记号 $f_{-\sigma}$ 表示 f 中次数为 σ 的部分。

2.1.7. 设 $\varphi: [n] \rightarrow [m]$ 为一个映射。一个 C 上的 n -维复形 Y 叫做 φ -可积的，如果对任意 $\tau \in \mathbb{Z}[m]$ ，所有 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ 使得 $\varphi(\sigma) = \tau$ 且 Y^σ 不为 0 的 σ 构成的集合是有限的。若 φ 为唯一的映射 $[n] \rightarrow [1]$ ，我们简单地称为可积的。设 $[n] \xrightarrow{\varphi} [m] \xrightarrow{\psi} [p]$ 为两个映射，对任意 $\psi\varphi$ -可积的 n -维复形 Y ，一定是 φ -可积的。特别地，对任意可积的 n -维复形 Y ，它对任意映射 $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$ 都是 φ -可积的。当 φ 为单射时，任意 n -维复形 Y 是 φ 可积的。我们称 φ -可积的 n 维复形范畴为由 $\text{comp}^n(C)$ 中所有 φ -可积的复形组成的子范畴。

2.2. 关联的单复形

2.2.1. 对任意 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, $\sigma = \sum_{j \in [n]} l_j e_j$, $l_j \in \mathbb{Z}$ 和任意 $i \in [n]$ 有：

$$\varepsilon(\sigma, i) = (-1)^{\sum_{j < i} l_j}. \quad (2.2.1.1)$$

则式 (2.2.1.1) 定义了一个映射：

$$(\sigma, i) \mapsto \varepsilon(\sigma, i)$$

从 $\mathbb{Z}[n] \times [n]$ 到符号群 $\{-1, 1\}$ 。我们立即得到对任意 $i \in [n]$ 有映射 $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma, i)$ 是一个群同态且 $\varepsilon(e_j, i) = -1$ 如果 $j < i$, $\varepsilon(e_j, i) = 1$ 如

果 $i \leq j$ 。映射 $(\sigma, i) \mapsto \varepsilon(\sigma, i)$ 是由该性质唯一决定的。于是我们立刻可以得到性质：

$$\varepsilon(\sigma, i)\varepsilon(\sigma + e_i, j) = -\varepsilon(\sigma, j)\varepsilon(\sigma + e_j, i) \quad (2.2.1.2)$$

对任意 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ 和 $(i, j) \in [n] \times [n], i \neq j$ 成立。

2.2.2. 设 Y 为一个 c 上的 n -维复形，令

$$\delta_Y^{\sigma, i} = \varepsilon(\sigma, i)d_Y^{\sigma, i}. \quad (2.2.2.1)$$

从式 (2.2.1.2) 和关系 (2.1.2.1) 得到以下等价关系：

$$\delta^{\sigma+e_i, i} \delta^{\sigma, i} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], i \in [n] \quad (2.2.2.2)$$

$$\delta^{\sigma+e_j, i} \delta^{\sigma, j} + \delta^{\sigma+e_i, j} \delta^{\sigma, i} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], i, j \in [n]$$

现在设 $\varphi: [n] \rightarrow [m]$ 是一个映射，且 Y 是 φ -可积的。我们定义一个 m -维复形 $\int_{\varphi} Y$ 为：

$$\left(\int_{\varphi} Y\right)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma}, \quad \tau \in \mathbb{Z}[m] \quad (2.2.2.3)$$

$$\delta_{\int_{\varphi} Y}^{\tau, i}(y_{\sigma}) = \sum_{\varphi(j)=i} \delta_Y^{\sigma, j}(y_{\sigma}), \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], i \in [m], y_{\sigma} \in Y^{\sigma}, \tau = \varphi(\sigma) \quad (2.2.2.4)$$

式 (2.2.2.4) 定义了从 $(\int_{\varphi} Y)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma}$ 到 $(\int_{\varphi} Y)^{\tau+e_i} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau+e_i} Y^{\sigma}$ 的态射，这里 c 是一个 Abel 群的范畴。当 c 是加性范畴的时候，也能通过把它们放到从 c 到 Abel 群范畴的反变函子

组成的范畴中来定义从 $(\int_{\varphi} Y)^{\tau}$ 到 $(\int_{\varphi} Y)^{\tau+e_i}$ 的态射, 即通过将 y_{σ} 看作 c 中任意对象到 Y^{σ} 的态射. 计算得知 $\delta_{\int_{\varphi} Y}^{\tau, i}$ 满足式 (2.2.2.2). 或者, 换回微分的语言, 由 (2.2.2.3) 定义的对象和由式

$$\begin{aligned} \tau &\in \mathbb{Z}[m], \\ d_{\int_{\varphi} Y}^{\tau, i}(y_{\sigma}) &= \varepsilon(\tau, i) \sum_{\varphi(j)=i} \varepsilon(\sigma, j) d_{Y^j}^{\sigma, j}(y_{\sigma}), \quad i \in [m], \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n] \\ \varphi(\sigma) &= \tau \end{aligned} \quad (2.2.2.5)$$

定义的态射形成一个 c 中的 m -维复形。

设 $f: Y \rightarrow Y'$ 为 φ -可积的 c 中的 n -维复形, 设

$$\left(\int_{\varphi} f\right)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} f^{\sigma} : \left(\int_{\varphi} Y\right)^{\tau} \rightarrow \left(\int_{\varphi} Y'\right)^{\tau} \quad (2.2.2.6)$$

在切换到 $\int_{\varphi} Y$ 和 $\int_{\varphi} Y'$ 的微分时, 显然 $(\int_{\varphi} f)^{\tau}$ 的全体定义了 m -维复形的态射 $\int_{\varphi} f : \int_{\varphi} Y \rightarrow \int_{\varphi} Y'$. 且显然有 $\int_{\varphi} fg = \int_{\varphi} f \int_{\varphi} g$ 和 $\int_{\varphi} \text{id}_Y = \text{id}_{\int_{\varphi} Y}$. 因此 $\int_{\varphi}$ 是从 φ -可积的 n -维复形的范畴到 m -维复形的范畴的一个函子, 这个函子是加性的。

2.2.3. 设 $\varphi: [n] \rightarrow [m]$ 为映射, 设 τ 是 $\mathbb{Z}[m]$ 中的元, 而 i 是 $[m]$ 中的元, 设 E_1 和 E_2 分别为集合:

$$E_1 = \{\sigma_1 \in \mathbb{Z}[n] : \varphi(\sigma_1) = \tau\}$$

$$E_2 = \{\sigma_2 \in \mathbb{Z}[n] : \varphi(\sigma_2) = \tau + e_i\}$$

最后设 Y 为 c 上的 n -维复形, 对任意 $\sigma_1 \in E_1, \sigma_2 \in E_2$, 令:

$$\begin{aligned} u_{\sigma_1, \sigma_2}(Y) &= \varepsilon(\tau, i) \varepsilon(\sigma_1, j) d_Y^{\sigma_1, j} && \text{如果 } \sigma_2 - \sigma_1 = e_j \\ &= 0 && \text{其它情况} \end{aligned} \quad (2.2.3.1)$$

这样便得到一个 $E_1 \times E_2$ 的矩阵:

$$M(\tau, i, Y) = (u_{\sigma_2, \sigma_1}(Y))_{\sigma_2 \in E_2, \sigma_1 \in E_1}. \quad (2.2.3.2)$$

这里 Y 是 φ -可积的, 这个矩阵是态射 $d_{\int_\varphi}^{\tau, i} Y$ 的矩阵。注意到在一般情况下, 该矩阵在每一行和每一列上都只有有限个元素。因此先天地有至少两个函子 $\int_\varphi$ 可能的扩张到任意的 c 中的复形: 可数的直积与可数的直和, 分别表示为:

$$\begin{aligned} \left(\int_\varphi^\Pi Y \right)^\tau &= \prod_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^\sigma \\ d_{\int_\varphi^\Pi}^{\tau, i} Y &\text{ 由矩阵 } M(\tau, i, Y) \text{ 定义} \\ \left(\int_\varphi^\Sigma Y \right)^\tau &= \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^\sigma \\ d_{\int_\varphi^\Sigma}^{\tau, i} Y &\text{ 由矩阵 } M(\tau, i, Y) \text{ 定义} \end{aligned} \quad (2.2.3.3)$$

函子 $\int_\varphi^\Pi$ 被称作函子 $\int_\varphi$ 的 Π -扩张。函子 $\int_\varphi^\Sigma$ 被称作函子 $\int_\varphi$ 的 Σ -扩张。这两个扩张以后会用到。更多地, 我们有自然函子态射 $\int_\varphi^\Sigma \rightarrow \int_\varphi^\Pi$, 由对应的直和到直积的函子态射得到的。

2.2.4. 设 $[n] \xrightarrow{\varphi} [m] \xrightarrow{\psi} [r]$ 为两个映射，并假设 c 中存在可数个的直积。我们有以下关系：

$$\int_{\psi}^{\Pi} \int_{\varphi}^{\Pi} = \int_{\psi\varphi}^{\Pi} \quad (2.2.4.1)$$

$$\int_{\text{id}}^{\Pi} = \text{id} \quad (2.2.4.2)$$

这里作者知道这个观察是平凡无趣且繁琐的。式 (2.2.4.1) 中的等号仅当积函子有适当的结合性质时才成立。这在实践中总是不成立的。在一般的情况下，等号必须被替换为一个典范同构，以满足 (1.2.1.3) 所需的相容性质。对于函子 $\int_{\varphi}^{\Sigma}$ 与 (2.2.4.1) 相似的关系是成立的。若可数的积与和不一定存在，式 (2.2.4.1) 仍然对 $\psi\varphi$ -可积的复形成立。当 ψ 为唯一的映射 $[n] \rightarrow [1]$ ，我们用记号 $\int_n$ 对任意可积的 n -维复形 Y ，复形 $\int_n Y$ 称作与复形 Y 关联的单复形。

2.3. 复形范畴的分级结构

2.3.1. 设 Y 为一个 n -维复形和 $i \in [n]$ ，设

$$(T_i Y)^{\sigma} = Y^{\sigma + e_i}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n] \quad (2.3.1.1)$$

$$d_{T_i Y}^{\sigma, j} = \nu(i, j) d_Y^{\sigma + e_i, j}, \quad j \in [n]$$

这里 $\nu(i, j) = 1$ 如果 $i \neq j, \nu(i, j) = -1$ 如果 $i = j$. 对任意 n -维复形的态射 $f: Y \rightarrow Y'$, 令

$$(T_i f)^\sigma = f^{\sigma + e_i}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n] \quad (2.3.1.2)$$

于是我们定义了一个函子 $T_i: \text{comp}^n(\mathcal{C}) \rightarrow \text{comp}^n(\mathcal{C})$, 称为方向 i 上的平移函子, 当 $n = 1$ 时, 我们用记号 T_Y, T_f , 或者简记为 $X[1], f[1]$. 方向 i 上的平移函子是 $\text{comp}^n(\mathcal{C})$ 的一个自同构. 任意两个函子 $T_i, i \in [n]$ 之间是交换的, 即

$$T_i T_j = T_j T_i, \quad i, j \in [n] \quad (2.3.1.3)$$

于是可以定义群 $\mathbb{Z}[n]$ 在范畴 $\text{comp}^n(\mathcal{C})$ 上的作用:

$$\sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i, \quad T(\sigma) = T_1^{l_1} \cdots T_n^{l_n} \quad (2.3.1.4)$$

此后, 记号 $\text{comp}^n(\mathcal{C})$ 便表示范畴 $\text{comp}^n(\mathcal{C})$ 和一个由上式定义的严格的 $\mathbb{Z}[n]$ -范畴。

2.3.2. 设 $\varphi: [n] \rightarrow [m]$ 为映射, Y 是一个 $\mathcal{C}$ 上的 n -维复形, i 是 $[n]$ 中的元素. 我们假设 $\mathcal{C}$ 中存在可数的直和. 首先注意到对象 $(\int_\varphi^\Sigma T_i Y)^\tau$ 与 $(T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y)^\tau$ 是相同的. 事实上, 由定义它们都等于

$$\bigoplus_{\varphi(\sigma) = \tau + e_{\varphi(i)}} Y^\sigma.$$

下面令：

$$(p_{i,\varphi}(Y))^\tau : \left(\int_\varphi^\Sigma T_i Y \right)^\tau \rightarrow \left(T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y \right)^\tau, \quad \tau \in \mathbb{Z}[m]$$

$$(p_{i,\varphi}(Y))^\tau = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau+e_{\varphi(i)}} \varepsilon(\sigma, i) \varepsilon(\varphi(\sigma), \varphi(i)) \text{id}_{Y^\sigma}$$
(2.3.2.1)

经过计算表明全体 $((p_{i,\varphi}(Y))^\tau, \tau \in \mathbb{Z}[m])$ 与 $\int_\varphi^\Sigma T_i Y$ 和 $T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y$ 的微分交换，从而定义了一个态射：

$$p_{i,\varphi}(Y) : \int_\varphi^\Sigma T_i Y \rightarrow T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y$$
(2.3.2.2)

这个态射是一个同构且对 Y 具有函子性，因此定义了一个函子同构：

$$p_{i,\varphi} : \int_\varphi^\Sigma T_i \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma$$
(2.3.2.3)

命题 2.3.3. 1) 对任意数对 $i, j \in [n], i \neq j$ ，下面图表

$$\begin{array}{ccc} \int_\varphi^\Sigma T_i T_j & \xrightarrow{p_{i,\varphi} \star T_j} & T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma T_j \\ p_{j,\sigma} \star T_i \downarrow & & \downarrow T_{\varphi(i)} \star p_{j,\varphi} \\ T_{\varphi(j)} \int_\varphi^\Sigma T_i & \xrightarrow{T_{\varphi(j)} \star p_{i,\varphi}} & T_{\varphi(i)} T_{\varphi(j)} \int_\varphi^\Sigma \end{array}$$
(2.3.3.1)

当 $\varphi(i) \neq \varphi(j)$ 时是交换的，当 $\varphi(i) = \varphi(j)$ 时是反交换的。

2) 设 $\psi : [m] \rightarrow [r]$ 为映射，下面图表

$$\begin{array}{ccc} \int_\psi^\Sigma \int_\varphi^\Sigma T_i & \xrightarrow{\int_\phi^\Sigma \star p_{i,\varphi}} & \int_\psi^\Sigma T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma \\ \parallel & & \downarrow p_{\varphi(i),\psi} \star \int_\varphi^\Sigma \\ \int_{\psi\varphi}^\Sigma T_i & \xrightarrow{p_{i,\psi\varphi}} T_{\psi\varphi(i)} \int_{\psi\varphi}^\Sigma & = T_{\psi\varphi(i)} \int_\psi^\Sigma \int_\varphi^\Sigma \end{array}$$

是交换的。(读者若不想欺骗自己, 则应把等号换成典范同构。)

这个验证是简单的, 把它留给读者。第一个断言是从 (2.2.1.2) 得到的。

2.3.4. 我们现在把映射 φ 取为唯一的映射 $[n] \xrightarrow{\varphi} [1]$, 并令群 $\mathbb{Z}[n]$ 通过 $\varphi: \mathbb{Z}[n] \rightarrow \mathbb{Z}$ 作用在 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 上。那么存在 (1.5.2) 唯一一个由 Koszul 上闭链扭成的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子:

$$\left(\int_n^{\Sigma}, p_n \right) : \text{comp}^n(\mathcal{C}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C}) \quad (2.3.4.1)$$

使得

$$p_n(e_i) = p_{i, \varphi}.$$

此后, 记号 $\int_n^{\Sigma}$ 表示函子 $\int_n^{\Sigma}$ 和由上面定义的 $\mathbb{Z}[n]$ 函子结构。

2.3.5. 段落 (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) 的考虑同样可以应用到函子 $\int_{\varphi}^{\Pi}$ 上。当 $\mathcal{C}$ 中不一定存在可数的直和与直积时, 上面的结果也可以应用到函子 $\int_{\varphi}$ 限制在具有可积性的那些复形中。

2.4. 复形之间的函子的扩张

2.4.1. 有一个典范的函子:

$$\iota_n : \text{comp}^n(\mathcal{C})^{\circ} \rightarrow \text{comp}^n(\mathcal{C}^{\circ}) \quad (2.4.1.1)$$

定义如下：

$$(\iota_n X)^\sigma = X^{-\sigma}, \quad X \in \text{Ob}(\text{comp}^n(\mathcal{C}))$$

$$d_{\iota_n X}^{\sigma, i} = d_X^{-\sigma - e_i, i}, \quad (2.4.1.2)$$

$$(\iota_n f)^\sigma = f^{-\sigma}, \quad f \in \text{Fl}(\text{comp}^n(\mathcal{C}))$$

函子 ι_n 是 $\mathbb{Z}[n]$ -范畴的自同构 ($\text{comp}^n(\mathcal{C})$ 的 $\mathbb{Z}[n]$ -范畴的结构由 (2.3.1) 定义, $\text{comp}^n(\mathcal{C}^\circ)$ 的分级结构由 (2.3.1) 和 (1.3.9) 定义)。

假设 $\mathcal{C}$ 中可数个的直和存在而 $\varphi: [n] \rightarrow [m]$ 为映射, 定义:

$$\left(\int_{\varphi, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ : \text{comp}^n(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \text{comp}^m(\mathcal{C})^\circ \quad (2.4.1.3)$$

为在 (2.2.3) 和 (2.2.4) 中定义的函子的反函子。同样地, 定义:

$$\int_{\varphi, \mathcal{C}^\circ}^\Pi : \text{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \rightarrow \text{comp}^m(\mathcal{C}^\circ) \quad (2.4.1.4)$$

为在 (2.2.3) 和 (2.2.4) 中定义的函子。我们立刻可以得到以下图表

$$\begin{array}{ccc} \text{comp}^n(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_n} & \text{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \\ \left(\int_{\varphi, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ \downarrow & & \downarrow \int_{\varphi, \mathcal{C}^\circ}^\Pi \\ \text{comp}^m(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_m} & \text{comp}^m(\mathcal{C}^\circ) \end{array} \quad (2.4.1.5)$$

是交换的。特别地, 令 φ 为由唯一的映射 $[n] \rightarrow [1]$, 我们有以下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} \text{comp}^n(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_n} & \text{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \\ \left(\int_{n, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ \downarrow & & \downarrow \int_{n, \mathcal{C}^\circ}^\Pi \\ \text{comp}(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_1} & \text{comp}(\mathcal{C}^\circ) \end{array} \quad (2.4.1.6)$$

而且我们得到一对同构 (ι_1, ι_n) ，是由 $(f_{n,C}^\Sigma)^\circ$ 扭的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子到 f_{n,C°^Π 扭的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子的同构（函子 f_{n,C°^Π 的分级结构由 (2.3.4) 描述，函子 $(f_{n,C}^\Sigma)^\circ$ 的分级结构由 (2.3.4) 和 (1.4.8) 描述）。

我们现在用同构 ι_n 表示范畴 $\text{comp}^n(\mathcal{C})^\circ$ 与 $\text{comp}^n(\mathcal{C}^\circ)$ 之间的同构，也表示函子 $(f_{n,C}^\Sigma)^\circ$ 与 f_{n,C°^Π 之间的同构。

2.4.2. 设 $\mathcal{C}_i, i \in [n]$ 为一族加性范畴而 $\prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i$ 为它们的积。我们用记号 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 表示范畴 $\prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i$ 中的对象，我们用记号 $(X_1, X_2, \dots, f_i, \dots, X_n)$ 表示以下态射：

$$(\text{id}_{X_1}, \text{id}_{X_2}, \dots, f_i, \dots, \text{id}_{X_n})$$

特别地，这些公约也可以应用到范畴 $\prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i)$ 。注意到范畴 $\prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i)$ 有一个 $\mathbb{Z}[n]$ -范畴的结构，对任意 $\sigma = \sum_{i \in [n]} \sigma_i, \sigma_i \in \mathbb{Z}[n]$ ，我们有：

$$T(\sigma)(X_1, x_2, \dots, X_n) = (X_1[l_1], x_2[l_2], \dots, X_n[l_n]) \quad (2.4.2.1)$$

$\prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i)$ 中的对象 $(X_1, x_2, \dots, X_n)$ 被称作可积的，如果对任意 $l \in \mathbb{Z}$ ，使得 $\sum_{i \in [n]} l_i = l$ 且 $X_i^{l_i} \neq 0$ 对任意 $i \in [n]$ 成立的 $\sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n]$ 是有限的。

现在设 $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ 为多加性的共变函子。对任意 $\prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i)$ 中的对象 $(X_1, \dots, x_n)$ ，设：

$$F^{[n]}(X_1, \dots, X_n)^\sigma = F(X_1^{l_1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad (2.4.2.2)$$

对任意 $\sigma = \sum_{i \in [n]} \in \mathbb{Z}[n]$.

$$d_{F^{[n]}(X_1, \dots, X_n)}^{\sigma, i} = F(X_1^{l_1}, \dots, d_{X_i}^{l_i}, \dots, X_n^{l_n}), \quad i \in [n]$$

这样我们定义了一个 c 上的 n -维复形。

对任意 $\prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i)$ 中的态射 $(f_1, \dots, f_n)$, 设

$$F^{[n]}(f_1, \dots, f_n)^\sigma = F(f_1^{l_1}, \dots, f_n^{l_n}) \quad (2.4.2.3)$$

对任意 $\sigma = \sum_{i \in [n]} \in \mathbb{Z}[n]$. 这样我们定义了 n -维复形的态射。

这样我们定义了一个显式的函子:

$$F^{[n]} : \prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \text{comp}^n(\mathcal{C}) \quad (2.4.2.4)$$

注意到对任意 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, 我们有:

$$F^{[n]}T(\sigma) = T(\sigma)F^{[n]} \quad (2.4.2.5)$$

也就是说函子 $F^{[n]}$ 是一个严格的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子。而函子 $F^{[n]}$ 将 $\prod_{i \in [n]}$ 中可积的对象变为 $\text{comp}^n(\mathcal{C})$ 中可积的对象。

现在假设 c 中存在有限的直积 (对应地, 直和), 我们有:

$$\text{comp}_\Pi F = \int_n^\Pi F^{[n]} \quad (2.4.2.6)$$

$$(\text{对应地, } \text{comp}_\Sigma F = \int_n^\Sigma F^{[n]})$$

函子 $\text{comp}_{\Pi} F$ (对应地, $\text{comp}_{\Sigma} : \prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ 被称作函子 F 的 Π -扩张 (对应地, Σ -扩张)。由函子 F 是严格的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子而函子 f_n^{Π} (对应地, f_n^{Σ}) 是由与 $\mathbb{Z}[n]$ 的基 $e_1, \dots, e_n$ 相关的 Koszul 上闭链扭成的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子知, 函子 $\text{comp}_{\Pi} F$ (对应地, $\text{comp}_{\Sigma} F$) 是由与 $\mathbb{Z}[n]$ 的基 $e_1, \dots, e_n$ 相关的 Koszul 上闭链扭成的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子, 根据符号规则 I(??)。我们得到对任意 $i \in [n]$ 有典范同构:

$$\text{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \xrightarrow{\sim} \text{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1]$$

$$\text{(对应地, } \text{comp}_{\Sigma} F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \xrightarrow{\sim} \text{comp}_{\Sigma} F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1]) \quad (2.4.2.7)$$

被记作 p_i 。该同构有 (??) 中描述的反交换的性质。函子 $\text{comp}_{\Pi} F$ 和 $\text{comp}_{\Sigma} F$ 限制到可积的对象上与 $\prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i)$ 是一样的。而这个限制在 $\mathcal{C}$ 没有额外的假设下也总是可以得到的。

2.4.3. 现在设有两个多加性的函子 $F, F' : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ 而 $h : F \rightarrow F'$ 为函子态射。于是我们得到一个函子态射:

$$h^{[n]} : F^{[n]} \rightarrow F'^{[n]}$$

为

$$h^{[n]}(X_1, \dots, X_n)^{\sigma} = h(X_1^{l_1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad (2.4.3.1)$$

$$\sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n], \quad (X_1, \dots, X_n) \in \text{Ob}(\prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i))$$

于是，传递到单复形，为两个函子态射：

$$\mathrm{comp}_{\Pi} h : \mathrm{comp}_{\Pi} F \rightarrow \mathrm{comp}_{\Pi} F' \quad (2.4.3.2)$$

$$\mathrm{comp}_{\Sigma} h : \mathrm{comp}_{\Pi} F \rightarrow \mathrm{comp}_{\Sigma} F'$$

如果 h 和 h' 为两个可结合的多加性函子之间的态射，我们有

$$\mathrm{comp}_{\Pi} h h' = \mathrm{comp}_{\Pi} h \mathrm{comp}_{\Pi} h' \mathrm{comp}_{\Sigma} h h' = \mathrm{comp}_{\Pi} h \mathrm{comp}_{\Sigma} h'$$

这里态射 $\mathrm{comp}_{\Pi} h$ (对应地， $\mathrm{comp}_{\Sigma} h$) 是满足符号规则 II(??) 的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子。

2.4.4. 当函子 F 在某些变量上是反变函子，即令 $c_i = (c'_i)^\circ$ ，对任意 $i \in J \subset [n]$ ，函子 $\mathrm{comp}_{\Pi} F$ 和 $\mathrm{comp}_{\Sigma} F$ ，在 (2.4.1) 中所述的同构下，是在对应变量中是反变的。

2.5. 同伦

2.5.1. 设 X 和 Y 为两个 c 上的 n -维复形，而 $f, g : X \rightrightarrows Y$ 为复形的态射。 f 到 g 的同伦是一族态射 $a = (a^{\sigma, i} : X^{\sigma+e_i} \rightarrow Y^{\sigma}, \sigma \in \mathbb{Z}[n], i \in [n])$ 使得：

$$a^{\sigma+e_i-e_j, j} d_X^{\sigma, i} = d_Y^{\sigma-e_j, i} a^{\sigma-e_j, j}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], i, j \in [n], i \neq j \quad (2.5.1.1)$$

$$g^{\sigma} - f^{\sigma} = \sum_{i \in [n]} a^{\sigma, i} d_X^{\sigma, i} + d_Y^{\sigma-e_i, i} a^{\sigma-e_i, i}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n]$$

我们用记号 $a : f \rightsquigarrow g$ 表示 f 到 g 的同伦 a 。

2.5.2. 设 $f, g, h: X \xrightarrow{\sim} Y$ 为三个态射, $a: f \rightsquigarrow g$ 和 $b: g \rightsquigarrow h$ 为两个同伦. 我们定义 $b+a: f \rightsquigarrow h$ 为同伦 $((b+a)^{\sigma,i} = b^{\sigma,i} + a^{\sigma,i}, \sigma \in \mathbb{Z}[n], i \in [n])$.

2.5.3. 设 $f, g: X \rightrightarrows Y$ 为两个复形的态射, $a: f \rightsquigarrow g$ 为同伦而 $u: Y \rightarrow Y'$ (对应地, $v: X' \rightarrow X$) 为复形的态射, 我们定义 $u \star a: uf \rightsquigarrow ug$ (对应地, $a \star v: fv \rightsquigarrow gv$) 为同伦 $((u \star a)^{\sigma,i} = u^{\sigma} a^{\sigma,i})$ (对应地, $((a \star v)^{\sigma,i} = a^{\sigma,i} v^{\sigma+e_i})$).

2.5.4. 运算 $\star$ 和同伦的和具有以下性质:

$$u \star (b + a) = u \star b + u \star a$$

$$(b + a) \star v = b \star v + a \star v \quad (2.5.4.1)$$

$$uu' \star a = u \star (u' \star a)$$

$$a \star vv' = (a \star v) \star v'$$

2.5.5. 两个态射 $f, g: X \rightrightarrows Y$ 被称为同伦的如果存在它们之间的一个同伦. 两个态射 f, g 是同伦的如果态射 $f-g$ 与零同伦. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个与零映射同伦的态射. 对任意 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, 态射 $T(\sigma)f$ 同伦与零. 所有与零同伦的态射的全体构成 $\text{comp}^n(C)$ 的一个理想, 即一个与零同伦的态射与任意一个态射的两种复合方法仍然与零同伦, 且任两个与零同伦的态射的直和也与零同伦.

2.5.6. 设 $\varphi: [n] \rightarrow [m]$ 为态射, 函子 f_{φ}^{Σ} 和 f_{φ}^{Π} 将 $\text{comp}^n(C)$ 中两个态射的同伦映为 $\text{comp}^m(C)$ 中两个态射的同伦. 设 $F: \prod_{i \in [n]} C_i \rightarrow C$

为多加性的函子，函子

$$F^{[n]} : \prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \text{comp}^n(\mathcal{C})$$

为由式 (2.4.2.4) 定义, X_i 为 $\text{comp}(\mathcal{C}_i)$ 中的对象, ($i \neq j$) 而 $f, g : X \rightrightarrows Y$ 为 $\text{comp}(\mathcal{C}_j)$ 中两个同伦的态射, 则态射

$$F^{[n]}(X_1, \dots, f, \dots, X_n) \text{ 和 } F^{[n]}(X_1, \dots, g, \dots, X_n)$$

是同伦的。另外, $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射

$$\text{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, f, \dots, X_n) \text{ 和 } \text{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, g, \dots, X_n)$$

是同伦的 (结论对 $\text{comp}_{\Sigma} F$ 同样成立)。我们把这些证明均留给读者, 或者参考 [1]。

2.5.7. 定义范畴 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 为:

- $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 中的对象为 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的对象。
- 设 X 和 Y 为 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 中的两个对象, $f, g : X \rightrightarrows Y$ 为 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的两个态射, 则关系 “ f 和 g 是同伦的” 构成 $\text{Hom}_{\text{comp}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 中的等价关系, 定义 $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 为集合 $\text{Hom}_{\text{comp}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 商去这个等价关系。
- 从 (2.5.5) 立刻得到 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射的复合传递到 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 中便定义了两个态射的复合。

从 (2.5.5) 立刻得到这是一个范畴，而且这个范畴是加性的。典范函子 $\text{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathcal{K}(\mathcal{C})$ 将对象恒同地映过去，而将态射 f 映射为一族等价的态射 f 是加性的函子。 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 中态射 f 为 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中态射 f 的像，而这个典范函子被称作 f 模去同伦的类。范畴 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 被称作同伦意义下 $\mathcal{C}$ 中的复形范畴。

2.5.8. 典范函子 $\text{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathcal{K}(\mathcal{C})$ 有以下性质：对任意从 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 到给定范畴 $\mathcal{A}$ 的函子，与 Q 作用得到从 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 到 $\mathcal{A}$ 的函子，即对任意范畴 $\mathcal{A}$ ，有函子：

$$\text{Hom}(Q, \mathcal{A}) : \text{Hom}(\mathcal{K}(\mathcal{C}), \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}(\text{comp}(\mathcal{C}), \mathcal{A})$$

(Hom 为函子构成的范畴)。这个函子是全忠实的，即在对象上是单射，而其像是 $\text{Hom}(\text{comp}(\mathcal{C}), \mathcal{A})$ 的全子范畴，其为将在 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中同伦的态射映为 $\mathcal{A}$ 中相等的态射的那些函子。范畴 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 及典范函子 $\text{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathcal{K}(\mathcal{C})$ 在同构意义下由上述性质唯一确定。

2.5.9. 由 (2.5.5) 和 (2.5.8) 立刻得到存在且只存在一个 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 上的平移 (translation) 的函子使得典范函子 $\text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C})$ 与平移 (严格地) 交换。这个平移函子是 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 的自同态，从而在 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ 上定义了一个严格的 $\mathbb{Z}$ -范畴的结构。典范函子 $\text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C})$ 是一个严格的 $\mathbb{Z}$ -函子。

2.5.10. 设 $F: \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个多加性的函子, 定义

$$Q_i: \text{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C}_i)$$

为典范函子。当 $\mathcal{C}$ 中有可数的直积时, (2.5.6) 与 (2.5.7) 的结果立刻可以得到存在唯一一个函子 $\mathcal{K}_\Pi(F): \prod_{i \in [n]} \mathcal{K}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C})$ 使得下面图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in [n]} \text{comp}(\mathcal{C}_i) & \xrightarrow{\text{comp}_\Pi F} & \text{comp}(\mathcal{C}) \\ \prod_{i \in [n]} Q_i \downarrow & & \downarrow Q \\ \prod_{i \in [n]} \mathcal{K}(\mathcal{C}_i) & \xrightarrow{\mathcal{K}_\Pi F} & \mathcal{K}(\mathcal{C}) \end{array} \quad (2.5.10.1)$$

此外, 函子 $\prod_{i \in [n]} Q_i$ 是一个严格的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子, 对于函子 $\mathcal{K}_\Pi F$, 存在且仅存在一个由 $\mathbb{Z}[n]$ 的基 $e_1, \dots, e_n$ 相关的 Koszul 上闭链扭成的 $\mathbb{Z}[n]$ -函子的结构, 使得以下 $\mathbb{Z}[n]$ -函子相等:

$$\mathcal{K}_\Pi F \star \prod_{i \in [n]} Q_i = Q \star \text{comp}_\Pi F \quad (2.5.10.2)$$

最后, 设 F 和 F' 为两个多加性的函子而 $m: F \rightarrow F'$ 为函子态射。由 (2.5.7) 得到存在且仅存在一个函子态射:

$$\mathcal{K}_\Pi m: \mathcal{K}_\Pi F \rightarrow \mathcal{K}_\Pi F' \quad (2.5.10.3)$$

使得

$$\mathcal{K}_\Pi m \star \prod_{i \in [n]} Q_i = Q \star \text{comp}_\Pi m \quad (2.5.10.4)$$

函子 $\kappa_{\Pi}F$ 被称作函子 F 在复形同伦意义下的 Π -扩张, 态射 $\kappa_{\Pi}m$ 被称作态射 m 在复形同伦意义下的 Π -扩张。

当 $\mathcal{C}$ 中存在可数的直和时, 我们可以同样地定义函子 $\kappa_{\Sigma}F$: 函子 F 在复形同伦意义下的 Σ -扩张和态射 $\kappa_{\Sigma}m$: 态射 m 在复形同伦意义下的 Σ -扩张。

2.5.11. 设 X 和 Y 是 $\mathcal{C}$ 中的两个复形, $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射 $f: X \rightarrow Y$ 被称作同伦的如果其在 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的像 f 是同构。复形 X 和 Y 被称作同伦的, 如果有一个这样的 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的同构。

2.5.12. 设 X 和 Y 是 $\mathcal{C}$ 中的两个复形, $f, g: X \rightrightarrows Y$ 为 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的两个态射, $a, b: f \rightsquigarrow g$ 为 f 到 g 的两个同伦。我们称 a 到 b 的二阶同伦, 记为 $\alpha: a \rightsquigarrow b$, 为一族态射 $\alpha = (\alpha^i: X^{i+2} \rightarrow Y^i, i \in \mathbb{Z})$ 使得

$$b^i - a^i = \alpha^i d_X^{i+1} - d_Y^{i-1} \alpha^{i-1} \quad (2.5.12.1)$$

2.5.13. 注意到通过同构 (2.4.1):

$$\iota_1: \text{comp}(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C}^\circ)$$

的定义, 由 (2.5.7), 可以得到唯一的同构:

$$\iota_1: \kappa(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \kappa(\mathcal{C}^\circ)$$

为 $\mathbb{Z}$ -范畴的同构。此后, 我们通过这个同构把 $\kappa(\mathcal{C})^\circ$ 和 $\kappa(\mathcal{C}^\circ)$ 看作是一样的。

3. 特异三角形

3.1. 一个映射的锥

3.1.1. 设 $\mathcal{C}$ 为一个加性范畴，我们记 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 为以下定义的范畴：

- $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象为 $\mathcal{C}$ 中复形的对象的次数为 0 的态射 $X \xrightarrow{f} Y$ 。
- 设 $X \xrightarrow{f} Y$ 和 $X' \xrightarrow{f'} Y'$ 为 $X \xrightarrow{f} Y$ 中的两个对象，则从 $X \xrightarrow{f} Y$ 到 $X' \xrightarrow{f'} Y'$ 为 $X \xrightarrow{f} Y$ 的态射定义为 (g, h, a) ，这里 $g : X \rightarrow X'$ 和 $h : Y \rightarrow Y'$ 为次数为 0 的复形态射，而 $a : f'g \rightsquigarrow hf$ 为 $f'g$ 到 hf 之间的同伦。
- 设

$$(g, h, a) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y') \text{ 和 } (g', h', a') : (X' \xrightarrow{f'} Y') \rightarrow (X'' \xrightarrow{f''} Y''),$$

为 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的两个态射，它们的复合定义如下：

$$\begin{aligned} g'' &= g'g, \\ h'' &= h'h, \end{aligned} \tag{3.1.1.1}$$

$$a'' = a' \star g + h' \star a.$$

则我们定义的确实为一个范畴。我们通常把 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的态射 $(g, h, a) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$ 表示为一个图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & \nearrow a & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \quad (3.1.1.2)$$

范畴 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 是加性的， $X \xrightarrow{f} Y$ 和 $X' \xrightarrow{f'} Y'$ 的直和为

$$X \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} Y \oplus Y'$$

3.1.2. 设 $X \xrightarrow{f} Y$ 为 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象，设

$$\begin{aligned} c(f)^i &= Y^i \oplus X^{i+1} \\ d_{c(f)}^i &= \begin{pmatrix} d_Y^i & f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \rightarrow Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \end{aligned} \quad (3.1.2.1)$$

这样我们定义了一个由 c 中的对象组成的复形。这个复形记作 $c(f)$ ，称作态射 f 的锥。设

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & \nearrow a & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

是 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的态射，定义

$$c((g, h, a))^i = \begin{pmatrix} h^i & a^i \\ 0 & g^{i+1} \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \rightarrow Y'^i \oplus X'^{i+1} \quad (3.1.2.2)$$

这个态射与 $c(f)$ 与 $c(f')$ 的微分相容，因此这定义了复形的态射：

$$c((g, h, a)) : c(f) \rightarrow c(f') \quad (3.1.2.3)$$

这样我们定义了一个函子 $c : \text{tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ ，被称为锥函子。

定义 $s : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{tr}_1(\mathcal{C})$ 为函子 $X \mapsto (0 \rightarrow X)$ 。对任意 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象 $X \xrightarrow{f} Y$ ，定义 $\Phi(f) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow sc(f)$ 为 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的态射：

$$\Phi(f) = (0, p(f), a(f))$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow a(f) & \nearrow & \downarrow p(f) \\ 0 & \xrightarrow{w} & c(f) \end{array}$$

$$p(f)^i = \begin{pmatrix} \text{id}_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix} : Y^i \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1} \quad (3.1.2.4)$$

$$a(f)^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_{X^{i+1}} \end{pmatrix} : X^{i+1} \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1}$$

经过简单的计算立即得到 Φ 是一个范畴 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 的恒同函子到函子 sc 之间的函子态射。

命题 3.1.3. 态射 Φ 使得锥函子是函子 s 的左伴随，即，对任意 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象 $X \xrightarrow{f} Y$ 和 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的对象 W ，有一个由

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{comp}(C)}(c(f), W) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}_1(C)}((X \xrightarrow{f} Y), sW)$$

是一个同构。

它的验证留给读者。我们注意到函子 s 是全忠实的从而函子 $_{cs}$ 与恒同函子典范同构。事实上，通过函子 c 的构造，函子 $_{cs}$ 与恒同函子相等。性质 (3.1.3) 中的伴随性质可以这样描述：以下函子定义的态射

$$c : \mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}_1(C)}((X \xrightarrow{f} Y), sW) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{comp}(C)}(c(f), W)$$

是一个同构。

3.1.4. 我们将要给出 $\mathrm{tr}_1(C)$ 中同伦的定义。设

$$(g, h, a), (g', h', a') : (X \xrightarrow{f} Y) \rightrightarrows (X' \xrightarrow{f'} Y')$$

是 $\mathrm{tr}_1(C)$ 的两个态射。 (g, h, a) 到 (g', h', a') 的同伦是一个三元组 (b, b', α) ，这里 $b : g \rightsquigarrow g', b' : h \rightsquigarrow h'$ 为同伦，而 $\alpha : f' \star b + a' \rightsquigarrow b' \star f + a$ 是二阶的同伦 (2.5.12)。两个 $\mathrm{tr}_1(C)$ 中的态射被称为同伦的，如果存在上述的同伦。同伦关系是一个等价关系，它与直和与复合均相容。我们引入范畴 $\mathrm{Tr}_1(C)$ 的对象为 $\mathrm{tr}_1(C)$ 中的对象，而态射为 $\mathrm{tr}_1(C)$ 中态射在同伦意义下的态射。

命题 3.1.5. 设 $D, D' : (X \xrightarrow{f} Y) \rightrightarrows (X' \xrightarrow{f'} Y')$ 为两个 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的态射。如果态射 D, D' 在 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 中同伦，则态射 $c(D)$ 与 $c(D')$ 在 $\mathrm{comp}(\mathcal{C})$ 中是同伦的。

设 $D = (g, h, a)$ 而 $D' = (g', h', a')$ 。假设 D 和 D' 在 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 是同伦的，则存在同伦 b 和 b' 使得

$$\begin{aligned} g' - g &= bd + db \\ h' - h &= b'd + db' \end{aligned} \tag{3.1.5.1}$$

(为了简化记号，我们省略了其中的指数。) 于是存在一个二阶的同伦 α 使得

$$\alpha d - d\alpha = b'f + a - (f'b + a')$$

通过计算立刻得到 $\begin{pmatrix} b' & \alpha \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ 是 $c(D)$ 与 $c(D')$ 之间的同伦。

推论 3.1.6. 函子

$$c : \mathrm{tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{comp}(\mathcal{C}) \text{ 和 } s : \mathrm{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$$

与 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{comp}(\mathcal{C})$ 中的同伦相容，从而通过商定义了函子 $c : \mathrm{Tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathcal{C})$ 和 $s : \mathrm{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Tr}_1(\mathcal{C})$ 。函子 $c : \mathrm{Tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathcal{C})$ 是函子 $s : \mathrm{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Tr}_1(\mathcal{C})$ 的左伴随。

这个结果由 (3.1.3) 和 (3.1.5) 得到。

3.1.7. 定义 $s' : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{tr}_1(\mathcal{C})$ 为函子 $X \mapsto (X \rightarrow 0)$ 。则函子 $cs' : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ 与 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的平移函子相等。函子 s' 将 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中两个同伦的态射变为 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中两个同伦的态射。而这也定义了一个函子 $s' : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Tr}_1(\mathcal{C})$ 。函子 $cs' : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$ 与 $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ 中的平移函子相等。

3.2. 锥函子的性质

3.2.1. 在一个 $\mathbb{Z}$ -范畴中，我们称一个三角形为以下形式的图：

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \quad (3.2.1.1)$$

对于 (3.2.1.1) 中的三角形，我们用记号 (X, Y, Z, u, v, w) 来表示，或者用图表：

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \searrow v \\ & u & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array} \quad (3.2.1.2)$$

这些箭头要求三角形中有一个指定的次数为 1 的态射。设 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X', Y', Z', u', v', w') 为两个三角形，则三角形的态射是以下的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array} \quad (3.2.1.3)$$

这些三角形的态射通过显然的方式复合，这些三角形形成了一个范畴。

3.2.2. 设 $X \xrightarrow{f} Y$ 是 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的一个对象，则 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的态射（作用在 f 上的函子）：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (3.2.2.1)$$

通过函子锥的作用提供了一个 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射 (3.1.7)，对 $X \xrightarrow{f} Y$ 有函子性：

$$q(f) : c(f) \rightarrow X[1] \quad (3.2.2.2)$$

同样地， $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的态射

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (3.2.2.3)$$

通过函子锥的作用，也得到一个 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射 (3.1.2.4)，对 $X \xrightarrow{f} Y$ 有函子性：

$$p(f) : Y \rightarrow c(f) \quad (3.2.2.4)$$

这样我们把 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的任意一个对象 $X \xrightarrow{f} Y$ 关联到一个 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的三角形：

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p(f)} c(f) \xrightarrow{q(f)} X[1] \quad (3.2.2.5)$$

注意到这个三角形不需要用到 $X \xrightarrow{f} Y$ 在 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的函子性。事实上, 设 $D = (g, h, a) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$ 是 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的一个态射, 于是我们得到以下图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p(f)} & c(f) & \xrightarrow{q(f)} & X[1] \\
 g \downarrow & & \nearrow a & & \downarrow c(D) & & \downarrow g[1] \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{p(f')} & c(f') & \xrightarrow{q(f')} & X'[1]
 \end{array} \quad (3.2.2.6)$$

态射 $p(f)$ 和 $q(f)$ 对于 f 是函子性的, 这说明上图中最后两个方形是交换的, 但第一个方形只是在同伦意义下是交换的。因此我们通过同伦意义下的商, 将 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象 $X \xrightarrow{f} Y$ 关联到 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的一个三角形:

$$X \xrightarrow{\dot{f}} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1] \quad (3.2.2.7)$$

这对于 $X \xrightarrow{f} Y$ 是函子性的。(这里 $\dot{f}, \dot{p}(f), \dot{q}(f)$ 分别为态射 $f, p(f), q(f)$ 在模去同伦意义下的类。) 这样我们得到了从范畴 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 到 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的三角形的一个函子。

3.2.3. $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的平移函子自然地得到一个自同构 $T : \text{tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \text{tr}_1(\mathcal{C})$:

$$T(X \xrightarrow{f} Y) = X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1] \quad (3.2.3.1)$$

$$T((g, h, a)) = (g[1], h[1], -a[1])$$

于是我们可以给态射锥一个 $\mathbb{Z}$ -范畴 (1.5.2) 的结构, 通过定义一个同构 $\Psi(f) : c(f[1]) \xrightarrow{\sim} c(f)[1]$:

$$\Psi(f)^i = \begin{pmatrix} \text{id}_{Y^{i+1}} & 0 \\ 0 & -\text{id}_{X^{i+2}} \end{pmatrix} : Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \rightarrow Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \quad (3.2.3.2)$$

读者可以证明式 (3.2.3.2) 确实定义了一个复形的同构且具有以下性质:

命题 3.2.4. 当 $f = 0 \rightarrow Y$ 时, 以下典范同构

$$c(f[n]) \xrightarrow{\sim} c(f)[n]$$

就是 $Y[n]$ 的恒同映射。当 $f = X \rightarrow 0$ 时, 典范同构

$$c(f[n]) \xrightarrow{\sim} c(f)[n]$$

就是以下同构:

$$X[n+1] \xrightarrow{(-1)^n \text{id}_{X[n+1]}} X[n+1]$$

3.2.5. 设 $X \xrightarrow{f} Y$ 为 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象, 它能被关联到 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的三角形:

$$Y \xrightarrow{p(f)} c(f) \xrightarrow{q(f)} X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1] \quad (3.2.5.1)$$

这里态射 $q(f)p(f) : Y \rightarrow X[1]$ 是由以下态射的函子锥转化得到的:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

从而为零。因此，由函子锥的加性 (3.1.3) 知存在唯一的态射

$$J : c(p(f)) \rightarrow X[1] \quad (3.2.5.2)$$

使得以下图表

$$\begin{array}{ccc} c(f) & \xrightarrow{p(p(f))} & c(p(f)) \\ \text{id}_{c(f)} \downarrow & & \downarrow J \\ c(f) & \xrightarrow{q(f)} & X[1] \end{array} \quad (3.2.5.3)$$

是交换的而且 $Ja(p(f)) = 0$ (3.1.2.4)。

命题 3.2.6. *a)* 态射 J 是一个同伦，即在同伦意义下是同构。

b) 以下图表

$$\begin{array}{ccc} c(p(f)) & \xrightarrow{q(p(f))} & Y[1] \\ J \downarrow & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ X[1] & \xrightarrow{f[1]} & Y[1] \end{array} \quad (3.2.6.1)$$

在同伦意义下是交换的。

3.2.7. 证明. 首先，我们将建立一个态射 $H : X[1] \rightarrow c(p(f))$ 。只需构造一个这两个对象所表示的函子之间的态射。设 w 为 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的一个对象。考虑到锥函子的伴随性质 (3.1.3)，一个从 $c(p(f))$ 到 w 的态射正是一个对 (u, a) ，其中 $u : c(f) \rightarrow w$ 为一个复形的态射，而 $a : 0 \rightsquigarrow up(f)$ 为一个同伦。再使用一次

(3.1.3), 我们看到一个从 $c(p(f))$ 到 W 的态射正是一个三对 $(m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf)$. 将这个三对关联到以下图表:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W \end{array} \quad \alpha = b - a \star f \quad (3.2.7.1)$$

即一个从 $X[1]$ 到 W 的态射 ((3.1.3) 和 (3.1.7)). 于是, 对于 W 为函子性地, 我们将一个从 $c(p(f))$ 到 W 的态射关联到了一个从 $X[1]$ 到 W 的态射, 从而定义了一个态射 $H : X[1] \rightarrow c(p(f))$. 为了证明命题 (3.2.6) 的 $a)$, 只需证明以下:

$$\text{态射 } JH : X[1] \rightarrow X[1] \text{ 是恒同} \quad (3.2.7.2)$$

$$\text{态射 } HJ : c(p(f)) \rightarrow c(p(f)) \text{ 同伦与恒同} \quad (3.2.7.3)$$

为了证明命题 (3.2.6) 的 $a)$, 只需证明以下:

$$\begin{array}{ccc} X[1] & \xrightarrow{f[1]} & Y[1] \\ \text{图表 } H \downarrow & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ c(p(f)) & \xrightarrow{q(p(f))} & Y[1] \end{array} \text{ 是反交换的} \quad (3.2.7.4)$$

3.2.8. 断言 (3.2.7.2) 的证明.

要证明态射 $JH : X[1] \rightarrow X[1]$ 是恒同, 只需证明态射 JH 诱导由 $X[1]$ 所表示的函子的恒同自同构。根据 (3.1.3) 和 (3.1.7), 函子

$$W \mapsto \text{Hom}_{\text{comp}(\mathcal{C})}(X[1], W)$$

正是函子

$$W \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array} \right\}. \quad (3.2.8.1)$$

另一方面, 根据 (3.2.7), $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的对象 $c(p(f))$ 表示的函子为:

$$W \mapsto \{(m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf)\}. \quad (3.2.8.2)$$

我们可以立刻验证, 态射 $J : c(p(f)) \rightarrow X[1]$ 对应到以下函子态射:

$$D = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array} \mapsto JD = (0 : Y \rightarrow W, 0 : 0 \rightsquigarrow 0, \alpha : 0 \rightsquigarrow 0) \quad (3.2.8.3)$$

而由定义 (3.2.7), 态射 $H : X[1] \rightarrow c(p(f))$ 对应函子态射:

$$t = (m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf) \mapsto Ht = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array}, \alpha = b - a \star f \quad (3.2.8.4)$$

这两个函子态射的复合于是恒同, 这就证明了断言 (3.2.7.2)

3.2.9. 断言 (3.2.7.3) 的证明.

根据 (3.2.8), 态射 $HJ : c(p(f)) \rightarrow c(p(f))$ 对应以下函子态射

$$t = (m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf) \mapsto$$

$$HJt = (0 : Y \rightarrow W, 0 : 0 \rightsquigarrow 0, b - a \star f : 0 \rightsquigarrow 0) \quad (3.2.9.1)$$

因此

$$t - HJt = (m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf). \quad (3.2.9.2)$$

为了证明断言 (3.2.7.3), 只需证明所有形如 $(m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf)$ 的三对对应于一个从 $c(p(f))$ 到 W 的同伦于零的一个态射。使用 (3.1.3), 这样的三对定义了一个态射:

$$v : c(f) \rightarrow W \quad v = (m : Y \rightarrow W, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf) \quad (3.2.9.3)$$

和一个同伦

$$a : 0 \rightsquigarrow vp(f) = m, \quad (3.2.9.4)$$

其中图表

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p(f)} & c(f) \\ \downarrow & \nearrow a & \downarrow v \\ 0 & \xrightarrow{w} & W \end{array} \quad (3.2.9.5)$$

通过 (3.1.3) 定义了一个态射 $n : c(p(f)) \rightarrow W$ 关联到三对 $(m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf)$. 为了证明态射 n 同伦于零, 只需 (3.1.5) 证明图表 (3.2.9.5) 是 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中同伦于零的态射, 为此, 只需证明存在一个同伦 $\beta : 0 \rightsquigarrow v$ 使得 $\beta \star p(f) = a$. 既然态射 $v : c(f) \rightarrow W$ 有分量:

$$v^i = (m^i, a^i f^{i+1}) : Y^i \oplus X^{i+1} \rightarrow W^i \quad (3.2.9.6)$$

而我们立即验证同伦 β 其分量

$$\beta^i = (a^i, 0) : Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \rightarrow W^i \quad (3.2.9.7)$$

连接 0 到 v 且使得 $\beta \star p(f) = a$. 这就完成了断言 (3.2.7.3) 的证明。

3.2.10. 断言 (3.2.7.4) 的证明.

对象 $Y[1]$ 表示了函子

$$W \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array} \right\} \quad (3.2.10.1)$$

而态射 $f[1] : X[1] \rightarrow Y[1]$ 表示了函子态射

$$D = \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array} \mapsto f[1]D = \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha \star f & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array} \quad (3.2.10.2)$$

类似地, 态射 $q(p(f)) : c(p(f)) \rightarrow Y[1]$ 表示了函子态射

$$D = \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array} \mapsto q(p(f))D = (0 : Y \rightarrow W, \alpha : 0 \rightsquigarrow 0, 0 : 0 \rightsquigarrow 0). \quad (3.2.10.3)$$

于是, 使用 (3.2.8.4), 为了证明 (3.2.7.4), 只需证明对任意图表

$$D = \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{W} & W \end{array}$$

我们有 $Hq(p(f))D + f[1]D = 0$.

3.2.11. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的两个态射, 设 $gf = h$ 。从中我们可以得到两个交换图表:

$$D = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Z \end{array}, \quad D' = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow \text{id}_Z \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad (3.2.11.1)$$

而我们把他们看作 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的两个态射。从而通过锥函子作用, 得到两个图表:

$$I = \begin{array}{ccc} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \downarrow p(f) & & \downarrow p(h) \\ c(f) & \xrightarrow{c(D)} & c(h) \end{array} \quad (3.2.11.2)$$

其中后一个图表是交换图表 (3.2.2.5) 从而可以看作 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的一个态射, 进而可以通过锥函子作用得到一个态射:

$$c(I) : c(g) \rightarrow c(c(D)) \quad (3.2.11.3)$$

命题 3.2.12. a) 态射 $c(I) : c(g) \rightarrow c(c(D))$ 是一个同伦。

b) 图表

$$\begin{array}{ccc} & c(g) & \\ c(D') \nearrow & \downarrow c(I) & \\ c(h) & \xrightarrow{p(c(D))} & c(c(D)) \end{array} \quad (3.2.12.1)$$

在同伦意义下是交换的。

c) 以下图表

$$\begin{array}{ccc}
 c(g) & \xrightarrow{q(g)} & Y[1] \\
 c(I) \downarrow & & \downarrow p(f)[1] \\
 c(c(D)) & \xrightarrow{q(c(D))} & c(f)[1]
 \end{array} \quad (3.2.12.2)$$

是交换的。

事实上，简单的计算得到 $c(I)$ 的第 i 个分量为

$$c(I)^i = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : Z^i \oplus Y^{i+1} \rightarrow Z^i \oplus X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \quad (3.2.12.3)$$

而态射 $u : c(c(D)) \rightarrow c(g)$ 的分量为：

$$u^i = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{i+1} & \text{id} & 0 \end{pmatrix} : Z^i \oplus X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \rightarrow Z^i \oplus Y^{i+1} \quad (3.2.12.4)$$

是 $c(I)$ 的同伦逆，这就得到了第一个论断。而对于第二个论断，只需验证以下图表

$$\begin{array}{ccc}
 & c(D') & \nearrow c(g) \\
 c(h) & \xrightarrow{p(c(D))} & c(c(D)) \xrightarrow{u}
 \end{array} \quad (3.2.12.5)$$

是交换的。而这通过对每个分量进行计算即可得到。最后，根据 (3.2.2)，态射 $q(f)$ 的函子性 (3.2.2.2) 立即得到图表 (3.2.12.2) 是交换的。

3.3. 特异三角形的性质

定义 3.3.1. $\kappa(\mathcal{C})$ 中的三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 被称为特异的, 如果存在 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象 $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\dot{p}(f')} c(f') \xrightarrow{\dot{q}(f')} X'[1]$ 使得有三角形的同构 ((3.2.1.3) 和 (3.2.2.7)):

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow \sim & & g \downarrow \sim & & h \downarrow \sim & & \sim \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{\dot{p}(f')} & c(f') & \xrightarrow{\dot{q}(f')} & X'[1] \end{array}$$

命题 3.3.2 (TRI). 与 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的一个特异三角形同构的三角形是一个特异三角形。对于 $\kappa(\mathcal{C})$ 中任意一个对象 X , 三角形 $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ 是特异三角形。对任意 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的态射 $u: X \rightarrow Y$ 蕴含着一个特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

第一个断言是平凡的。对于第二个断言, 只需验证以下的图表

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \mathrm{id}_X \downarrow & & \mathrm{id}_X \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id}_{X[1]} \\ X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X & \xrightarrow{\dot{p}(\mathrm{id}_X)} & c(\mathrm{id}_X) & \xrightarrow{\dot{q}(\mathrm{id}_X)} & X[1] \end{array}$$

是 $\kappa(\mathcal{C})$ 中三角形的同构。从而只需验证 $c(\mathrm{id}_X)$ 与零同伦。这从 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的三角形的同伦的定义 (3.1.4) 立即得出对 $\mathrm{tr}_1(\mathcal{C})$

中的态射

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \downarrow & \nearrow a & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & W \end{array}$$

与零同伦。由锥函子的伴随函子的性质 (3.1.6) 便得到 $c(\text{id}_X)$ 与零同伦。设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射与 $u: X \rightarrow Y$ 在同一个同伦类内, 我们得到 $\text{Tr}_1(\mathcal{C})$ 中的一个对象 $X \xrightarrow{f} Y$. 则特异的三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1]$ 包含态射 u .

命题 3.3.3 (TRII). $\kappa(\mathcal{C})$ 中的三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是特异的当且仅当三角形 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ 是特异的。

假设三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是特异的。则它同构与一个三角形

$$X' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X'[1]$$

这里 $X' \xrightarrow{f} Y'$ 是 $\text{Tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象。故只需证明三角形

$$Y' \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X'[1] \xrightarrow{-f[1]} Y'[1]$$

是特异的。此外 (3.2.6), 以下图表

$$\begin{array}{ccccccc} Y' & \xrightarrow{\dot{p}(f)} & c(f) & \xrightarrow{\dot{p}(p(f))} & c(p(f)) & \xrightarrow{\dot{q}(p(f))} & Y'[1] \\ \text{id}_{Y'} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{c(f)} & & \downarrow j & & \downarrow \text{id}_{Y'[1]} \\ Y' & \xrightarrow{\dot{p}(f)} & c(f) & \xrightarrow{\dot{q}(f)} & X'[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y'[1] \end{array}$$

是 $\kappa(\mathcal{C})$ 中三角形的同构。现在假设三角形 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y$ 是特异的, 由 (3.2.4) 得到三角形

$$Y[-1] \xrightarrow{v[-1]} Z[-1] \xrightarrow{w[-1]} X \xrightarrow{u} Y$$

是特异的。使用两次之前的结论便得到三角形

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

是特异的, 这就得到了这个论断。

命题 3.3.4 (TRIII). 设 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1], X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ 是两个 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的特异三角形, 而

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ m \downarrow & & \downarrow n \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array} \quad (3.3.4.1)$$

在 $\kappa(\mathcal{C})$ 中是交换的。则存在态射 $r: Z' \rightarrow Z$ 使得图表

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \\ m \downarrow & & \downarrow n & & \downarrow r & & \downarrow m[1] \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \end{array}$$

是三角形的态射。

由定义, 上面的两个三角形同构于三角形

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} V[1]$$

$$V' \xrightarrow{f'} W' \xrightarrow{\dot{p}(f')} c(f') \xrightarrow{\dot{q}(f')} V'[1]$$

于是, 方形 (3.3.4.1) 同构于以下方形:

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f'} & W' \\ \dot{g} \downarrow & & \downarrow \dot{g}' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

这里 $g : V' \rightarrow V$ 和 $g' : W' \rightarrow W$ 是 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射。下面 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f'} & W' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

在同伦意义下是交换的。设 $a : fg \rightsquigarrow g'f'$ 是一个同伦, 则图表

$$D = \begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f'} & W' \\ \downarrow g & \nearrow a & \downarrow g' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

是 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ 中的态射。从 (3.2.2.7) 得到以下图表

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \xrightarrow{f'} & W' & \xrightarrow{\dot{p}(f')} & c(f') & \xrightarrow{\dot{q}(f')} & V'[1] \\ \dot{g} \downarrow & & \downarrow \dot{g}' & \dot{c}(D) \downarrow & & & \downarrow \dot{g}[1] \\ V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\dot{p}(f)} & c(f) & \xrightarrow{\dot{q}(f)} & V[1] \end{array}$$

是 $\kappa(\mathcal{C})$ 中三角形的态射。这就证明了态射 $r : Z' \rightarrow Z$ 的存在性。

命题 3.3.5 (TRIV). 设

$$\begin{array}{ccc} & X_2 & \\ u_3 \nearrow & & \searrow u_1 \\ X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 \end{array}$$

在 $\kappa(C)$ 中是交换的, 则存在三个特异三角形:

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1]$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1]$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1]$$

和两个态射

$$m_2 : Z_3 \rightarrow Z_2$$

$$m_3 : Z_2 \rightarrow Z_1$$

使得 a) 以下图表

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{u_3} & X_2 & \xrightarrow{v_3} & Z_3 & \xrightarrow{w_3} & X_1[1] \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow u_1 & & \downarrow m_1 & & \downarrow \text{id} \\ X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 & \xrightarrow{v_2} & Z_2 & \xrightarrow{w_2} & X_1[1] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 & \xrightarrow{v_2} & Z_2 & \xrightarrow{w_2} & X_1[1] \\ u_3 \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \downarrow m_3 & & \downarrow u_3[1] \\ X_2 & \xrightarrow{u_1} & X_3 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \xrightarrow{w_1} & X_2[1] \end{array}$$

是三角形的交换图表。

b) 三角形

$$Z_3 \xrightarrow{m_1} Z_2 \xrightarrow{m_3} Z_1 \xrightarrow{v_3[1]w_1} Z_3[1]$$

是特异三角形。

设 $f: X_1 \rightarrow X_2$ (对应地, $g: X_2 \rightarrow X_3$) 是 $\text{comp}(C)$ 中在类 u_3 (对应地, u_1) 中的态射。令 $h = gf: X_1 \rightarrow X_3$, 态射 h 在类 u_2 内。要证明该性质, 只需证明对任意特异三角形

$$X_1 \xrightarrow{\dot{f}} X_2 \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X_1[1]$$

$$X_2 \xrightarrow{\dot{g}} X_3 \xrightarrow{\dot{p}(g)} c(g) \xrightarrow{\dot{q}(g)} X_2[1]$$

$$X_1 \xrightarrow{\dot{h}} X_3 \xrightarrow{\dot{p}(h)} c(h) \xrightarrow{\dot{q}(h)} X_1[1]$$

和对应态射, 以下态射

$$c(D): c(f) \rightarrow c(h), \quad c(D'): c(h) \rightarrow c(g)$$

这里 D 和 D' 是以下图表

$$D = \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow g \\ X_1 & \xrightarrow{h} & X_3 \end{array}, \quad D' = \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ X_2 & \xrightarrow{g} & X_3 \end{array}$$

事实上, 第一个假设由 (3.2.2), 然后由性质 (3.2.12) 立即得到存在态射 $c(I): c(g) \rightarrow c(c(D))$ 使得以下图表

$$\begin{array}{ccccccc} c(f) & \xrightarrow{\dot{c}(D)} & c(h) & \xrightarrow{\dot{c}(D')} & c(g) & \xrightarrow{\dot{p}(f)[1]\dot{q}(g)} & c(f)[1] \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \dot{c}(I) \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ c(f) & \xrightarrow{\dot{c}(D)} & c(h) & \xrightarrow{\dot{p}(c(D))} & c(c(D)) & \xrightarrow{\dot{q}(c(D))} & c(f)[1] \end{array}$$

是三角形的同构。

3.3.6. 设 $F : \mathcal{J} \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ 是一个函子。定义 $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ 为由 $\mathcal{J}$ 中的 n 个可结合的态射组成的范畴，其中的元素为 $\mathcal{J}$ 中的图表：

$$i_1 \xrightarrow{f_1} i_2 \xrightarrow{f_2} i_3 \cdots \xrightarrow{f_n} i_{n+1}$$

设 (i_p, f_p) 和 (j_p, g_p) 为两个 $\mathcal{J}$ 中可结合的态射，则 $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ 中从 (i_p, f_p) 到 (j_p, g_p) 的态射是一个交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} i_1 & \xrightarrow{f_1} & i_2 & \xrightarrow{f_2} & i_3 & \xrightarrow{f_3} & \cdots \xrightarrow{f_n} i_{n+1} \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_{n+1} \\ j_1 & \xrightarrow{g_1} & j_2 & \xrightarrow{g_2} & j_3 & \xrightarrow{g_3} & \cdots \xrightarrow{g_n} j_{n+1} \end{array}$$

其中态射的复合以显然的方式。定义集合 $\text{Fl}_n(\mathcal{J})$ 为 $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ 中的对象。设 $i \xrightarrow{f} j$ 为 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J})$ 中的对象，通过函子 F 的作用，我们得到 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射

$$F(i) \xrightarrow{F(f)} F(j)$$

然后把它看作 $\text{Tr}_1(\mathcal{C})$ 中的对象，通过锥函子的作用，得到一个函子 $S : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C})$ ：

$$S(f) = S(i \xrightarrow{f} j) = c(F(i) \xrightarrow{F(f)} F(j)) \quad (3.3.6.1)$$

设 $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ 是 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的对象，它可以对应到 $\text{Tr}_1(\mathcal{C})$ 中的下

列图表：

$$\begin{array}{ccc}
 F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow F(g) \\
 F(i) & \xrightarrow{F(gf)} & F(k) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 F(j) & \xrightarrow{F(g)} & F(k)
 \end{array} \quad (3.3.6.2)$$

令

$$\delta(f, g) : S(g) \rightarrow S(f)[1] \quad (3.3.6.3)$$

$$\delta(f, g) = \dot{p}(F(f))[1]\dot{q}(F(g))$$

我们有，将锥函子应用到图 (3.3.6.2)，得到一个从 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{T})$ 到由 $\kappa(\mathcal{C})$ 的三角形的范畴的函子：

$$(i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k) \mapsto S(f) \rightarrow S(gf) \rightarrow S(g) \xrightarrow{\delta(f, g)} S(f)[1] \quad (3.3.6.4)$$

最后由 (3.3.5) 的论证得到以下三角形

$$S(f) \rightarrow S(gf) \rightarrow S(g) \xrightarrow{\delta(f, g)} S(f)[1]$$

是一个特异三角形。

3.4. 特异三角形的函子性质

命题 3.4.1. 设 $\iota_1 : \kappa(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \kappa(\mathcal{C}^\circ)$ 是 (2.5.13) 中的典范同构，

$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的一个特异三角形。则 $\kappa(\mathcal{C}^\circ)$ 中的

三角形

$$(\iota_1 X)[-1] \xrightarrow{\iota_1 w} \iota_1 Z \xrightarrow{\iota_1 v} \iota_1 Y \xrightarrow{-\iota_1 u} \iota_1 X$$

是特异的。

我们总可以假设 (3.3.1) 该三角形具有形式

$$X \xrightarrow{\dot{f}} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1]$$

这里 $f : X \rightarrow Y$ 是 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的态射。只需证明以下三角形

$$(\iota_1 X)[1] \xrightarrow{\iota_1 \dot{q}(f)} \iota_1 c(f) \xrightarrow{\iota_1 \dot{p}(f)} \iota_1 Y \xrightarrow{-(\iota_1 f)} \iota_1 X$$

是特异的 ($\iota_1 f$ 是 $\iota_1 : \text{comp}(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C}^\circ)$ 作用在 f 下的像)。由 ι_1 (2.4.1) 和锥函子 (3.1.2) 的定义立即得到复形 $\iota_1 c(f)$ 的组成和微分分别为

$$\begin{aligned} \iota_1 c(f)^i &= (\iota_1 X)^{i-1} \oplus (\iota_1 Y)^i \\ d_{\iota_1 c(f)}^i &= \begin{pmatrix} -d_{\iota_1 X}^{i-1} & (\iota_1 f)^i \\ 0 & d_{\iota_1 Y}^i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.1.1)$$

因此我们有等式

$$\iota_1 c(f) = c(\iota_1 f)[-1]$$

而容易验证图表

$$\begin{array}{ccccccc} (\iota_1 X)[-1] & \xrightarrow{\iota_1 \dot{q}(f)} & \iota_1 c(f) & \xrightarrow{\iota_1 \dot{p}(f)} & \iota_1 Y & \xrightarrow{-\iota_1 f} & \iota_1 X \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (\iota_1 X)[-1] & \xrightarrow{\dot{p}(-\iota_1 f)[-1]} & c(-\iota_1 f)[-1] & \xrightarrow{\dot{q}(\iota_1 f)[-1]} & \iota_1 Y & \xrightarrow{-\iota_1 f} & \iota_1 X \end{array}$$

是交换的。故只需用 (3.3.3) 即可得到所要的构造。

3.4.2. 设 $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ 为多重加性的函子，并设对于这个下标， $\mathcal{C}$ 中有有限直积。记

$$\mathbf{K}_{\Pi} F : \prod_{i \in [n]} \mathbf{K}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$$

为 F 在复形的同伦意义下的 Π -扩张且

$$p_i : \mathbf{K}_{\Pi} F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \rightarrow \mathbf{K}_{\Pi} F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1]$$

为典范函子同构。

设 $j \in [n]$ 且对任意 $i \neq j$ ， X_i 为 $\mathbf{K}(\mathcal{C}_i)$ 的一个对象。定义 $G : \mathbf{K}(\mathcal{C}_j) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$ 为函子

$$X \mapsto G(X) = \mathbf{K}_{\Pi} F(X_1, \dots, X, \dots, X_n), \quad (3.4.2.1)$$

且 $m : G(X[1]) \xrightarrow{\sim} G(X)[1]$ 为通过 p_j 诱导函子同构。

命题 3.4.3. 对于 $\mathbf{K}(\mathcal{C}_j)$ 中的特异三角形

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

$\mathbf{K}(\mathcal{C})$ 中的三角形

$$G(X) \xrightarrow{G(u)} G(Y) \xrightarrow{G(v)} G(Z) \xrightarrow{mG(w)} G(X)[1]$$

也是特异三角形。

首先，我们可以假设 $\kappa(\mathcal{C}_j)$ 中的特异三角形有 (3.3.1) 的样子：

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\hat{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\hat{q}(f)} X[1],$$

其中 $f : X \rightarrow Y$ 为 $\text{comp}(\mathcal{C}_j)$ 中的态射。定义

$$H : \text{comp}(\mathcal{C}_j) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$$

为函子

$$X \mapsto H(X) = \text{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, X, \dots, X_n)$$

且 $m : H(X[1]) \xrightarrow{\sim} H(X)[1]$ 为和 j 方向上的平移相容的函子同构。于是函子 (G, m) 为函子 (H, m) 传递到同伦复形的结果。为了证明命题，只需证明存在 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 中的复形同构

$$J : H(c(f)) \xrightarrow{\sim} c(H(f))$$

使得下面图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccccc} H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) & \xrightarrow{H(p(f))} & H(c(f)) & \xrightarrow{H(q(f))} & H(X[1]) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow J & & \downarrow m \\ H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) & \xrightarrow{p(H(f))} & c(H(f)) & \xrightarrow{q(H(f))} & H(X)[1] \end{array} \quad (3.4.3.1)$$

对于复形 X ，定义 $\bar{X}$ 为复形，其组成和 X 相同，而微分为零。由 H 的定义立即得到等式 $\overline{H(X)} = H(\bar{X})$ 。类似地，对于复形态射 $f : X \rightarrow Y$ 定义 $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ 为保持 f 的组成的态射。由

锥函子的定义立即得到 $\overline{c(f)} = \overline{Y} \oplus \overline{X[1]}$ 且态射 $\overline{p(f)} : \overline{Y} \rightarrow \overline{c(f)}$ 是第一分量的单射, $\overline{q(f)} : \overline{c(f)} \rightarrow \overline{X[1]}$ 是第二分量上的投射。函子 H 和 “ $-$ ” 都是加性的, 于是得到 $\overline{H(c(f))} = \overline{H(Y)} \oplus \overline{H(X[1])}$ 且态射 $\overline{H(p(f))} : \overline{H(Y)} \rightarrow \overline{H(c(f))}$ 是第一分量的嵌入, $\overline{H(q(f))} : \overline{H(c(f))} \rightarrow \overline{H(X[1])}$ 是第二分量上的投射。于是有

$$\begin{aligned} H(c(f))^l &= H(Y)^l \oplus H(X[1])^l, \\ d_{H(c(f))}^l &= \begin{pmatrix} d_{H(Y)}^l & \Phi^l \\ 0 & d_{H(X[1])}^l \end{pmatrix}, \\ \Phi^l &: H(X[1])^l \rightarrow H(Y)^{l+1}. \end{aligned} \quad (3.4.3.2)$$

$H(c(f))$ 的微分有这个表达仅仅因为 $H(p(f))$ 和 $H(q(f))$ 是复形的态射。为了计算 Φ^l , 需要回到函子 H 的定义以及关联单复形的函子的定义 (2.2.2.5)。我们有

$$\begin{aligned} H(X[1])^l &= \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, X^{l_j+1}, X_n^{l_n}), \\ H(Y)^{l+1} &= \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, Y^{l_j+1}, X_n^{l_n}), \\ \Phi^l &= \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} \varepsilon(\sigma, j) F(X_1^{l_1}, \dots, f^{l_j+1}, X_n^{l_n}). \end{aligned} \quad (3.4.3.3)$$

另一方面，由锥函子的定义有：

$$\begin{aligned} c(H(f))^l &= H(Y)^l \oplus (H(X)[1])^l, \\ d_{c(H(f))}^l &= \begin{pmatrix} d_{H(Y)}^l & H(f)^{l+1} \\ 0 & d_{H(X)[1]}^l \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4.3.4)$$

其中态射 $H(f)$ 由 (2.4.2.6)，(2.4.2.3) 和 (2.2.2.6) 定义：

$$H(f)^{l+1} = \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, f^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}). \quad (3.4.3.5)$$

于是记

$$\begin{aligned} J^l : H(Y)^l \oplus H(X[1])^l &\rightarrow H(Y)^l \oplus (H(X)[1])^l, \\ J^l &= \begin{pmatrix} \text{id}_{H(Y)^l} & 0 \\ 0 & \Psi^l \end{pmatrix}, \\ \Psi^l &= \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} \varepsilon(\sigma, j) \text{id}_{F(X_1^{l_1}, \dots, X^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n})}. \end{aligned} \quad (3.4.3.6)$$

为了验证 J^l 是复形态射的组成，只需验证

$$\begin{aligned} \Phi^l &= H(f)^{l+1} \Psi^l, \\ \Psi^l d_{H(X[1])}^l &= d_{H(X)[1]}^l \Psi^l. \end{aligned} \quad (3.4.3.7)$$

为了验证图表 (3.4.3.1) 是交换的，只需验证

$$\Psi^l = m^l. \quad (3.4.3.8)$$

(3.4.3.7) 的第一个等式是明显的 ((3.4.3.3) 和 (3.4.3.5))。
(3.4.3.7) 的第二个等式由 (3.4.3.8) 得到。为了验证 (3.4.3.8),
只需回忆 m 的定义 (2.3.2.1)。

3.4.4. 当 c 中有限直和存在的时候, 性质 (3.4.3) 对函子 $\kappa_{\Sigma} F$ 也成立。而这只需将 (3.4.3) 中的构造中的积换成和即可。

第二章 剖分范畴

1. 定义和基础性质

1.1. 剖分范畴的定义

定义 1.1.1. 一个剖分范畴 $\mathcal{D}$ 是一个严格加性 (第一章??) 的 $\mathbb{Z}$ -范畴和一些三角形 (第一章3.2.1) 的集合, 被称作特异三角形, 具有以下性质:

TRI 与 $\mathcal{D}$ 中特异三角形同构的三角形是特异三角形。对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 X , 三角形 $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ 是特异三角形。对任意 $\mathcal{D}$ 中的态射 $u: X \rightarrow Y$, 存在一个特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

TRII $\mathcal{D}$ 中的三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是特异三角形当且仅当三角形 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ 是特异的。

TRIII 对任意一对特异三角形

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$$

和交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

存在态射 $h: Z \rightarrow Z'$ 使得 (f, g, h) 是三角形的态射，即使得以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

TRIV 对任意交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & X_2 & & u_1 \\ & u_3 \nearrow & & \searrow & \\ X_1 & \xrightarrow{u_2} & & & X_3 \end{array}$$

和三个特异三角形

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1]$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1]$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1]$$

存在两个态射

$$m_1 : Z_3 \rightarrow Z_2$$

$$m_3 : Z_2 \rightarrow Z_1$$

使得 $(\mathrm{id}_{X_1}, u_1, m_1)$ 和 $(u_3, \mathrm{id}_{X_3}, m_3)$ 是三角形的态射, 而且以下三角形

$$Z_3 \xrightarrow{m_1} Z_2 \xrightarrow{m_3} Z_1 \xrightarrow{v_3[1]w_1} Z_3[1]$$

是特异的。

注 1.1.2. 设 (X, Y, Z, u, v, w) 是一个特异三角形, 从 TRII 知道以下无限序列

$$\cdots \rightarrow X[n] \xrightarrow{(-1)^n u[n]} Y[n] \xrightarrow{(-1)^n v[n]} Z[n] \xrightarrow{(-1)^n w[n]} X[n+1]$$

中连续三个态射构成一个特异三角形。 $\mathcal{D}$ 中的同构 $: X \mapsto X[n]$ 称作平移同构。

定义 1.1.3. 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是两个特异三角形, 从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}'$ 的正合函子是一个 $\mathbb{Z}$ -函子 (不一定是严格的) (第一章1.2.4) $_{(F,p)} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ 使得对任意 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

三角形

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{p(X)Fw} (FX)[1]$$

是特异的。

定义 1.1.4. 设 $\mathcal{D}_i, 1 \leq i \leq n$ 和 $\mathcal{D}$ 是 $n+1$ 个剖分范畴, 一个从 $\prod_i \mathcal{D}_i$ 到 $\mathcal{D}$ 的多正合函子是一个 $\mathbb{Z}^n$ -函子 (第一章1.4.4) $_{(F,p)}: \prod_i \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{D}$ 使得对任意范畴 $\mathcal{D}_i, i \neq j$ 中的对象 X_i , $\mathbb{Z}$ -函子

$$X \mapsto F(X_1, \dots, X, \dots, X_n): \mathcal{D}_j \rightarrow \mathcal{D}$$

是正合函子。

1.1.4.1. 从定义 (1.1.4) 知道, 范畴 $\prod_i \mathcal{D}_i$ 有一个典范的 $\mathbb{Z}^n$ -结构。而群 $\mathbb{Z}^n$ 通过同态 $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, 将各分量求和 (第一章??), 作用在范畴 $\mathcal{D}$ 上。

1.1.4.2. 根据符号规则 I(第一章??), 除非另有说明, 多正合函子将是由关联到 $\mathbb{Z}^n$ 的典范基 $e_1, \dots, e_n$ 扭成的 Koszul 上闭链 (第一章??) 得到的。特别地, 这意味着由 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}'$ 的正合函子是由平凡上闭链扭成的。

定义 1.1.5. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴而 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 函子 $H: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ 被称作上同调函子, 如果对任意特异三角形

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

有图表

$$HX \xrightarrow{Hu} HY \xrightarrow{Hv} HZ \xrightarrow{Hw} H(X[1])$$

在 $\mathcal{A}$ 中是正合的。

我们将在 (1.2.7) 中看到上同调函子是加性的，而多正合函子是多加性的。

设 $H: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ 是一个上同调函子，我们常常使用更简单的记号 $H^0(X) = H(X)$, $H^n(X) = H(X[n])$ 。由 TRII 知道，将上同调函子作用在特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 上，将得到长正合列

$$\cdots \rightarrow H^{-1}(Z) \xrightarrow{H^{-1}(-w)} H^0(X) \xrightarrow{H^0(u)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(v)} H^0(Z) \xrightarrow{H^0(w)} \cdots \quad (1.1.5.1)$$

1.1.6. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴，下面的术语会经常使用：一个 $\mathcal{D}$ 中的三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 被称作反特异的，如果三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} X[1]$ 是特异的。一个从 $\mathcal{D}'$ 到 $\mathcal{D}$ 的 $\mathbb{Z}$ -函子被称作反正合的，如果它将 $\mathcal{D}'$ 中的特异三角形变成 $\mathcal{D}$ 中的反特异三角形。常常，为了描述一个从 $\mathcal{D}'$ 到 $\mathcal{D}$ 的正合函子，我们常常省略平移的同构的记号。

1.1.7. 设 c 是一个严格的 $\mathbb{Z}$ -范畴 (第一章1.2.2)，而

$$X \mapsto X[n], n \in \mathbb{Z}$$

是 c 中的转移函子。设 c° 是反 $\mathbb{Z}$ -范畴 (第一章1.3.9)。对任意 c 中的态射 u ，用记号 $((u))$ 表示对应 c° 中的态射。这个记号是滥用的，因为 c° 中的对象的全体与态射的全体与 c 中对象的全体和态射的全体分别相等。用

$$X \mapsto X[[n]], n \in \mathbb{Z}$$

表示 c° 中的平移函子。注意到对 c 中的任意对象 x 和任意 $n \in \mathbb{Z}$ (第一章1.3.9) 有

$$X[-n] = X[[n]]$$

我们称一个剖分范畴 $\mathcal{D}$ 的反剖分范畴是一个与 $\mathcal{D}$ 相反 (第一章1.3.9) 的严格 $\mathbb{Z}$ -范畴 $\mathcal{D}^\circ$ 和一些特异三角形。 $\mathcal{D}^\circ$ 中的三角形

$$X[-1] \xrightarrow{((w))} Z \xrightarrow{((v))} Y \xrightarrow{((u))} X$$

是特异的当且仅当 $\mathcal{D}$ 中对应的三角形

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

是反特异的。容易验证由此定义的特异三角形确实定义了一个剖分范畴。

1.2. 特异三角形的基础性质

命题 1.2.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴。对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 X ，函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, X)$ 是取值为 *Abel* 群的范畴的上同调函子。

只需验证第一个结论：函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot)$ 是一个上同调函子。第二个函子通过考虑反范畴 $\mathcal{D}^\circ$ 即可。设 $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ 是一个特异三角形，只需证明对于以下图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, X') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, u')} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, v')} & \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Z') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, w')} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, X'[1]) \end{array} \quad (1.2.1.1)$$

有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, v') \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, u') = 0$ 且图表在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y')$ 处正合。事实上，由 TRII 便得到在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Z')$ 处的结果。设 $f : X \rightarrow X'$ ，由 TRI，三角形 $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ 是特异的，而由 TRII 和 TRIII 存在一个态射 $g : X \rightarrow Y'$ 使得以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array} \quad (1.2.1.2)$$

于是我们得到 $u'f = g$ 从而 $v'u'f = v'g = 0$ 。这就说明了 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, v') \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, u') = 0$ 。设 $g : X \rightarrow Y'$ 是一个态射使得 $v'g = 0$ ，由 TRII 和 TRIII 知存在态射 $f : X \rightarrow X'$ 使得图表 (1.2.1.2) 是交换的。因此存在 $g = u'f$ ，这就得到了 (1.2.1.1) 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y')$ 处是正合的。

推论 1.2.2. 对于一个特异三角形 $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$, 其相邻两个态射的复合为零。

由 TRII 知只需证明 $v'u' = 0$ 。对此, 只需在式 (1.2.1.1) 中取 $X = X'$ 并考虑 $\text{id}_{X'} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X', X')$ 的像即可。

推论 1.2.3. 设 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X', Y', Z', u', v', w') 是 $\mathcal{D}$ 中的两个特异三角形, 而 (f_1, f_2, f_3) 是三角形的态射, 如果 $f_i, 1 \leq i \leq 3$ 中两个是同构, 则第三个也一样。

不妨假设 $f_1: X \rightarrow X'$ 和 $f_2: Y \rightarrow Y'$ 是同构。对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 W , 有以下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X[1]) & \longrightarrow \\
 & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_1) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_2) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_3) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_4) & \\
 \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Z') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X'[1]) & \longrightarrow
 \end{array}$$

这里每行为正合的, 由五引理得到 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_3)$ 是同构对任意 W 成立, 从而 f_3 是一个同构。该推论的另两个论断由 TRII 知其成立。

推论 1.2.4. 设 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 和 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X[1]$ 是两个特异三角形。则存在同构 $f: Z \xrightarrow{\sim} Z'$ 使得以下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & Z & \\
 & & v \nearrow & & \searrow w \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & & X[1] \\
 & & v' \searrow & f \downarrow \sim & \nearrow w' \\
 & & & Z' &
 \end{array} \quad (1.2.4.1)$$

事实上, 由 TRIII , 存在态射 $f: Z \rightarrow Z'$ 使得图表 (1.2.4.1) 是交换的, 再根据 (1.2.3) 知该同态是同构。

推论 (1.2.4) 说明特异三角形当给定一个态射的时候是唯一的: 它在同构意义下是唯一确定的。但是要注意这个同构不是唯一的, 在 (1.2.12) 中还要说明这一点。

推论 1.2.5. 两个特异三角形的直和是一个特异三角形。

设

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$$

是特异三角形, 而

$$X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{m} L \xrightarrow{n} (X \oplus X')[1]$$

是态射 $u \oplus u'$ 所包含的特异三角形 (TRI)。而图表

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \text{id}_X \\ 0 \end{array} \right) & \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X \oplus X' \end{array} & \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \\ & & \downarrow \left(\begin{array}{c} \text{id}_Y \\ 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{X'} \end{array} \right) & \begin{array}{c} X' \\ \downarrow \\ X \oplus X' \end{array} & \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \\ & & \downarrow \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{Y'} \end{array} \right) \end{array}$$

是交换的，从而 (TRIII) 可以得到交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 \downarrow & \left(\begin{array}{c} \text{id}_X \\ 0 \end{array} \right) & \downarrow & \left(\begin{array}{c} \text{id}_Y \\ 0 \end{array} \right) & \downarrow f & & \downarrow \left(\begin{array}{c} \text{id}_{X[1]} \\ 0 \end{array} \right) \\
 X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{v \oplus v'} & L & \xrightarrow{n} & (X \oplus X')[1]
 \end{array}$$

从而我们得到以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{v \oplus v'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{w \oplus w'} & (X \oplus X')[1] \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow (f, f') & & \downarrow \text{id} \\
 X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{m} & L & \xrightarrow{n} & (X \oplus X')[1]
 \end{array}$$

于是只需说明态射

$$(f, f') : Z \oplus Z' \rightarrow Y$$

是一个同构。而这只需证明对任意对象 M ，态射

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, (f, f'))$$

是 Abel 群的同构。而这立即由 (1.2.1) 和五引理得到。

推论 1.2.6. 设 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个特异三角形使得 $w = 0$ 。则存在 v 的一个截面 $s : Z \rightarrow Y$ 。每个截面 $s : Z \rightarrow Y$ 定义了一个同构：

$$X \oplus Z \xrightarrow[\sim]{(u, s)} Y$$

反之，有以下样式的三角形

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Z \xrightarrow{(0, \text{id})} Z \xrightarrow{0} X[1] \quad (1.2.6.1)$$

是特异的。

第三个论断由 TRI,TRII 和 (1.2.5) 立即得到。对于第一个论断, 由 (1.2.1) 得到对任意 W , 序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Z) \rightarrow 0 \quad (1.2.6.2)$$

是正合的。取 $W = Z$, 我们有 $\text{id}_Z \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, Z)$ 的像得到一个态射 $s: Z \rightarrow Y$, 从而这样的截面是存在的。这个截面得到一个交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} & X \oplus Z & \xrightarrow{(0, \text{id})} & Z \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow (u, s) & & \downarrow \text{id} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

作用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, \cdot)$, 则式 (1.2.6.2) 的正合性和五引理说明态射

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, (u, s)) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X \oplus Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y)$$

是同构, 从而态射 (u, s) 是一个同构。

注 1.2.7. 推论 (1.2.6) 说明任意正合函子 $\mathcal{D}' \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ 是加性的。首先, 三角形 $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{D}'$ 中的特异三角形, 则三角形

$$F(0) \xrightarrow{\text{id}_{F(0)}} F(0) \xrightarrow{\text{id}_{F(0)}} F(0) \rightarrow F(0)[1]$$

在 $\mathcal{D}$ 中是特异三角形, 由 (1.2.2) 得到 $F(0) = 0$ 。将函子 F 作用在形如 (1.2.6.1) 的特异三角形上, 并应用 (1.2.6) 便得到 F 是加性的。类似的推理得到上同调函子是加性的。

定义 1.2.8. 一个加性范畴的态射 $f: X \rightarrow Y$ 的分解是一个交换图表:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ Z \oplus W & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & W \oplus Z' \end{array}$$

一个态射被称作可分解的, 如果存在这样的分解。态射 $f: X \rightarrow Y$ 的一个分裂¹是一个态射 $g: Y \rightarrow X$ 使得 $f g f = f$ 且 $g f g = g$ 。一个态射被称作可分裂²的, 如果存在这样的分裂。可分解的态射是可分裂的。反之不一定成立 (如非主 Dedekind 环上的自由模组成的范畴)。一个加性范畴被称作可分解的, 如

¹scindage

²scindable

果该范畴的态射都是可分解的。一个可分解的范畴是 Abel 的。

设 $X \xrightarrow{f} Y$ 是一个剖分范畴 $\mathcal{D}$ 的态射，而

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \sim \downarrow & \left(\begin{array}{cc} 0 & \text{id}_W \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \downarrow \sim \\ Z \oplus W & \xrightarrow{\quad} & W \oplus Z' \end{array}$$

是 f 的一个分解。则含有 f 的特异三角形同构于三角形：

$$Z \oplus W \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} 0 & \text{id}_W \\ 0 & 0 \end{array} \right)} W \oplus Z' \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} 0 & \text{id}_{Z'} \\ 0 & 0 \end{array} \right)} Z' \oplus Z[1] \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} 0 & \text{id}_{Z[1]} \\ 0 & 0 \end{array} \right)} Z[1] \oplus W[1]$$

这由 (1.2.4)，(1.2.5) 和 TRI，TRII 立即得到。

命题 1.2.9. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴，而 $f: X \rightarrow Y$ 是一个态射。考虑 f 的下列性质：

- i) 态射 f 存在核；
- ii) 态射 f 存在余核；
- iii) 态射 f 是可分解的；
- iv) 态射 f 是可分裂的。

我们有下列的推论：

$$i) \iff ii) \iff iii) \implies iv)$$

当 $\mathcal{D}$ 中存在可数直和或可数直积时，性质 $i), ii), iii), iv)$ 是等价的。

首先，只需证明一下等价的推出： $iii) \implies i), iii) \implies ii), iii) \implies iv)$ 。 $i) \implies iii)$ 等价于 $\mathcal{D}$ 的反范畴中的 $ii) \implies iii)$ 。因此 $i) \implies iii)$ 对任意剖分范畴成立等价于 $ii) \implies iii)$ 对任意剖分范畴成立。要证明

$$i) \iff ii) \iff iii) \implies iv)$$

只需证明 $i) \implies iii)$ 。

1.2.10. 命题 (1.2.9) 的证明 (先)。 首先证明一个单射是可分解的。设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个单射，而 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是含有 f 的特异三角形 (TRI)。由 f 为单射知 $f[1]$ 也为单射。由 TRII 和 (1.2.2) 知 $w = 0$ 。由 (1.2.6) 知 f 是可分解的。现在在一般情形下证明 $i) \implies iii)$ 。假设 $f: X \rightarrow Y$ 有一个核 $\text{Ker}(f) \rightarrow X$ 。则态射 $\text{Ker}(f) \rightarrow X$ 是一个单射，因此它是可分解的。因此态射 f 同构于以下形式的态射：

$$\text{Ker}(f) \oplus X' \xrightarrow{(0, g)} Y$$

其核为 $\text{Ker}(f) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} \text{Ker}(f) \oplus X'$ 。由此立即得到态射 g 是一个单射，从而其为可分解的。因此态射 $f: X \rightarrow Y$ 同构于以下形式的态射：

$$\text{Ker}(f) \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} X' \oplus Y'$$

它是可分解的。

1.2.11. 命题 (1.2.9) 的证明 (完成)¹。接下来证明当假设成立时，余下的 iv) $\Rightarrow$ iii)。注意到 $\mathcal{D}$ 中可数直和存在当且仅当 $\mathcal{D}^\circ$ 中可数直积存在。因此 iv) $\Rightarrow$ iii) 对范畴 $\mathcal{D}$ 成立等价于 iv) $\Rightarrow$ iii) 对 $\mathcal{D}$ 的反范畴成立。故只需对 $\mathcal{D}$ 中存在可数直积时证明 iv) $\Rightarrow$ iii)，即，根据前面的结论，只需证明 iv) $\Rightarrow$ i)。设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个态射，其分裂为 $g: Y \rightarrow X$ 。态射 $f: X \rightarrow Y$ 的核函子等于态射 $gf: X \rightarrow X$ 的核函子。而 gf 是一个 X 上的投影 (即 $gf gf = gf$)。因此我们要证明在一个存在可数直积的剖分范畴中，投影的核是存在的。设 $e: X \rightarrow X$ 是 X 的一个投影。设 $X_i = X, i \in \mathbb{N}$ ，设

$$\Phi: \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

¹这里我们用 Freyd 的证明

定义为

$$\Phi(x_0, x_1, x_2, \dots) = (ex_0 + (1-e)x_1, ex_1 + (1-e)x_2, \dots) \quad (1.2.11.1)$$

其中符号 $x_0, x_1, \dots$ 表示 $\mathcal{D}$ 中对象到 X_i 的态射。类似地，定义

$$\Psi: \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

为

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0, (1-e)x_0 + ex_1, (1-e)x_1 + ex_2, \dots) \quad (1.2.11.2)$$

显然 $\Phi\Psi = \text{id}$ 且态射 Φ 是满的，因此根据已经证明的结果，其核是存在的。此外态射 Φ 的核与 $e: X \rightarrow X$ 的核是典范同构的。因此投影 e 确实有一个核。这就证明了命题 (1.2.9)。

1.2.12. 推论 (1.2.4) 说明一个态射所蕴含的特异三角形在同构意义下是唯一的。另外，TRIII 说明对任意两个态射之间的态射能够延伸到三角形的态射。我们就想知道特异三角形的结构的定义是否能将每个特异三角形关联到范畴中的一个态射。我们将说明，在一些充分性条件下，这样的范畴是可分解的。

命题 1.2.13. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴，而 Tr 是从 $\mathcal{D}$ 中的态射组成的范畴 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ (第一章 3.3.6) 到 $\mathcal{D}$ 的特异三角形范畴

($\mathcal{D}$ 中三角形范畴的由所有特异三角形组成的全子范畴) 的函子:

$$Tr(X \xrightarrow{f} Y) = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a(f)} \tau(f) \xrightarrow{b(f)} X[1]$$

如果 $\mathcal{D}$ 中可数直积或可数直和存在, 则范畴 $\mathcal{D}$ 是可分解的。

事实上, 设 $v: W \rightarrow X$ 是一个态射使得 $fv = 0$ 。于是我们有态射的态射:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ v \uparrow & & \uparrow \\ W & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

作用函子 Tr 得到一个交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a(f)} & \tau(f) & \xrightarrow{b(f)} & X[1] \\ v \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow v[1] \\ W & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tau(W \rightarrow 0) & \xrightarrow{b(W \rightarrow 0)} & W[1] \end{array} \quad (1.2.13.1)$$

注意到图表 (1.2.13.1) 中两行都是特异三角形, 因此态射 $b(W \rightarrow 0)$ 是一个同构。设

$$\alpha(v) = Tr(v, 0)[-1]b(W \rightarrow 0)^{-1}[-1]$$

得到下面图表:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tau(f)[-1] & \xrightarrow{b(f)[-1]} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow & & & \uparrow v & \nearrow 0 & \\ & & \alpha(v) & & W & & \end{array}$$

是交换的。我们立即得到我们定义了从 $\tau(f)[-1]$ 的代表函子到 f 的核函子的典范态射 $\tau(f)[-1] \rightarrow \text{Ker}(f)$ 的一个截面：

$$\alpha : \text{Ker}(f) \rightarrow \tau(f)[-1]$$

f 的核函子与 $\tau(f)[-1]$ 的投影的核函子同构，从而是可表的 (1.2.9). 从 (1.2.9) 得到态射 f 是可分解的，这就完成了证明。

注 1.2.14. 1.2 节的性质均没有使用到 TRIV。因此它们对于满足 TRI, TRII, TRIII 的三角形的严格加性 $\mathbb{Z}$ -范畴成立。

1.3. 剖分范畴的例子

1.3.1. 设 c 是一个加性范畴， $\kappa(c)$ 是同伦意义下的 c 的复形范畴 (第一章2.5.7)，则 $\kappa(c)$ 是一个严格 $\mathbb{Z}$ -范畴和一些特异三角形的集合 (第一章3.3.1)，他们有性质 TRI,TRII,TRIII(第一章 3.3)。

命题 1.3.2. 范畴 $\kappa(c)$ 和特异三角形的全体构成一个剖分范畴。

只需证明 $\kappa(c)$ 中由特异三角形构成的全体满足性质 TRIV。设

$$\begin{array}{ccccc} & & X_2 & & \\ & \nearrow u_3 & & \searrow u_1 & \\ X_1 & & \xrightarrow{u_2} & & X_3 \end{array}$$

是交换图表，而

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1]$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1]$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1]$$

是三个特异三角形。于是 (第一章3.3.5)，存在三个特异三角形：

$$(X_1, X_2, Z'_3, u_3, v'_3, w'_3), (X_2, X_3, Z'_1, u_1, v'_1, w'_1), (X_1, X_3, Z'_2, u_2, v'_2, w'_2)$$

和两个态射

$$m'_1 : Z'_3 \rightarrow Z'_2, \quad m'_3 : Z'_2 \rightarrow Z'_1$$

使得 $(\text{id}_{X_1}, u_1, m'_1)$ 和 $(u_3, \text{id}_{X_3}, m'_3)$ 是三角形的态射且使得三角形

$$Z'_3 \xrightarrow{m'_1} Z'_2 \xrightarrow{m'_3} Z'_1 \xrightarrow{v'_3[1]w'_1} Z'_3[1]$$

是特异的。从而 ((1.2.4) 和 (1.2.14))，存在同构 $i_j : Z'_j \rightarrow Z_j, 1 \leq j \leq 3$ 使得 $(\text{id}, \text{id}, i_j)$ 是三角形的同构。故只需设

$$m_1 = i_2 m'_1 i_3^{-1} : Z_3 \rightarrow Z_2, \quad m_3 = i_1 m'_3 i_2^{-1} : Z_2 \rightarrow Z_1$$

则态射 m_1 和 m_3 拥有 TRIV 要求的性质。

1.3.3. 设 $\mathcal{C}$ 是加性范畴。对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 X ，我们将其关联到一个复形，其除了第 0 个组成为 X 外均为零。我们便定义了一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 的函子，再由典范的函子 $\text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$ ，便得到一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ 的函子。

这个函子是全忠实的，在对象的全体上是单的。因此可以把 $\mathcal{C}$ 看作 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 或 $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ 的全子范畴。另外， $\mathcal{C}$ 将总是通过该函子看作 $\text{comp}(\mathcal{C})$ 或 $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ 的全子范畴。

1.3.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Abel 范畴。对任意 $\mathcal{C}$ 中的复形 X ，定义 $\mathcal{C}$ 中的对象 $H^0(X)$ 为

$$H^0(X) = \text{Ker}(d_X^0) / \text{Im}(d_X^{-1}) \quad (1.3.4.1)$$

对任意复形的态射 $X \xrightarrow{f} Y$ ，定义

$$H^0(f) : H^0(X) \rightarrow H^0(Y)$$

为由 f 诱导的态射。因此我们定义了一个函子：

$$H^0 : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

这被称为第 0 次的上同调对象。这个函子将同伦态射变为相等的态射，因此得到一个函子，仍然记作：

$$H^0 : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

命题 1.3.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *Abel* 范畴, 则函子

$$H^0 : K(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

是一个上同调函子。

事实上, 由 (第一章3.3.1), 只需证明对任意 $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ (第一章3.1.1) 中的对象 $X \xrightarrow{f} Y$, 序列

$$H^0(X) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(p(f))} H^0(c(f)) \xrightarrow{H^0(q(f))} H^0(X[1])$$

是正合的。由性质 TRII(1.1.1) 知只需证明以下序列

$$H^0(Y) \xrightarrow{H^0(p(f))} H^0(c(f)) \xrightarrow{H^0(q(f))} H^0(X[1])$$

是正合的。而这由定义 (第一章3.1.2和3.2.2) 立即得到。

函子 $H^0 : K(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ 被称作典范上同调函子。而用 $H^n(X) = H^0(X[n])$ 以简化记号。

命题 1.3.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个加性范畴, 则以下性质是等价的:

- i) 范畴 $K(\mathcal{C})$ 是 *Abel* 的。
- ii) 范畴 $K(\mathcal{C})$ 是可分解的 (1.2.8)。
- iii) 范畴 $\mathcal{C}$ 是可分解的。

等价条件 i) $\iff$ ii) 由 (1.2.9) 得到。而 ii) $\implies$ iii) 是因为 c 是 $\mathcal{K}(c)$ 的全子范畴。对任意 c 中的复形 X ，定义 $H^*(X)$ 为复形：

$$H^*(X)^l = H^l(X), \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$d_{H^*(X)}^l = 0, \quad l \in \mathbb{Z}$$

我们说函子 $H^* : \mathcal{K}(c) \rightarrow \mathcal{K}(c)$ 当 c 是可分解的时候是范畴等价，这就推出了 iii) $\implies$ ii)。

1.3.7. 设 $F : \prod_{i \in [n]} c_i$ 是一个多加性的函子，假设 c 中可数直积存在，则立即得到 (第一章3.4.3和3.4.4) 函子 F 在同伦意义下的 Π -扩张

$$K_{\Pi} F : \prod_{i \in [n]} K(c_i) \rightarrow K(c)$$

是一个多加性的函子。这个函子是一个满足符号规则 (第一章??) 的 Koszul 上闭链扭成的 $\mathbb{Z}^n$ -函子。类似结果对函子 $K_{\Sigma} F$ 也成立。

1.3.8. 设 c 是一个加性范畴，而 $\iota : \mathcal{K}(c)^\circ \rightarrow \mathcal{K}(c^\circ)$ 是典范同构 $\iota = \iota_1$ (第一章2.5.13)。赋予范畴 $\mathcal{K}(c)^\circ$ 以 (1.1.7) 中三角形的结构。从 (第一章3.4.1) 得到 ι 是一个剖分范畴的正合函子，进而 ι 是剖分范畴的同构。此后，除非特殊说明，将剖分范畴 $\mathcal{K}(c)^\circ$ 和 $\mathcal{K}(c^\circ)$ 通过同构 ι 视作相同。

2. 剖分范畴的局部化

2.1. 态射的乘性系 [14]

2.1.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴（不一定是加性的）， $\mathcal{C}$ 中一个态射的集合 S 被称作乘性系，如果它满足以下条件：

SM1) S 中态射的复合仍然在 S 中。对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 x ， x 的恒同态射在 S 中。

SM2) 对于图表

$$\begin{array}{c} \downarrow s \in S \\ \xrightarrow{f} \end{array}$$

能补充成交换图表：

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad g \quad} & \\ t \in S \downarrow & & \downarrow s \in S \\ & \xrightarrow{\quad f \quad} & \end{array}$$

对于图表

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad g \quad} \\ t \in S \downarrow \end{array}$$

能补充成交换图表：

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{g} & \\
 t \in S \downarrow & & \downarrow s \in S \\
 & \xrightarrow{f} &
 \end{array}$$

SM3) 对任意两个态射 $f, g: X \rightrightarrows Y$ ，以下条件是等价的：

i) 存在 S 中的态射 s ，从 Y 出发，使得 $sf = sg$ ；

ii) 存在 S 中的态射 t ，指向 X ，使得 $ft = gt$ ；

一个乘性系又被称作饱和的¹如果它满足以下条件：

SM4) 如果 f, g, h 是三个可结合的态射，而且 fg 和 gh 都在 S 中，则 g 也在 S 中。

2.1.2. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴， $\mathcal{D}$ 的一个乘性系 S 是与剖分相容的，如果它满足以下条件：

SM5) 对任意 S 的元素 s 和任意 $n \in \mathbb{Z}$ ，态射 $s[n]$ 也在 S 中。或者说， s 在平移的自同构中是不变的。

SM6) 对任意两个特异三角形：

$$(X, Y, Z, u, v, w), \quad (X', Y', Z', u', v', w')$$

¹saturé

和任意交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

这里 s 和 s' 是 S 中的元素，则存在 S 中的态射 $s'' : Z \rightarrow Z'$ 使得 (s, s', s'') 是三角形的态射。

注 2.1.3. 1) 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴， S 是一个与 $\mathcal{D}$ 的剖分相容的乘性系，而 $\mathcal{D}^\circ$ 是 $\mathcal{D}$ 的反范畴。 $\mathcal{D}^\circ$ 中的态射态射的集合 S 是与 $\mathcal{D}^\circ$ 的剖分相容的乘性系。

2) 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴而 S 是 $\mathcal{D}$ 中态射的集合满足性质 SM1), SM5) 和 SM6)，则集合 S 有性质 SM2)。事实上，只需验证对任意图表：

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ & \downarrow s \in S & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

可以补充为交换图表：

$$\begin{array}{ccc} Z' & \overset{g}{\dashrightarrow} & X' \\ t \in S \downarrow & & \downarrow s \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

因为 SM2) 的第二个论断可以通过转移到反范畴中得到。由 TRI 和 TRII 得到存在特异三角形 $(X, Y, Z[1], u, v, f[1])$ ，而根据

性质 TRI, 存在特异三角形 (X', Y, Z', us, v', w') 。这样我们得到一个交换图表:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{us} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

态射 id_Y 在 S 中 (SM1), 而由 SM6), 我们得到 s 中的一个态射 $s' : Z' \rightarrow Z[1]$ 使得 (s, id_Y, s') 是三角形的态射。特别地, 以下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \\ s' \downarrow & & \downarrow s[1] \\ Z[1] & \xrightarrow{f[1]} & X[1] \end{array}$$

根据 SM5), 便得到 SM2) 的第一个论断。

2.1.4. 此后, 若没有特殊说明, 剖分范畴的乘性系将被认为是与剖分相容。他们也将被直接称作乘性系。

2.1.5. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴, $\mathcal{D}$ 的一个全子剖分范畴是 $\mathcal{D}$ 的全子范畴, 它在平移下不变, 而它的三角形结构使得嵌入函子是正合函子 (同时也与平移严格地交换)。一个剖分范畴 $\mathcal{D}$ 的全子范畴是 $\mathcal{D}$ 的加性全子范畴 (1.2.7)。一个剖分范畴 $\mathcal{D}$ 的全子范畴还有一个额外的与嵌入函子相容的三角形结构。设 $\mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{D}$ 的全子范畴, 在平移下不变。对于使 $\mathcal{D}'$ 成为 $\mathcal{D}$ 的全子剖分范畴, 需且只需对任意 $\mathcal{D}'$ 中的对象 X 和

Y 和态射 $f: X \rightarrow Y$, 存在 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形 (X, Y, Z, f, g, h) 使得 Z 是 $\mathcal{D}'$ 中的对象。

2.1.6. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴。一个 $\mathcal{D}$ 的全子剖分范畴 $\mathcal{D}'$ 被称作饱和的, 如果它有以下性质:

$\mathcal{D}'$ 中对象在 $\mathcal{D}$ 中的直和因子同构与 $\mathcal{D}'$ 中的某个对象。
(2.1.6.1)

(一个对象 Y 的直和因子是一个对象 X 使得存在对象 Z 和同构 $X \oplus Z \xrightarrow{\sim} Y$)。

2.1.7. 设 $\mathcal{D}'$ 是剖分范畴 $\mathcal{D}$ 的全子剖分范畴, 定义 $S(\mathcal{D}')$ 为 $\mathcal{D}$ 中态射的集合满足如下性质:

$f: X \rightarrow Y$ 是 $S(\mathcal{D}')$ 中的态射当且仅当存在 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形 (X, Y, Z, f, g, h) 使得 Z 是 $\mathcal{D}'$ 中的对象。
(2.1.7.1)

命题 2.1.8. 集合 $S(\mathcal{D}')$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个乘性系 (2.1.4)。它是饱和的当且仅当子范畴 $\mathcal{D}'$ 是饱和的。

对于第一个论断, 只需按照 (2.1.3) 验证集合 $S(\mathcal{D}')$ 满足性质 SM1), SM3), SM5) 和 SM6)。我们将逐一地验证集合 $S(\mathcal{D}')$ 拥有这些性质, 然后证明第二个论断。

2.1.9. 集合 $S(\mathcal{D}')$ 拥有性质 SM1)。首先, 显然对 $\mathcal{D}'$ 中的任意对象 X , 态射 id_X 是 $S(\mathcal{D}')$ 的一个元素。这是由 TRI) 和

$\mathcal{D}'$ 中的零对象也是 $\mathcal{D}$ 中的零对象的事实得到的。集合 $S(\mathcal{D}')$ 中的态射在复合下稳定立即由假设 TRIV) 和 (1.2.4) 得到。我们将其留给读者来验证。

2.1.10. 集合 $S(\mathcal{D}')$ 拥有性质 SM3)。首先，只需证明对于一个图表 $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{f} Z$ 和 $s \in S(\mathcal{D}'), fs = 0$ ，存在一个图表 $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{t} W$ 和 $t \in S(\mathcal{D}'), tf = 0$ 。因为此时通过传递到反范畴，我们得到反过来从而得到结果。对于这个假设，存在一个特异三角形 (X, Y, N, s, h, u) ，其中 N 为 $\mathcal{D}'$ 中的对象。因为我们有 $fs = 0$ ，由 (1.2.1) 知存在一个态射 $N \rightarrow Z$ 使得 $f = gh$ 。设 (N, Z, W, g, t, v) 为包含 g 的特异三角形 (TRI)。我们有 $tg = 0$ (1.2.2)，于是 $tf = tgh = 0$ 。最后只需证明 t 是 $S(\mathcal{D}')$ 中的元素，这立即由 TRII) 得到。

2.1.11. 集合 $S(\mathcal{D}')$ 拥有性质 SM5)。立即由 TRII) 和子范畴 $\mathcal{D}'$ 在平移下稳定的事实得到。

2.1.12. 集合 $S(\mathcal{D}')$ 拥有性质 SM6)。设 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X', Y', Z', u', v', w') 为 $\mathcal{D}$ 中的两个特异三角形且

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

为交换图表，其中 s 和 s' 属于 $S(\mathcal{D}')$ 。需要证明存在态射 $S(\mathcal{D}')$ 中的态射 $s'' : Z \rightarrow Z'$ 使得 (s, s', s'') 为三角形的态射。首先，我

们只需考虑以下两种情况：

i) 有 $X = X'$ 且 $s = \text{id}_X$.

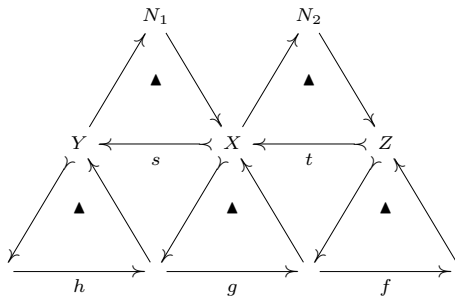
ii) 有 $Y = Y'$ 且 $s' = \text{id}_{Y'}$.

事实上，这两个态射的态射都穿过

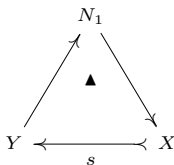
$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y \\
 \text{id}_X \downarrow & & \downarrow s' \\
 X & \xrightarrow{s'u} & Y' \\
 s \downarrow & & \downarrow \text{id}_{Y'} \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y'
 \end{array}$$

于是我们得到态射 s'' 通过复合 (我们已经证明集合 $S(\mathcal{D}')$ 在复合下稳定)。然后，情况 b) 由情况 a) 通过传递到反范畴而得到。只需考虑情况 a)，这正是 TRIV) 的直接推论。

2.1.13. 如果范畴 $\mathcal{D}'$ 是饱和的，则集合 $S(\mathcal{D}')$ 是饱和的。设 f, g, h 为三个可结合的态射使得 fg 和 gh 是 $S(\mathcal{D}')$ 的元素。使用假设 TRIV, 我们能构造图表



其中 N_1 和 N_2 为 $\mathcal{D}'$ 中的对象, 而五个画阴影的三角形是特异三角形, 两个无阴影的三角形是交换的。我们能得到 $s[1]t = 0$ (1.2.2)。此外, 根据 SM1) 和 SM5), 态射 $s[1]t$ 为 $S(\mathcal{D}')$ 中的元素。于是存在一个特异三角形, 形如 $(Z, Y[2], N, 0, u, v)$ 其中 N 是 $\mathcal{D}'$ 的对象, 使用 (1.2.6) 和 TRII, 我们得到 Y 是 $\mathcal{D}'$ 的一个对象的直和分量。于是 Y 同构与一个 $\mathcal{D}'$ 中的对象。使用 (1.2.4) 和 $\mathcal{D}'$ 为 $\mathcal{D}$ 的剖分子范畴的事实和特异三角形



得到 X 同构与 $\mathcal{D}'$ 的一个对象。因此态射 g 是 $S(\mathcal{D}')$ 中的一个元素。

2.1.14. 如果集合 $S(\mathcal{D}')$ 是饱和的, 则子范畴 $\mathcal{D}'$ 是饱和的。设 X 是 $\mathcal{D}'$ 中一个对象的直和分量, 使用 (1.2.6) 和 TRII, 我们看到存在一个特异三角形 $(X, Y, N, 0, u, v)$ 其中 N 为 $\mathcal{D}'$ 的一个对象。因此零态射 $X \rightarrow Y$ 是 $S(\mathcal{D}')$ 中的一个态射。于是使用性质 SM4) 到三个态射 $0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow Y$, 我们得到 $X \rightarrow 0$ 是 $S(\mathcal{D}')$ 的一个元素。于是存在一个特异三角形 $(X, 0, N, 0, 0, i)$ 其中 N 是 $\mathcal{D}'$ 的一个对象。此外, 态射 $N \xrightarrow{i} X[1]$ 是一个同构, 我们得到 X 同构于 $N[-1]$, 为 $\mathcal{D}'$ 的一个对象。这就完成了命题 (2.1.8) 的证明。

2.1.15. 设 $\mathcal{D}'$ 是剖分范畴 $\mathcal{D}$ 的全子剖分范畴。乘性系 $S(\mathcal{D}')$ (2.1.14) 被称作与子范畴 $\mathcal{D}'$ 关联的乘性系。

命题 2.1.16. 设 $F: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ 是两个剖分范畴之间的正合函子 (1.1.3), 设 $S(F)$ 是通过 F 后为 $\mathcal{D}_2$ 中同构的态射的集合。设 $\mathcal{D}'(F)$ 是 $\mathcal{D}_1$ 的全子范畴, 其对象为在 F 作用下为零对象的 $\mathcal{D}_1$ 中对象的全体。

- 1) 子范畴 $\mathcal{D}'(F)$ 是一个严格的全子剖分范畴 (任意 $\mathcal{D}_1$ 中与 $\mathcal{D}'(F)$ 中对象同构的对象是 $\mathcal{D}'(F)$ 中的对象), 而且是饱和的。
- 2) 集合 $S(F)$ 是 $\mathcal{D}_1$ 的饱和的乘性系。
- 3) 集合 $S(F)$ 是与子范畴 $\mathcal{D}'(F)$ 关联的乘性系 (2.1.15)。

这个证明是容易的, 而留给能证明以下性质的读者。

命题 2.1.17. 设 $H: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ 是一个上同调函子, 设 $S(H)$ 是 $\mathcal{D}$ 中通过转换为 $\mathcal{A}$ 中同构的态射的集合。设 $\mathcal{D}'(H)$ 是 $\mathcal{D}$ 的全子范畴, 其对象为通过转化后为 $\mathcal{A}$ 中的零对象。

- 1) 子范畴 $\mathcal{D}'(H)$ 是一个严格的全子剖分范畴, 也是饱和的。
- 2) 集合 $S(H)$ 是 $\mathcal{D}$ 的饱和的乘性系。
- 3) 集合 $S(H)$ 是与子范畴 $\mathcal{D}'(H)$ 关联的乘性系 (2.1.15)。

2.2. 范畴局部化的建立

2.2.1. 设 c 是一个范畴 (不一定是加性的), 而 s 是 c 的一个乘性系。定义对 c 中任意对象 x , s/x (对应地, $x \backslash s$) 为一个范畴, 其对象是 s 中射向 x (对应地, 由 x 射出) 的态射, 而其中的态射是以下的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & Y' \\ & \searrow s & \nearrow t \\ & X & \end{array} \quad s, t \in S$$

$$(\text{对应地, } \begin{array}{ccc} & X & \\ s \swarrow & & \searrow t \\ Y & \xrightarrow{u} & Y' \end{array} \quad s, t \in S)$$

对任意 c 中的对象 x, y , 定义

$$\text{Hom}_{c(S^{-1})}(X, Y) = \lim_{(S/X)^{\circ}} \text{Hom}_c(\cdot, Y) \quad (2.2.1.1)$$

(这里, 公式 (2.2.1.1) 中的点表示 s/x 中指出的对象。)

从性质 SM1), SM2) 和 SM3) 立即得到范畴 $(s/x)^{\circ}$ 是滤相¹的 [6]。于是 $\text{Hom}_{c(S^{-1})}(X, Y)$ 中的元素是以下形式的图表:

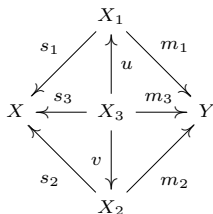
$$D = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y, \quad s \in S$$

两个图表 $D_1 = X \xleftarrow{s_1} X_1 \xrightarrow{m_1} Y$ 和 $D_2 = X \xleftarrow{s_2} X_2 \xrightarrow{m_2} Y$ 属于同一个类, 如果存在图表

$$D_3 = X \xleftarrow{s_3} X_3 \xrightarrow{m_3} Y$$

¹fr:filtrante

和交换图表：



对任意 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ，定义 $Q(f)$ 为图表 $X \xleftarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{f} Y$ 所在的类。
对任意态射 $s : Y \rightarrow X, s \in S$ ，定义 $Q(s)^{-1}$ 为图表 $X \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y$ 所在的类。

定义 $\text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ 为集合

$$\bigsqcup_{(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y)$$

定义 s 和 $b : \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1})) \Rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$ 为映射：

$$m \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y), s(m) = X, b(m) = Y$$

而 $\text{id} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ 为映射 $X \mapsto Q(\text{id}_X)$ 。定义一个表为 $c(S^{-1}) = (\text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1})), s, b, \text{id})$ 。我们还有一些映射：

$$Q = (\text{id}_{\text{Ob}(\mathcal{C})} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}), Q : \text{Fl}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1})))$$

定理 2.2.2. *a) 存在一个且只存在一个 $\text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ 中复合的法则使得*

1) $c(S^{-1})$ 是一个范畴。

2) $Q(s)$ 同构与 $Q(s)^{-1}, s \in S$ 。

3) 对任意图表 $D = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y, s \in S$, 我们有 $\bar{D} = Q(m)Q(s)^{-1}$
($\bar{D} \in \text{Hom}_{c(S^{-1})}(X, Y)$ 是 D 所在的类)。

4) Q 是一个函子。

b) $c(S^{-1})$ 中的态射可以写成复合 $Q(t)^{-1}Q(m), m \in \text{Fi}(C), t \in S$ (对应地, $Q(p)Q(s)^{-1}, p \in \text{Fi}(C), s \in S$)。

c) 函子 Q 与有限极限和有限余极限交换。

d) 对任意范畴 $\mathcal{A}$, 与函子 Q 的复合定义了一个函子

$$\text{Hom}(Q, \mathcal{A}) : \text{Hom}(C(S^{-1}), \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}(C, \mathcal{A})$$

(Hom 为函子的范畴)。函子 $\text{Hom}(Q, \mathcal{A})$ 在对象上是单的, 全忠实的, 且 $\text{Hom}(C(S^{-1}), \mathcal{A})$ 的像是 $\text{Hom}(C, \mathcal{A})$ 的严格全子范畴, 其元素为 C 到 $\mathcal{A}$ 的使 S 中的态射为同构的那些函子。

这个定理的证明留给读者, 或者参看 [16]。我们仅仅局限于构造 $c(S^{-1})$ 中态射的复合。设 $\bar{D}_1 \in \text{Hom}_{c(S^{-1})}(X, Y)$ 而 $\bar{D}_2 \in \text{Hom}_{c(S^{-1})}(Y, Z)$ 为 $c(S^{-1})$ 中两个可结合的态射。设 $D_1 = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y$ 而 $D_2 = Y \xleftarrow{t} Y' \xrightarrow{p} Z$ 为 C 中类 $\bar{D}_1$ 和 $\bar{D}_2$ 中的图表。由 SM2), 以下图表

$$\begin{array}{ccc} X' & & Y' \\ & \searrow m & \swarrow t \\ & Y & \end{array} \quad t \in S$$

可以补充为交换图表：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & t' \in S & & \\
 & & \swarrow & & \searrow \\
 & X' & & Z' & m' \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & m & Y & t \in S
 \end{array}$$

于是我们得到图表 $D_3 = X \xleftarrow{st'} Z' \xrightarrow{pm'} Z$ ，根据 SM1) 有 st' 在 S 中。我们说 D_3 在 $\text{Hom}_{C(S^{-1})}(X, Z)$ 中所在的类 $\bar{D}_3$ 仅由 $\bar{D}_1$ 和 $\bar{D}_2$ 决定。态射 $\bar{D}_3$ 就是 $C(S^{-1})$ 中态射 $\bar{D}_1$ 和 $\bar{D}_2$ 的复合。

注 2.2.3. a) 从定理 (2.2.2) 的第四个论断得到范畴 $C(S^{-1})$ 和函子 $Q: C \rightarrow C(S^{-1})$ 是一个泛问题的解：函子 Q 将 S 中的态射变为同构，而对任意从 C 到范畴 A 的将 S 中的态射变为同构的函子，唯一地经过¹ Q 。范畴 $C(S^{-1})$ 由该性质在同构意义下被唯一地决定。

b) 设 C 是一个范畴，而 S 是 C 中态射的集合，但不一定是乘性系。总是存在一个范畴 $C(S^{-1})$ 和函子 $Q: C \rightarrow C(S^{-1})$ 使得将 S 中的态射变为同构，且对任意 C 到 A 的将 S 变为同构的函子都唯一经过 Q 。当 S 是 C 的一个乘性系时，定理 (2.2.2) 给出了范畴 $C(S^{-1})$ 的简单的描述。它还增加了额外的函子 Q 的性质 (断言 b) 和 c))，而这在一般情况下是不成立的。

推论 2.2.4. 设 C 是一个范畴而 S 是 C 的一个乘性系。

¹factor

a) 集合 s 是 c 的反范畴 c° 的乘性系，我们有范畴的典范同构：

$$(c^\circ(S^{-1}))^\circ \rightarrow c(S^{-1})$$

该同构实际上是以下同构：

$$\mathrm{Hom}_{c(S^{-1})}(X, Y) \rightarrow \varinjlim_{Y \setminus s} \mathrm{Hom}_c(X, \cdot)$$

b) 当范畴 c 是加性的时，范畴 $c(S^{-1})$ 是加性的而且函子 Q 是加性的。

c) 设 $\hat{s}$ 是 c 中在 Q 作用下是同构的态射的全体。则集合 $\hat{s}$ 是 c 中饱和的乘性系。对任意 c 中包含 s 的饱和的乘性系必包含 $\hat{s}$ 。

第一个论断立即由 $c(S^{-1})$ 的泛性质得到：范畴 $(c^\circ(S^{-1}))^\circ$ 是该问题的一个解。第二个论断立即由定理 (2.2.2) 的 b) 和 c) 得到。从范畴 $c(S^{-1})$ 中态射的描述中立即得到 c 中的态射 f 通过 Q 变成同构当且仅当存在 c 中的态射 g 和 h 使得 g_f 和 f_h 有定义且在 s 中。我们立即可以得到集合 $\hat{s}$ 拥有性质 SM2) 和 SM3)。另外，由 $\hat{s}$ 的定义得到该集合拥有性质 SM1) 和 SM4)。因此集合 $\hat{s}$ 是 c 中饱和的乘性系。(2.2.4) 的最后一个论断是平凡的。

2.2.5. 设 c 是一个范畴，而 s 是 c 的一个乘性系。范畴 $c(s^{-1})$ 被称作 c 在 s 处的局部范畴。函子 $Q : c \rightarrow c(s^{-1})$ 被称作局部化函子。乘性系 $\hat{s}$ 叫做 s 的饱和。

定理 2.2.6. 设 D 是一个剖分范畴，而 s 是 D 的乘性系 (2.1.4)。定义 $D(s^{-1})$ 为 D 的局部范畴。而 $Q : D \rightarrow D(s^{-1})$ 为局部化函子。

a) 在 $D(s^{-1})$ 上有且仅有一个严格的 $\mathbb{Z}$ -范畴的结构使得 Q 是一个严格 $\mathbb{Z}$ -函子。

b) 在 $D(s^{-1})$ 上有且仅有一个三角形的结构使得 Q 是一个正合函子。其中的特异三角形为与 D 中特异三角形在 Q 下的像同构的那些三角形。

c) 对任意正合函子 (对应地, 上同调函子) $F : D \rightarrow D'$ 到一个剖分范畴 (对应地, Abel 范畴), 使得将 s 中的态射变为同构, 它必唯一的经过 $Q : D \rightarrow D(s^{-1})$, 而得到一个正合函子 (对应地, 上同调函子) $G : D(s^{-1}) \rightarrow D'$ 。设 $F_1, F_2 : D \rightarrow D'$ 为两个正合函子 (对应地, 上同调函子) 使得将 s 中的态射变为同构, $G_1, G_2 : D(s^{-1}) \rightarrow D'$ 为对应的函子。而 $m : F_1 \rightarrow F_2$ 为正合函子 (对应地, 上同调函子) 态射, 有且仅有一个函子态射 $p : G_1 \rightarrow G_2$ 使得 $m = p \star Q$ 。

第一个论断由定理 (2.2.2) 和 SM5) 立即得到。第三个论断由第二个论断和定理 (2.2.2) 立即得到。因此只需给出第二个论断的证明。设 τ 为 $\mathcal{D}(S^{-1})$ 中同构于 $\mathcal{D}$ 中特异三角形在 Q 下的像的三角形的全体。我们可以轻松地证明集合 τ 具有性质 TRI 和 TRII。为了证明 TRIII, 我们将需要一个引理:

引理 2.2.7. 设 $u : X \rightarrow Y$ 而 $u' : X' \rightarrow Y'$ 为 $\mathcal{D}$ 中的两个态射, 而

$$\begin{array}{ccc} Q(X) & \xrightarrow{Q(u)} & Q(Y) \\ m \downarrow & & \downarrow p \\ Q(X') & \xrightarrow{Q(u')} & Q(Y') \end{array}$$

是 $\mathcal{D}(S^{-1})$ 中的交换图表。则存在态射 $u'' : X'' \rightarrow Y''$ 和 $\mathcal{D}$ 中两个交换图表:

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{u''} & Y'' \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{u} & Y \\ X'' & \xrightarrow{u''} & Y'' \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array} \quad s, t \in S$$

使得 $m = Q(f)Q(s)^{-1}$ 和 $p = Q(g)Q(t)^{-1}$ 。

假设引理成立，我们来证明集合 τ 有性质 TRIII。根据 τ 的定义，只需证明：对于两个 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形

$$(X, Y, Z, u, v, w), \quad (X', Y', Z', u', v', w')$$

和 $\mathcal{D}(S^{-1})$ 中的交换图表：

$$\begin{array}{ccc} Q(X) & \xrightarrow{Q(u)} & Q(Y) \\ m \downarrow & & \downarrow p \\ Q(X') & \xrightarrow{Q(u')} & Q(Y') \end{array}$$

存在一个态射 $r : Q(Z) \rightarrow Q(Z')$ 使得 (m, p, r) 是三角形的态射。根据引理 (2.2.7)，我们只需考虑以下两种情况。

a) $m = Q(s)^{-1}, p = Q(t)^{-1}, s, t \in S$ 和以下图表

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

是交换的。

b) $m = Q(f), p = Q(g)$ 和以下图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

是交换的。

对于情况 $a)$, 该结果由性质 SM6)(2.1.2) 得到。对于情况 $b)$, 该结果由性质 TRIII 对 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形成立得到。

2.2.8. 引理2.2.7的证明。 根据定理 (2.2.2), 存在态射 $t : Y'' \rightarrow Y, t \in S$ 使得 $pQ(t) = Q(g)$, 这里 $g : Y'' \rightarrow Y'$ 。于是我们得到以下图表:

$$\begin{array}{ccc}
 X'' & & \\
 s_3 \downarrow & \searrow u'' & \\
 X_2'' & & \\
 s_2 \downarrow & \searrow u_2'' & \\
 X_1'' & \xrightarrow{u_1''} & Y'' \\
 s_1 \downarrow & \searrow u & \downarrow t \\
 X & \xrightarrow{\quad} & Y
 \end{array}$$

使得

- 1) 我们有等式 $us_1 = tu_1''$ 和 $s_1 \in S$ 。这是由 SM2) 得到的。
- 2) 我们有等式 $mQ(s_1s_2) = Q(f')$, 这里 $f' : X_2'' \rightarrow X'$ 是 $\mathcal{D}$ 中的态射, $u_2'' = u_1''s_2$ 和 $s_2 \in S$ 。这是由定理 (2.2.2) 得到的。
- 3) 我们有等式 $u'f's_3 = gu_2''s_3, u'' = u_2''s_3, s_3 \in S$, 事实上, $\mathcal{D}$ 中的图

表

$$\begin{array}{ccc} X_2'' & \xrightarrow{u_2''} & Y'' \\ f' \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

不一定交换。但是通过 Q 作用得到 $\mathcal{D}(S^{-1})$ 中的图表是交换的。因此 $Q(u'f) = Q(gu_2'') : Q(X_2'') \rightarrow Q(Y')$ 。因此根据 $\mathcal{D}(S^{-1})$ 中态射的定义得到, 存在态射 $s_3 \in S : X'' \rightarrow X_2''$ 使得 $u'f's_3 = gu_2''s_3 \circ$

为了完成引理的证明, 只需取 $f = f's_3, s = s_1s_2s_3 \circ$

2.2.9. 定理 (2.2.6) 证明的完成。 只需证明集 τ 满足性质 TRIV。我们现在已经知道该集合满足性质 TRI, TRII 和 TRIII, 所以 1.2 节的结论均可以使用 (1.2.14)。特别地, 由 (1.2.4) 知道对 τ 中含有某一个态射的三角形都是同构的。于是, 通过使用和 (1.3.2) 类似的证明得到, 对于性质 TRIV 的证明, $\mathcal{D}(S^{-1})$ 中的图表是 $\mathcal{D}$ 中类似图表的在 Q 下的像。这个验证是容易的, 我们将其中的细节留给读者。

2.2.10. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ 是一个全子剖分范畴而 $s_{(\mathcal{B})}$ 是与 $\mathcal{B}$ 相关联 (2.1.15) 的乘性系。用记号 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 表示范畴 $\mathcal{D}(s_{(\mathcal{B})}^{-1})$ 。范畴 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{D}$ 对 $\mathcal{B}$ 的商范畴。典范函子 $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 被称作商函子。设 $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ 是到剖分范畴 (类似地, Abel 范畴) 的一个正合函子 (类似地, 上调函子)。

称 $\text{Ker}(F)$ 为 F 的核, 为饱和的严格的全子剖分范畴, 为被 F 零化的那些对象 (对应地, 所有平移都被 F 零化的对象) ((2.1.16) 和 (2.1.17))。

推论 2.2.11. 设 $\mathcal{D}$ 是一个特异三角形而 $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ 是一个全子剖分范畴。

a) 商函子 $Q: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 的核就是含有 $\mathcal{B}$ 的饱和的严格的全子剖分范畴。

b) 映射 $\mathcal{B} \mapsto S(\mathcal{B})$ 将饱和的严格的全子剖分范畴关联到饱满的乘性系 (2.1.8) 是一个从 $\mathcal{D}$ 的所有饱和的严格的全子剖分范畴的全体, 以包含关系为序, 到 $\mathcal{D}$ 的所有饱和的乘性系, 以包含关系为序的同构。该映射的逆映射是将一个饱和的乘性系变为对应局部化的核。

c) 一个正合函子 (对应地, 上同调函子) $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$, 其核为子范畴 $\mathcal{B}$ 唯一地通过 $Q: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 到一个正合函子 (对应地, 上同调函子) $G: \mathcal{D}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}'$ 。核为 $\mathcal{B}$ 的正合函子 (对应地, 上同调函子) 以一个唯一的方式分解。

这都是定理 (2.2.6) 的简单结果。

2.2.12. 性质 TRIV 的注释。 称预剖分范畴为一个严格的 $\mathbb{Z}$ -范畴和一些三角形的集合满足 TRI, TRII, TRIII。我们同样地可以定义正合函子, 上同调函子, 乘性系。

设 S 是预剖分范畴 $\mathcal{D}$ 的乘性系 (2.1.4)。局部化范畴 $\mathcal{D}(S^{-1})$ 是有且仅有一个预剖分范畴的结构使得局部化函子是正合的。 $\mathcal{D}$ 中被局部化范畴零化的对象的全子范畴是一个全子预剖分范畴。在实际中, 要知道反过来如何将一个子预剖分范畴关联到一个合适的饱和的乘性系。只有当具有性质 TRIV 时才可以做到这一点。此性质, 由于技巧性很强, 在大多数情况下, 只是用定理 (2.2.6) 的推论 (2.2.11)。

2.3. 局部化函子的性质

命题 2.3.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴。 $\mathcal{B}$ 是一个全子剖分范畴。

对于任意全子剖分范畴 $\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, 定义 $S_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}$ (对应地, $S_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$) 为 $\mathcal{D}$ (对应地, $\mathcal{A}$) 中与 $\mathcal{B}$ 关联 (2.1.7) 的乘性系。

a) 我们有 $S_{\mathcal{D}(\mathcal{B})} \cap \text{FI}(\mathcal{A}) = S_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ 。

b) 典范函子 $\mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 是全忠实的, 且在对象上是单的。该函子的像是 $Q(\mathcal{A})$, 这里 $Q: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 是典范函子。

c) 典范函子 $\mathcal{D}/\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{D}/\mathcal{B})/(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ 是范畴同构。

d) 如果范畴 $\mathcal{A}$ 是饱和的 (2.1.6), 则子范畴 $Q(\mathcal{A})$ 是饱和的。

对任意 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 的全子剖分范畴 $\mathcal{C}$, 定义 $Q^{-1}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{D}$ 的全子范畴, 为 $\mathcal{D}$ 中的对象 X 使得 $Q(X)$ 同构于 $\mathcal{C}$ 中的对象。

a)^{bis} 范畴 $Q^{-1}(c)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的严格的全子范畴。

b)^{bis} 乘性系 $S_{\mathcal{D}(Q^{-1}(c))}$ 是 $\mathcal{D}$ 中在 Q 下的像在 $S_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(c)$ 中的态射的复合。

c)^{bis} 子范畴 $Q^{-1}(c)$ 是饱和的当且仅当子范畴 c 是饱和的。

d)^{bis} 映射 $A \mapsto Q(A)$ 是从 $\mathcal{D}$ 中包含 $\mathcal{B}(Q$ 的核) 的严格的全子剖分范畴的全体, 以包含关系为序, 到 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 的严格全子范畴, 以包含关系为序, 的同构。该映射的逆为 $c \mapsto Q^{-1}(c)$ 。

第一个断言是显然的。第二个假设由 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ (2.2.1) 中态射的态射的定义立即得到。为了证明 c), 只需考虑商范畴的泛性质 (2.2.11) 即可。对于 d), 将 $\mathcal{A}$ 变为它的严格满闭包, 使得 $Q(\mathcal{A})$ 不变, 故我们可以假设 $\mathcal{A}$ 是严格满的。故函子 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ 的核就是范畴 $\mathcal{A}$ (2.2.11)。则该函子经过 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ 。因此典范函子 $\mathcal{D}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ 的核就是 $Q(\mathcal{A})$, 因此 $Q(\mathcal{A})$ 是饱和的 (2.1.16)。论断 a)^{bis} 是显然的。类似得到论断 b)^{bis}。假设 c 是饱和的。我们还可以假设 c 是严格满的。如果设 $\hat{c}$ 为 c 是 c 严格满的闭包, 则 $\hat{c}$ 是饱和的严格满的且 $Q^{-1}(\hat{c}) = Q^{-1}(c)$ 。故范畴 c 是一个正合函子的核 (2.2.11)。因此, $Q^{-1}(c)$ 是一个正合函子的核, 从而是饱和的 (2.1.16)。假设 $Q^{-1}(c)$ 是饱和的。根据 d) 的证明, 子范畴 $Q(Q^{-1}(c))$ 是一个严格的饱和的满的。即范畴 $Q(Q^{-1}(c))$ 是 c 的严格满闭

包。从而， c 是满的。这就证明了 $c)^\text{bis}$ 。对于最后一个论断，显然当 c 是严格满的时候，有 $Q(Q^{-1}(c)) = c$ 。设 $\mathcal{A}$ 是包含 $\hat{B}$ 的严格满的剖分范畴，只需证明 $\mathcal{A} = Q^{-1}(Q(c))$ 。把 $\mathcal{B}$ 换成 $\hat{B}$ ，对于范畴 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 没有任何影响 (2.2.11)，故可以假设 $\mathcal{B}$ 是饱和的，即 $\mathcal{B} = \hat{B}$ 。显然有包含 $\mathcal{A} \subset Q(Q^{-1}(c))$ ，故只需证明对 $\mathcal{D}$ 中的对象，如果在 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 中同构于 $\mathcal{A}$ 中的对象，则它就是 $\mathcal{A}$ 中的对象。设 X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象， Y 是 $\mathcal{D}$ 中的对象，而 $Q(X) \xrightarrow{\sim} Q(Y)$ 是一个同构。态射 m 分解为 $m = Q(f)Q(s)^{-1}$ ，这里 $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (2.2.2)，而 $Q(f)$ 是一个同构。因为 $\mathcal{B}$ 是饱和的，故 $f = S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})((2.1.8) \text{ 和 } (2.2.4))$ 。于是我们有一个 $\mathcal{D}$ 中的图表：

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array} \quad s, f \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$$

态射 s 在 $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ 中，故存在特异三角形 (Z, X, W, s, u, v) ，且 W 是 $\mathcal{B}$ 中的对象 (2.1.7)，因此 W 是 $\mathcal{A}$ 中的对象。同样地，由 $\mathcal{A}$ 是严格满的，得到 Z 也在 $\mathcal{A}$ 中 (1.2.4)。类似地， Y 是 $\mathcal{A}$ 中的对象，这就完成了该命题的证明。

2.3.2. 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 是一个函子，而 X 是 $\mathcal{C}'$ 中的对象。回忆 $\mathcal{C}$ 中一个对象 Y 被称作在 X 右边上是 F -自由的¹，或者简称为在 X 右边自由的，如果存在一个态射 $u: F(Y) \rightarrow X$ 使得对任意态射 $F(Z) \xrightarrow{v} X$ ，存在唯一态射 $w: Z \rightarrow Y$ 使得以下图表交

¹libre

换：

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{u} & X \\ & \nwarrow \nearrow & \\ & F(w) \quad F(Z) & v \end{array}$$

箭头 $u : F(Y) \rightarrow X$ 被称作关于 (X, Y) 自由的箭头 (与 F 相关)。这也可以用 c 到 c' 的泛元来解释。即称 Y 在 X 右边自由的, 如果存在一个函子同构从 $Z \mapsto \text{Hom}_c(Z, Y)$ 到 $Z \mapsto \text{Hom}_{c'}(F(Z), X)$ 。我们称 c 中的对象 Y 在右边是 F -自由的, 如果存在 c 中的对象 X 使得 Y 在 X 右边是自由的。称 c' 中的对象 X 在右边是 F -可自由的¹, 如果存在 c 中的对象 Y 使得 Y 在 X 右边是自由的。类似地, 通过传递到反范畴中, 便得到在左边自由的定义。

命题 2.3.3. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴, $\mathcal{B}$ 是全子剖分范畴, $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 是商函子 (2.2.10), $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ 为 $\mathcal{D}$ 的与 $\mathcal{B}$ 关联的乘性系 (2.1.8)。

a) 对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 Y , 下面条件是等价的:

i) 对象 Y 在右边是 Q -自由的。

ii) 对任意态射 $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}), s : S \rightarrow T$, 映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(s, Y) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(T, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, Y)$$

¹libérables

是双射。

iii) 对任意 $\mathcal{B}$ 中的对象 B , 有 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, Y) = 0$ 。

iv) 对任意态射 $Y \xrightarrow{s} Z$, 如果 $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, 则它存在右逆。

v) 对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 X , 映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Q(Y))$$

是一个双射。

b) 设 $L_R(Q)$ 为 $\mathcal{D}$ 的由所有在右边是 Q -自由的对象所定义的全子范畴。则范畴 $L_R(Q)$ 是饱和的严格满的剖分范畴。

c) 商函子限制在 $L_R(Q)$ 上

$$Q|_{L_R(Q)} : L_R(Q) \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

是全忠实的, 且在对象上是单的。

d) 设 $\text{Lib}_R(Q) \subset \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 为在右边是 Q -可自由的对象组成的全子范畴, 子范畴 $\text{Lib}_R(Q)$ 是严格满的剖分范畴。如果 $\mathcal{D}$ 中可数直和或直积存在, 则 $\text{Lib}_R(Q)$ 是饱和的。

e) 函子 Q 将 $L_R(Q)$ 射到 $\text{Lib}_R(Q)$ 中, 范畴 $\text{Lib}_R(Q)$ 是 $L_R(Q)$ 的像的严格满闭包。自由的箭头是同构。

f) $\mathcal{D}$ 中的对象 Z 在 $Q^{-1}(\text{Lib}_R(Q))$ 中当且仅当存在一个在右边是自由的对象 Y , 且态射 $s: Z \rightarrow Y$ 在乘性系 $S_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}$ 的饱和化 $\hat{S}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}$ 内 (2.2.4, (c))。

g) 嵌入函子 $L_R(Q) \subset Q^{-1}(\text{Lib}_R(Q))$ 有一个左伴随 $\mathcal{R}: Q^{-1}(\text{Lib}_R(Q)) \rightarrow L_R(Q)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 L_R(Q) & \xleftarrow{\mathcal{R}} & Q^{-1}(\text{Lib}_R(Q)) & \hookrightarrow & \mathcal{D} \\
 & \searrow \Psi & \downarrow Q_1 & & \downarrow Q \\
 & Q|_{L_R(Q)} & \text{Lib}_R(Q) & \hookrightarrow & \mathcal{D}/\mathcal{B}
 \end{array}$$

设 $\Psi: \text{Lib}_R(Q) \rightarrow L_R(Q)$ 为 $Q|_{L_R(Q)}$ 的拟逆¹函子 (由 c) 和 e))。我们把函子 $\mathcal{R}$ 定义为函子 ΨQ_1 , 这里 $Q_1: Q^{-1}(\text{Lib}_R(Q)) \rightarrow \text{Lib}_R(Q)$ 为由 Q 得到的函子。函子 Ψ 是函子 Q_1 的右伴随。

2.3.4. 命题2.3.3的证明。先证明 a)。首先, 如果 Y 在右边是 Q -自由的, 函子 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ 同构于函子 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Z)$, 对 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 中合适的对象 Z 。此外, 函子 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ 将 $S_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}$ 中的态射变为同构。这就证明了 $i) \implies ii)$ 。由 $B \rightarrow 0$ 是 $S_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}$ 中的态射得到 $ii) \implies iii)$ 。 $iii) \implies iv)$ 由定义和 (1.2.6) 得到。 $iv) \implies v)$ 有以下同构 (2.2.4) 得到:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Q(Y)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y \setminus S_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot)$$

¹quasi-inverse

最后, $v) \Rightarrow i)$ 是显然的, Y 在 $Q(Y)$ 右边是自由的。

论断 $b)$ 由 $a), iii)$ 得到。论断 $c)$ 由 $a), v)$ 得到。由 $a), v)$ 得到 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 中在右边可自由的对象是 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 中同构于在右边 Q -自由的对象在 Q 下的像。自由的箭头是同构。这证明了 $e)$ 。因此 $Lib_R(Q)$ 是严格全子剖分范畴。设 $Z = Z_1 \oplus Z_2$ 是 $Lib_R(Q)$ 中的对象, 则存在在右边 Q -自由的对象 Y 和一个同构 $Q(Y) \xrightarrow{\sim} Z_1 \oplus Z_2$ 。函子 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ 有一个投影, 且 Z 的分解给出了这个投影。 Z 的因子在 $Lib_R(Q)$ 当且仅当该投影是可分解的, 当 $\mathcal{D}$ 中可数直和或直积存在 (1.2.9) 时是成立的。这就证明了 $d)$ 。下面证明 $f)$ 。一个 $\mathcal{D}$ 中的对象 Z 在 $Q^{-1}(Lib_R(Q))$ 中当且仅当存在一个在右边 Q -自由的对象 Y 和 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 中的同构: $Q(Z) \xrightarrow{m} Q(Y)$ 。这样的同构形如 $m = Q(s)^{-1}Q(t), s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}), t \in \hat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ ((2.2.2) 和 (2.2.4))。因此我们有以下 $\mathcal{D}$ 中的图表:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow t & \uparrow s \\ Z & & Y \end{array}$$

由 $a), iv)$, 态射 s 可以回缩到 $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (1.2.6) 中的元素 $s' : X \rightarrow Y$ 。因此, 存在态射 $t' : Z \rightarrow Y, t' \in \hat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ 。反之, 如果存在一个这样的态射, 则态射 $Q(t') : Q(Z) \rightarrow Q(Y)$ 是一个同构。最后证明 $g)$ 。由 $a), v)$, 我们有一个双函子的同构:

$$\text{Hom}_{Q^{-1}(Lib_R(Q))}(Z, \Psi(W)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{Lib_R(Q)}(Q_1(Z), W)$$

这说明了 Ψ 是 Q_1 的右伴随。于是我们立即得到如果我们记 $i: L_R(Q) \hookrightarrow Q^{-1}(Lib_R(Q))$ 为嵌入函子，则有双函子的同构：

$$\mathrm{Hom}_{Q^{-1}(Lib_R(Q))}(Z, i(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{L_R(Q)}(\Psi Q_1(Z), Y)$$

这证明了函子 $\mathcal{R} = \Psi Q_1$ 为嵌入函子的右伴随，这就完成了命题 (2.3.3) 的证明。

命题 2.3.5. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴。 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个全子剖分范畴 ($\mathcal{B}$ 严格满), $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ 和 $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ 是 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{A}$ 中与范畴 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 相关的乘性系。

a) 以下条件是等价的：

i) 对于态射 $X \xrightarrow{s} X'$ ，其中 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}), s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ ，它被嵌入到一个交换图表中：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & X' \\ & \searrow s' & \downarrow \\ & & X'' \end{array} \quad s' \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

ii) 对任意态射 $B \rightarrow X, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}), X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ，它被嵌入到交换图表：

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & B' & \end{array} \quad B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

$\mathcal{D}$ 的全子剖分范畴 $\mathcal{A}$ 拥有以上两个等价的条件的被称为在右边 $\mathcal{B}$ -局部的子范畴。

b) 如果 $\mathcal{A}$ 是在右边 $\mathcal{B}$ -局部的, 则典范函子

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

是全忠实的且在对象上是单的。

c) 以下条件是等价的:

i) $\mathcal{A}$ 在右边 $\mathcal{B}$ -局部的。

ii) 设 $Q: \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 是典范函子, 则子范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 是在右边是 Q -自由的对象生成的。

a) 中的等价关系由 TRIII 和乘性系 $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ 和 $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ 的定义 (2.1.7) 得到。下面证明 b)。设 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 中的两个对象 (从而也是 $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 的对象)。

首先证明同态

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$$

是一个单射。定义 $Q_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 和 $Q_2: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 为典范的商函子。元素 $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y)$ 一定具有形式 $m = Q_1(s)^{-1}Q_1(f)$, $s \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ (2.2.2)。其在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$ 中的像是 $Q_2(s)^{-1}Q_2(f)$ 。由 (2.2.4, a)) 知其像为零当且仅当存在交换图表:

$$\begin{array}{ccc} & u & \nearrow \\ f \nearrow & & \uparrow t \\ X & & Y \\ & s & \nwarrow \end{array} \quad t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$$

使得 $uf = 0$ 。由 $a), i)$ 知存在一个交换图表：

$$\begin{array}{ccc} & v & \\ f \nearrow & & \nearrow t' \\ X & s & Y \end{array} \quad t' \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

使得 $vf = 0$ 。因此 $m = Q_1(t')^{-1}Q_1(vf) = 0$ 。

接下来证明同态

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$$

是满的。元素 $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$ 具有形式

$$p = Q_2(t)^{-1}Q_2(g), t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$$

由 $a), i)$ 知其有形式

$$p = Q_2(s)^{-1}Q_2(g'), s \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

因此，它提供了一个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y)$ 中的元素。

最后证明 $c)$ 中的等价。首先证明 $i) \implies ii)$ 。由 (2.3.1) 知范畴 $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ 典范同构于 $(\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B})/(\mathcal{B}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ 和典范函子

$$Q: \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

是商函子。因此，由命题 (2.3.3, a) 知要证明 $i) \implies ii)$ 只需证明对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 和 $\mathcal{B}$ 中的对象 B ， $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(B, X) = 0$ 。

一个 $\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(B, X)$ 中的元素 m 形如 $Q_3(f)Q_3(s)^{-1}$, 这里 $Q_3: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 是典范函子。而 s 是 $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, 即 $\mathcal{D}$ 的与 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 相关的乘性系 (2.2.2) 中的元素。我们有 $\mathcal{D}$ 中的图表:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ B & & X \end{array}$$

而由 B 是 $\mathcal{B}$ 的元素且 s 是 $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ 中的元素, 知 W 同构与 $\mathcal{B}$ 中的对象 (1.2.4)。因此, 根据第一个论断。态射 f 通过 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 中的对象。态射 $Q_3(f) = 0$, 从而 $m = 0$ 。接下来证明 $ii) \implies i)$ 。根据 $a)$ 只需证明对任意 $\mathcal{D}$ 中的态射 $g: B \rightarrow X$, 这里 B 是 $\mathcal{B}$ 中的对象, 而 X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 其经过一个 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 的对象。由假设 $Q_3(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(B, X)$ 为零, 因此 (2.2.4), 存在一个态射 $t: X \rightarrow X', t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ 使得 $tg = 0$ 。由集合 $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ 的定义, 存在一个 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形 (B', X, X', l, t, w) , 这里 B' 是 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 中的对象, 由 (1.2.1) 知 $tg = 0$, 从而得到 g 经过 B' 。这就完成了构造。这就完成了命题 (2.3.5) 的证明。

我们称 $\mathcal{D}$ 的全子剖分范畴 $\mathcal{A}$ 是在左边 $\mathcal{B}$ -局部的, 如果范畴 $\mathcal{D}^\circ$ 的子范畴 $\mathcal{A}^\circ$ 在右边是 $\mathcal{B}^\circ$ -局部的。

3. 剖分范畴的 Abel 化

3.1. 范畴 $A(\mathcal{D})$ 的构造

3.1.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个加性范畴而 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{D}$ 中态射的范畴 (第一章3.3.6)。 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中的态射

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

被称作可以忽略的¹如果 $f'g = hf = 0$ 。一个可以忽略的态射和任意一个态射的复合是可以忽略的。两个可以忽略的态射的直和是可以忽略的。定义范畴 $A(\mathcal{D})$ ，其对象是 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中的对象，其态射是 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中在可以忽略的意义下的态射，即对任意 $A(\mathcal{D})$ 中两个对象 U 和 V ，群 $\text{Hom}_{A(\mathcal{D})}(U, V)$ 为群 $\text{Hom}_{\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})}(U, V)$ 与其中由可以忽略的态射组成的子群构成的商群。范畴 $A(\mathcal{D})$ 是加性的。

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，典范函子

$$\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \rightarrow A(\mathcal{D})$$

的复合得到函子

$$\text{Hom}(A(\mathcal{D}), \mathcal{C}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}), \mathcal{C}) \quad (3.1.1.1)$$

¹négligeable

这个函子是全忠实的且在对象上是单的。其像是全子范畴，定义为从 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子，其将相差一个可以忽略的态射，变成相等。

3.1.2. 从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 的典范函子 $X \mapsto (X \xrightarrow{\text{id}_X} X)$ 复合典范函子 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D})$ 后是以下函子：

$$\mathcal{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}) \quad (3.1.2.1)$$

函子 $\mathcal{H}$ 是加性的。它是全忠实的且在对象上是单的，故可以将范畴 $\mathcal{D}$ 看作 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的全子范畴。

3.1.3. 设 $\mathcal{D}$ 是严格的 $\mathbb{Z}$ -范畴。 $\mathcal{D}$ 中的平移函子 $X \mapsto X[n], n \in \mathbb{Z}$ 可以扩张为 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中的自同态：

$$(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (X[n] \xrightarrow{f[n]} Y[n])$$

从 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的泛性质 (3.1.1.1) 得到这些自同态能传递到商中，因此这在 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 上定义了一个严格的 $\mathbb{Z}$ -范畴的结构。函子 $\mathcal{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D})$ 是一个严格的 $\mathbb{Z}$ -函子。

3.1.4. 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是两个严格加性的 $\mathbb{Z}$ -范畴，而 $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ 是一个加性的 $\mathbb{Z}$ -范畴 (由平凡的上闭链扭成的)。设 $\mathcal{F}\ell_1(F)$ 是由 F 扩张成的范畴的态射：

$$\mathcal{F}\ell_1(F) \left(X \xrightarrow{f} Y \right) = \left(FX \xrightarrow{Ff} FY \right)$$

函子 $\mathcal{F}\ell_1(F)$ 将 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中可以忽略的态射变为 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}')$ 中可以忽略的态射，从而得到一个函子：

$$A(F) : A(\mathcal{D}) \rightarrow A(\mathcal{D}') \quad (3.1.4.1)$$

函子 $A(F)$ 是加性的。由范畴 $A(\mathcal{D})$ 和 $A(\mathcal{D}')$ 的泛性质立即得到函子 $A(F)$ 有一个典范的 $\mathbb{Z}$ -函子的结构。

设 $F' : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}''$ 是两个严格加性的 $\mathbb{Z}$ -范畴的加性 $\mathbb{Z}$ -函子。我们有：

$$A(F')A(F) = A(F'F) \quad (3.1.4.2)$$

以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D}' \\ \mathcal{H} \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}' \\ A(\mathcal{D}) & \xrightarrow{A(F)} & A(\mathcal{D}') \end{array} \quad (3.1.4.3)$$

(函子 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 由 (3.1.2) 定义)。

类似地设 $m : F \rightarrow F''$ 是从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}''$ 的加性 $\mathbb{Z}$ -函子的态射。通过与上面类似的方式，得到一个 $\mathbb{Z}$ -函子的态射：

$$A(m) : A(F) \rightarrow A(F'') \quad (3.1.4.4)$$

如果 m 和 m' 是两个可结合的加性 $\mathbb{Z}$ -函子的态射，我们有

$$A(m')A(m) = A(m'm) \quad (3.1.4.5)$$

3.2. 范畴 $A(\mathcal{D})$ 的性质 ($\mathcal{D}$ 是剖分范畴)

3.2.0. 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是两个剖分范畴。定义 $\mathcal{E}x(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ 为范畴，其对象为从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}'$ 的正合函子，而其态射为正合函子态射。类似定义 $\mathbb{Z}\text{-Add}(A(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}'))$ 为对象为从 $A(\mathcal{D})$ 到 $A(\mathcal{D}')$ 加性 $\mathbb{Z}$ -函子，态射为 $\mathbb{Z}$ -函子态射所组成的范畴。从前面的结论可以定义一个函子：

$$A_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} : \mathcal{E}x(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Add}(A(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}')) \quad (3.2.0.1)$$

该函子将正合函子 F 变为函子 $A(F)$ 。

定理 3.2.1.¹

a) 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴，则范畴 $A(\mathcal{D})$ 是 *Abel* 的。设 $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ 是两个剖分范畴之间的正合函子，则函子 $A(F)$ (3.1.4.1) 是正合的。而函子 $A_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ (3.2.0.1) 是全忠实，而在对象上是单的。

b) $\mathcal{D}$ 中的对象在 $A(\mathcal{D})$ 中是投射的和内射的。任意 $A(\mathcal{D})$ 中的对象同构于 $\mathcal{D}$ 中对象的商对象 (对应地，子对象)。

c) 设 $\mathcal{A}$ 是一个 *Abel* 范畴。定义 $\mathcal{E}x(A(\mathcal{D}), \mathcal{A})$ 是对象为从 $A(\mathcal{D})$ 到 $\mathcal{A}$ 的正合函子，态射是函子态射，所组成的范畴。类似地，定义 $\mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ 是对象为从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{A}$ 的函子，态射为函子

¹该定理是 Freyd[17] 告诉我的。

态射，所组成的范畴。而与函子 $\mathcal{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$ 复合定义了一个函子：

$$\mathcal{E}x(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{Hom}(\mathcal{D}, \mathbf{A})$$

这个函子是全忠实的。其要像是从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathbf{A}$ 的上同调函子。特别地，函子 $\mathcal{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$ 是一个上同调函子。

该定理将在 (3.2.9) 中证明。我们先证明三个命题。

3.2.2. 设 $\mathbf{U}$ 是泛对象而 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbf{U}$ 下的，即 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbf{U}$ 的对象。设 $\mathcal{D}^\wedge$ 是从 $\mathcal{D}$ 到 Abel 群范畴的反变函子组成的范畴。范畴 $\mathcal{D}^\wedge$ 是 Abel 的而典范函子 $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^\wedge$ 将 $\mathcal{D}$ 中的对象变为其表示的函子，这个典范函子是全忠实的。函子 h 将 $\mathcal{D}$ 中的对象变为 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的投射对象。

$\mathcal{D}^\wedge$ 中的对象被称作可接受的，如果它是可表函子之间的态射的像。设 $\mathcal{I}m : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}^\wedge$ 为函子：

$$\mathcal{I}m(X \xrightarrow{f} Y) = \text{态射}_{h(f)} \text{的像} \quad (3.2.2.1)$$

函子 $\mathcal{I}m$ 是加性的，而将可以忽略的态射变为零态射。它唯一地经过一个加性函子，也记为

$$\mathcal{I}m : \mathbf{A}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}^\wedge \quad (3.2.2.2)$$

函子的复合 $\mathcal{I}m \circ \mathcal{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}^\wedge$ 正是函子 h 。 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的对象同构于 $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ 在 $\mathcal{I}m$ 下的像当且仅当它是可接受的。

命题 3.2.3. 函子 $\mathcal{I}m : \mathbf{A}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}^\wedge$ 是全忠实的。

设

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} = (g, g')$$

是 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中的态射。记态射 (g, g') 在 $\mathcal{I}m$ 下的像为 $\mathcal{I}m((g, g'))$ 。
 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中的图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \text{id}_X \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

作用 $\mathcal{I}m$ 函子，得到图表

$$h(X) \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_X, f))} \mathcal{I}m(f) \xrightarrow{\mathcal{I}m((f, \text{id}_Y))} h(Y)$$

我们有等式

$$\mathcal{I}m((f, \text{id}_Y)) \circ \mathcal{I}m((\text{id}_X, f)) = h(f) \quad (3.2.3.1)$$

设 (X, Y, f) 和 (X', Y', f') 为 $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ 中的两个对象。为了证明命题 (3.2.3)，只需证明由函子 $\mathcal{I}m$ 定义的同态

$$\text{Hom}_{\mathbf{A}(\mathcal{D})}((X, Y, f), (X', Y', f')) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(\mathcal{I}m(f), \mathcal{I}m(f')) \quad (3.2.3.2)$$

是同构。我们首先证明这是单射。设

$$(g, g') : (X, Y, f) \rightarrow (X', Y', f')$$

是 $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ 中的态射使得 $\mathcal{I}m((g, g')) = 0$ 。态射的复合

$$\mathcal{I}m((f', \text{id}_X Y')) \circ \mathcal{I}m((g, g')) \circ \mathcal{I}m((\text{id}_X, f))$$

等于态射 $h(g'f)$ 。因此 $h(g'f) = 0$ ，由于函子 h 是全忠实的，因此有 $g'f = 0$ 。因此态射 (g, g') 是可以忽略的。为了证明同态 (3.2.3.2) 是满的，只需证明一下引理：

引理 3.2.4. 设 $\mathcal{I}m(f) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{I}m(f')$ 是 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的态射，则存在两个 $\mathcal{D}$ 中的态射 $g : X \rightarrow X'$ 和 $g' : Y \rightarrow Y'$ 使得以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} h(X) & \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_X, f))} & \mathcal{I}m(f) \\ h(g) \downarrow & & \downarrow \alpha \\ h(X') & \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_X X', f'))} & \mathcal{I}m(f') \end{array} \quad (3.2.4.1)$$

$$\begin{array}{ccc} h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\ h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\ h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y') \end{array} \quad (3.2.4.2)$$

事实上，由引理立即可以得到态射 α 等于态射 $\mathcal{I}m((g, g'))$ ，于是由等式 (3.2.3.1) 立即得到 $\mathcal{I}m((\text{id}_X, f))$ 是 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的满射。

为了证明引理 (3.2.4)，注意到态射

$$h(X') \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_X X', f'))} \mathcal{I}m(f')$$

在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中是满射，可表函子在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中是投射对象。故存在态射 $g: X \rightarrow X'$ 使得图表 (3.2.4.1) 是交换的。

现在来证明存在态射 $g': Y \rightarrow Y'$ 。从 TRI 和 TRII 知存在两个特异三角形 (Z, X, Y, u, f, v) 和 (Z', X', Y', u', f', v') 。对于任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 W ，函子 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, \cdot)$ 是上同调函子 (1.2.1)，则序列

$$h(Z) \xrightarrow{h(u)} h(X) \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_X, f))} \mathcal{I}m(f) \rightarrow 0$$

$$h(Z') \xrightarrow{h(u')} h(X') \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_{X'}, f'))} \mathcal{I}m(f') \rightarrow 0$$

是正合的。由于 $h(Z)$ 在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中是投射的，故存在态射 $g'': Z \rightarrow Y'$ 使得以下图表

$$\begin{array}{ccc} h(Z) & \xrightarrow{h(u)} & h(X) \\ h(g'') \downarrow & & \downarrow h(g) \\ h(Z') & \xrightarrow{h(u')} & h(X') \end{array}$$

是交换的，由 TRIII 知存在态射 g' 使得 (g'', g, g') 是三角形的态射。特别地，图表 (3.2.4.2) 是交换的。这就证明了引理 (3.2.4) 和命题 (3.2.3)。

命题 3.2.5. 设 V 和 V' 是 $\mathcal{D}^\wedge$ 中两个可接受的对象，而 $\alpha: V \rightarrow V'$ 是 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的态射。则 α 在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的核和余核都是可接受的对象。

由 (3.2.3) 知可以假设 $v = \mathcal{I}m(f)$ 和 $v' = \mathcal{I}m(f')$ 而 α 是由态射 $h(f)$ 和 $h(f')$ 的像通过以下交换图表诱导出的态射:

$$\begin{array}{ccc} h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\ h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\ h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y') \end{array}$$

设 $(Z, X, Y', u, f'g, v)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形, 则图表

$$\begin{array}{ccc} h(Z) & \xrightarrow{h(fu)} & h(Y) \\ h(u) \downarrow & & \downarrow \text{id}_{h(Y)} \\ h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\ h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\ h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y') \end{array}$$

得到每行的态射的像之间的态射:

$$\mathcal{I}m(fu) \xrightarrow{\beta} v \xrightarrow{\alpha} v' \quad (3.2.5.1)$$

我们将说明态射 $\mathcal{I}m(fu) \xrightarrow{\beta} v$ 是 α 的核。首先, 显然 β 是一个单射, 事实上, $\mathcal{I}m(fu)$ 和 v 都是 $h(Y)$ 的子对象。另外, 复合 $\alpha\beta$ 是零, 事实上, 典范态射 $h(Z) \rightarrow \mathcal{I}m(fu)$ 是满的, 典范态射 $v' \rightarrow h(Y')$ 是单的, 而复合 $h(f'gu)$ 是一个特异三角形中连续两个态射复合后在 h 下的像, 故为零 (1.2.2)。最后证明 (3.2.5.1) 在 v 处是正合的。设 w 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象, 一个从 $h(w)$ 到 v 的态射 σ 得到一个从 $h(w)$ 到 $h(X)$ 的态射 $(h(w)$

在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中是投射对象), 即存在态射 $m: W \rightarrow X$, 该态射与 α 为零当且仅当 $f'gm = 0$ (V' 是 $h(Y')$ 的子对象)。由 (1.2.1) 知存在一个态射 $n: W \rightarrow Z$ 使得 $un = m$ 。则态射 σ 经过 $\mathcal{I}m(fu)$ 。

现在证明 α 在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的余核是 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的可接受的对象。设 $(X, Y', Z', g'f, u', v')$ 是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形。则图表:

$$\begin{array}{ccc}
 h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\
 h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\
 h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y') \\
 \text{id}_{h(X')} \downarrow & & \downarrow h(u') \\
 h(X') & \xrightarrow{h(u'f')} & h(Z')
 \end{array}$$

得到每行的像的态射

$$V \xrightarrow{\alpha} V' \xrightarrow{\gamma} \mathcal{I}m(u'f') \quad (3.2.5.2)$$

因此, γ 是满射, 事实上, V' 和 $\mathcal{I}m(u'f')$ ¹ 是 $h(X')$ 的商对象。而复合 $\gamma\alpha$ 是零, 事实上, 典范态射 $h(X) \rightarrow V$ 是满射, 典范态射 $\mathcal{I}m(u'f') \rightarrow h(Z')$ 是单射, 且复合 $h(u'g'f)$ 是特异三角形中相连两个态射复合后在 h 下的像, 从而为零 (1.2.2)。于是只需证明 (3.2.5.2) 在 V' 处是正合的。为此, 根据 $\mathcal{D}^\wedge$ 中正合序列的性质, 只需证明对 $\mathcal{D}$ 中的任何对象 w 有 Abel 群

¹原书为 $\mathcal{I}m(u'f)$

的序列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\wedge}}(h(W), V) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\wedge}}(h(W), V') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\wedge}}(h(W), \mathcal{I}m(u'f'))$$

是正合的。设 σ 是 $h(W)$ 到 V' 的一个态射，则态射 σ 复合从 V' 到 $h(Y')$ 的典范态射，得到从 $h(W)$ 到 $h(Y')$ 的态射，即有态射 $m: W \rightarrow Y'$ 。复合 $\gamma\sigma$ 为零当且仅当 $u'm = 0$ ($\mathcal{I}m(u'f')$ 是 $h(Z')$ 的子对象)。故存在 (1.2.1) 态射 $n: W \rightarrow X$ 使得 $g'fn = m$ 。再复合典范态射 $h(X) \rightarrow V$ 便得到一个态射 $\sigma': h(W) \rightarrow V$ 。又 V' 是 $h(Y')$ 的子对象，我们有 $\alpha\sigma' = \sigma$ ，这就完成了命题 (3.2.5) 的证明。

3.2.6. 从命题 (3.2.3) 得到范畴 $A(\mathcal{D})$ 等价于 $\mathcal{D}^{\wedge}$ 中可接受的对象组成的全子范畴。由命题 (3.2.5) 得到 $\mathcal{D}^{\wedge}$ 中可接受的对象组成的全子范畴是 Abel 的子范畴，因此范畴 $A(\mathcal{D})$ 是一个 Abel 范畴。

命题 3.2.7. 对于 $A(\mathcal{D})$ 中的正合序列：

$$0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3$$

同构与由以下交换图表定义的 $A(\mathcal{D})$ 中的序列：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{u_1} & X_2 & \xrightarrow{u_2} & X_3 \\ \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{Y_1}} & Y_2 = Y_1 & \longrightarrow & Y_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} (X_i \xrightarrow{f_i} Y_i) \simeq V_i \\ 1 \leq i \leq 3 \end{array}$$

使得图表

$$X_1 \xrightarrow{u_1} X_2 \xrightarrow{f_3 u_2} Y_3$$

可以嵌入到一个特异三角形 $(X_1, X_2, Y_3, u_1, f_3 u_2, u_3)$ 中。

这立即由命题 (3.2.5) 的证明得到。

3.2.8. 定理 (3.2.1) 中断言 a) 和 b) 的证明。从 (3.2.6) 得到范畴 $A(\mathcal{D})$ 是 Abel 的。设 $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ 是一个正合函子。则由命题 (3.2.7) 得到函子 $A(F)$ 是左正合的。另外, 由范畴 $A(\mathcal{D})$ 的构造知, 范畴 $A(\mathcal{D}^\circ)^\circ$ 典范同构于范畴 $A(\mathcal{D})$, 而函子 $A(F^\circ)^\circ$ 典范同构于函子 $A(F)$ 。而函子 F° 是正合的 (1.1.7), 我们得到函子 $A(F^\circ)$ 是左正合的, 因此函子 $A(F)$ 是右正合的, 从而是正合的。 $\mathcal{D}^\wedge$ 中可接受的对象同构于一个可表函子的子对象和一个可表函子的商对象。而可表函子在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中是投射对象。由 (3.2.5) 知它们在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中的可接受的对象构成的全子范畴中是投射的。因此 (3.2.3) $\mathcal{D}$ 中的对象在 $A(\mathcal{D})$ 中是投射的。因此 $\mathcal{D}^\circ$ 中对象在 $A(\mathcal{D}^\circ)$ 中是投射的, 从而传递到其反范畴, 得到 $\mathcal{D}$ 中对象在 $A(\mathcal{D})$ 中是内射的。而函子 $A_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ 是全忠实的可以留给读者: 正合函子之间的态射由它们在足够多的投射对象上的值唯一确定。

3.2.9. 定理 (3.2.1) 的证明的完成。为了证明函子 $\mathcal{H}: \mathcal{D} \rightarrow A(\mathcal{D})$ 是上同调函子, 设 (X, Y, Z, f, g, h) 是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角形, 只

需证明序列

$$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(f)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(g)} \mathcal{H}(Z)$$

是正合的, 由 (3.2.3) 和 (3.2.5) 知只需证明序列

$$h(X) \xrightarrow{h(f)} h(Y) \xrightarrow{h(g)} h(Z) \quad (3.2.9.1)$$

在 $\mathcal{D}^\wedge$ 中是正合的。而序列 (3.2.9.1) 是正合的当且仅当对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 W , 有序列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), h(X)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), h(Y)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), h(Z))$$

是正合的。这由 h 是全忠实的和 (1.2.1) 得到。

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 而

$$\mathcal{E}x(\mathcal{A}(\mathcal{D}), \mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$$

是复合 $\mathcal{H}$ 的函子, 则显然该函子是全忠实的: 正合函子之间的态射由他们在足够多的投射对象上的值所唯一确定。因此只需证明对于一个上同调函子 $\Psi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$, 它经过 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathcal{A}(\mathcal{D}) \\ & \searrow \Psi & \downarrow \Phi \\ & & \mathcal{A} \end{array} \quad (3.2.9.2)$$

且函子 Φ 是正合的。对任意 $X \xrightarrow{f} Y$ 为 $A(\mathcal{D})$ 中的对象，设

$$\Phi(X \xrightarrow{f} Y) = \mathcal{A} \text{ 中 } \Psi(X) \xrightarrow{\Psi(f)} \Psi(Y) \text{ 的像}^1$$

可以验证以上定义的 $A(\mathcal{D})$ 到 $\mathcal{A}$ 的函子使得图表 (3.2.9.2) 是交换的。为了证明 Φ 是正合的，从 (3.2.7) 知 Φ 是左正合的，通过传递到反范畴知 Φ 是右正合的。这就完成了定理 (3.2.1) 的证明。

注 3.2.10. 1) 定理 (3.2.1,c)) 描述的泛性质在同构意义下决定了 $A(\mathcal{D})$ 。

2) 当 $\mathcal{D}$ 中可数直和存在或更好地，可数直积存在时，对 $A(\mathcal{D})$ 任意投射对象 (对应地，内射对象) 均同构于 $\mathcal{D}$ 中的一个对象。事实上，这样的对象是 $A(\mathcal{D})$ 内 $\mathcal{D}$ 中对象的直和因子，因此是 $\mathcal{D}$ 中对象的投射的核。而根据假设， $\mathcal{D}$ 中的投射是可分解的 (1.2.9)。

¹我们注意到函子 Φ 的构造与其在 $\mathcal{A}$ 中的像的选择无关。该选择在同构意义下是唯一的。我们总是说，像函子是 $\mathcal{A}$ 中的一个恒同态射 id_T ，即一个对象 T 和态射 $T \xrightarrow{\text{id}_T} T$ 。

4. 谱对象

为了更好地应用到剖分范畴中，我们需要展示 [1] 第 XV 章 §7 中的谱序列。

4.1. 谱对象的定义

4.1.1. 设 $\mathcal{J}$ 是一个范畴，对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，设 $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ 是范畴 $\mathcal{J}$ 中 n 个可结合的态射的序列 (第一章3.3.6)。我们定义三个函子 $s_i : \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), 1 \leq i \leq 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}) \\ s_1 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = \xrightarrow{f} \\ s_2 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = \xrightarrow{gf} \\ s_3 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = \xrightarrow{g} \end{array} \right. \quad (4.1.1.1)$$

和两个函子态射：

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 : s_1 \rightarrow s_2 \text{ 定义为} \\ u_1 \left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} \\ \text{id} \downarrow & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} \\ & \downarrow g & \\ & \xrightarrow{gf} & \end{array} & \downarrow g \end{array} \right) = \text{id} \\ \\ u_2 : s_2 \rightarrow s_3 \text{ 定义为} \\ u_2 \left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} \\ f \downarrow & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{gf} & & \xrightarrow{g} \\ & \downarrow \text{id} & \\ & \xrightarrow{g} & \end{array} & \downarrow \text{id} \end{array} \right) = f \end{array} \right. \quad (4.1.1.2)$$

4.1.2. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴而 $\mathcal{J}$ 是一个范畴，一个取值为 $\mathcal{D}$ 的 $\mathcal{J}$ -形式的谱对象是由两个函子组成的对象：

a) 一个函子 $X : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{D}$ ：

$$\left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} \end{array} \right) \mapsto X_f$$

b) 一个从 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 到 $\mathcal{D}$ 中特异三角形组成的范畴的函子：

$$\omega_2 = \left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} \end{array} \right) \mapsto X_f \xrightarrow{X \star u_1(\omega_2)} X_{gf} \xrightarrow{X \star u_2(\omega_2)} X_g \xrightarrow{\delta(\omega_2)} X_f[1]$$

对任意 $\mathcal{J}$ 形式的谱对象，用记号 $(X_f, f \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), \delta(\omega_2), \omega_2 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}))$ 表示，或者在不引起混淆的情况下记为 (X_f, δ) 。

4.1.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个加性范畴, 而 $F : \mathcal{J} \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ 是一个函子。根据第一章 (3.3.6) 可以将 F 关联到一个取值在 $\kappa(\mathcal{C})$ 中的谱对象。在第一章 (3.3.6) 中描述的谱对象称作与函子 F 关联的谱对象。

4.1.4. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 而 $\mathcal{J}$ 是一个范畴。一个取值在 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{J}$ 形式的谱对象由以下组成:

a) 一系列函子 $H^n : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}$ 。

b) 对任意 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的对象 $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ 和任意 n , 有态射 $\delta^n(\omega_2) : H^n(g) \rightarrow H^{n+1}(f)$, 关于 ω_2 有函子性, 使得图表:

$$\cdots \rightarrow H^n(f) \xrightarrow{H^n * u_1(\omega_2)} H^n(gf) \xrightarrow{H^n * u_2(\omega_2)} H^n(g) \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} H^{n+1}(f) \rightarrow \cdots$$

在 $\mathcal{A}$ 中是无限长的正合序列。

我们用记号

$$(H^n(f), f \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), \delta^n(\omega_2), \omega_2 \in \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}))$$

表示 $\mathcal{J}$ 形式的谱对象。或者在不引起混淆的情况下记为 $(H^n(f), \delta)$ 。

4.1.5. 设 $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ 是两个剖分范畴之间的正合函子。设 (X_f, δ) 是取值为 $\mathcal{D}$ 中的形式为 $\mathcal{J}$ 的谱对象, 则 $(FX_f, F\delta)$ 是取

值为 $\mathcal{D}'$ 的形式为 $\mathcal{J}$ 的谱对象。类似地，一个从剖分范畴到 Abel 范畴的上同调函子 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ 也将一个取值为 $\mathcal{D}$ 的谱对象变为取值为 $\mathcal{A}$ 的谱对象。

4.1.6. 设 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴，而 (X_f, δ) 和 (Y_f, δ') 是两个取值为 $\mathcal{D}$ 的 $\mathcal{J}$ 形式的谱对象。一个谱对象的态射是一个函子

$$m_f : X_f \rightarrow Y_f, f \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J})$$

使得对任意 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的对象 $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ 有交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X_g & \xrightarrow{\delta(\omega_2)} & X_f[1] \\ m_g \downarrow & & \downarrow m_f[1] \\ Y_g & \xrightarrow{\delta'(\omega_2)} & Y_f[1] \end{array}$$

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴，而 $(H^n(f), \delta)$ 和 $(H'^n(f), \delta')$ 是两个取值为 $\mathcal{A}$ 的形式为 $\mathcal{J}$ 的谱对象，他们之间的态射是一个函子态射：

$$m^n : H^n(f) \rightarrow H'^n(f), f \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), n \in \mathbb{Z}$$

使得对任意 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的对象 $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ 有交换图表：

$$\begin{array}{ccc} H^n(g) & \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} & H^{n+1}(f) \\ m^n(g) \downarrow & & \downarrow m^{n+1}(f) \\ H'^n(g) & \xrightarrow{\delta'^n(\omega_2)} & H'^{n+1}(f) \end{array}$$

取值在 $\mathcal{D}$ (对应地, $\mathcal{A}$) 的 $\mathcal{J}$ 形式的谱对象构成一个范畴。

4.2. 谱序列的机制

4.2.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 而 $(H^n(f), \delta)$ 是一个 $\mathcal{J}$ 形式的谱对象, 对任意 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的对象 $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$, 设

$$\left\{ \begin{array}{l} B\left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_2 \end{smallmatrix}\right] = B\left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix}\right] = \text{Im}(H^{n-1}(g) \xrightarrow{\delta^{n-1}(\omega_2)} H^n(f)) \\ \qquad \qquad \qquad \simeq \text{Ker}(H^n(f) \xrightarrow{H^n \star u_1(\omega_2)} H^n(gf)) \\ Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_2 \end{smallmatrix}\right] = Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix}\right] = \text{Ker}(H^n(g) \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} H^{n+1}(f)) \\ \qquad \qquad \qquad \simeq \text{Im}(H^n(gf) \xrightarrow{H^n \star u_2(\omega_2)} H^n(g)) \end{array} \right. \quad (4.2.1.1)$$

这样我们定义了两个从 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 到 $\mathcal{A}$ 的函子。由定义得到包含关系

$$B\left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix}\right] \subset H^n(f), Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix}\right] \subset H^n(g)$$

设 $\omega_3 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \xrightarrow{h}$ 是 $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$ 中的一个对象。

命题 4.2.2. 我们有包含关系

$$B\left[\begin{smallmatrix} n \\ g, h \end{smallmatrix}\right] \subset Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix}\right] \subset H^n(g)$$

第二个包含关系在前面得到了。为了证明第一个包含关系, 只需证明以下两个态射的复合是零:

$$H^{n-1}(h) \xrightarrow{\delta_1} H^n(g) \xrightarrow{\delta_2} H(f)$$

对于 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的对象 $\xrightarrow{g} \xrightarrow{h}$, 有正合序列:

$$H^{n-1}(h) \xrightarrow{\delta_1} H^n(g) \xrightarrow{u} H^n(hg)$$

而 $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的态射:

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow h \\ & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{hg} & \end{array}$$

得到交换图表:

$$\begin{array}{ccc} H^n(g) & \xrightarrow{\delta_2} & H^{n+1}(f) \\ u \downarrow & \nearrow \delta_3 & \\ H^n(hg) & & \end{array}$$

这就是结论。

4.2.3. 定义

$$E\left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_3 \end{smallmatrix}\right] = E\left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g, h \end{smallmatrix}\right] = Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n \\ g, h \end{smallmatrix}\right] \quad (4.2.3.1)$$

这样我们就定义了从 $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$ 到 $\mathcal{A}$ 的一个函子。

现在设 $\omega_3 = \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ 是 $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$ 中的对象, $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的对象 $\xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ 得到一个正合序列:

$$H^n(f_3) \xrightarrow{u} H^n(f_4 f_3) \rightarrow H^n(f_4) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(f_3)$$

另外, $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ 中的态射:

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f_2} & & \xrightarrow{f_3} & \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow f_4 \\ & \xrightarrow{f_2} & & \xrightarrow{f_4 f_3} & \end{array}$$

得到交换图表：

$$\begin{array}{ccc} H^n(f_4 f_3) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(f_2) \\ \uparrow u & \nearrow \delta & \\ H^n(f_3) & & \end{array}$$

因此，以下图表：

$$\begin{array}{ccccc} H^n(f_4 f_3) & \longrightarrow & H^n(f_4) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(f_3) \\ \uparrow u & \searrow \delta & & & \\ H^n(f_3) & \longrightarrow & H^{n+1}(f_2) & & \end{array}$$

定义了一个态射：

$$\Psi^n(\omega_3) : Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow H^{n+1}(f_2) / B \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix} \right]$$

我们有

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\Psi^n(\omega_3)) &= Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{smallmatrix} \right] \\ \text{Im}(\Psi^n(\omega_3)) &= B \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{smallmatrix} \right] / B \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix} \right] \end{aligned}$$

因此态射 $\Psi^n(\omega_3)$ 定义了一个同构：

$$\Phi^n(\omega_3) : Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{smallmatrix} \right] / Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{\sim} B \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{smallmatrix} \right] / B \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix} \right]$$

设 $\omega_5 = \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4} \xrightarrow{f_5}$ 是 $\mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$ 中的对象，则典范态射

$$E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{smallmatrix} \right] / Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] \rightarrow E\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right]$$

与同构 $\Phi^n(f_2, f_3, f_4)$ 复合，得到一个态射：

$$d^n(\omega_5) = d^n(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) : E\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{smallmatrix}\right] \rightarrow E\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] \quad (4.2.3.2)$$

我们有

$$\begin{cases} \text{Im}(d^n(\omega_5)) = B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] \\ \text{Ker}(d^n(\omega_5)) = Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_4, f_5 \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \quad (4.2.3.3)$$

态射 $d^n(\omega_5)$ 以一种显然的方式，对于 ω_5 是函子性的。

命题 4.2.4. 设 $\omega_7 = \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4} \xrightarrow{f_5} \xrightarrow{f_6} \xrightarrow{f_7}$ 是 $\mathcal{F}\ell_7(\mathcal{J})$ 中的元素，设

$$d_1 = d^{n-1}(f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)$$

$$d_2 = d^n(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$$

则态射的复合

$$E\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ f_5, f_6, f_7 \end{smallmatrix}\right] \xrightarrow{d_1} E\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{smallmatrix}\right] \xrightarrow{d_2} E\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right]$$

是零，我们有典范同构：

$$\text{Ker}(d_2) / \text{Im}(d_1) \simeq E\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4, f_6 f_5 \end{smallmatrix}\right] \quad (4.2.4.1)$$

这由(4.2.3.1) 和 (4.2.3.3) 立即得到。

4.2.5. 态射 $d^n(\omega_5), \omega_5 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$, 被称作与所考虑的谱对象相关的微分。而函子 (4.2.3.1) 的全体 $\omega_3 \mapsto E[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_3 \end{smallmatrix}]$, $\omega_3 \in \mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$, 和其微分 (4.2.3.2) $d^n(\omega_5), \omega_5 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$, 被称作与谱对象 $(H^n(f), \delta)$ 相关联的谱家族¹。

4.2.6. 设 $\omega_4 = \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ 是 $\mathcal{F}\ell_4$ 中的对象, 我们可以得到 $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$ 中的图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{f_1} & & \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\
 & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{f_2} & \xrightarrow{f_2 f_1} & \downarrow f_2 & \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 f_2 & & \downarrow f_3 \\
 & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{f_3} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{f_3} & \downarrow f_3 & \\
 \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_4 \\
 & \xrightarrow{f_4} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

作用函子 $E[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_3 \end{smallmatrix}]$, 得到三个 $\mathcal{A}$ 中的正合序列:

$$0 \rightarrow B[\begin{smallmatrix} n \\ f_2, f_4 f_3 \end{smallmatrix}] / B[\begin{smallmatrix} n \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}] \rightarrow E[\begin{smallmatrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix}] \rightarrow E[\begin{smallmatrix} n \\ f_1, f_2, f_4 f_3 \end{smallmatrix}] \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E[\begin{smallmatrix} n \\ f_1, f_2, f_4 f_3 \end{smallmatrix}] \rightarrow E[\begin{smallmatrix} n \\ f_1, f_3 f_2, f_4 \end{smallmatrix}] \rightarrow E[\begin{smallmatrix} n \\ f_2 f_1, f_3, f_4 \end{smallmatrix}] \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E[\begin{smallmatrix} n \\ f_2 f_1, f_3, f_4 \end{smallmatrix}] \rightarrow E[\begin{smallmatrix} n \\ f_2, f_3, f_4 \end{smallmatrix}] \rightarrow Z[\begin{smallmatrix} n \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}] / Z[\begin{smallmatrix} n \\ f_2 f_1, f_3 \end{smallmatrix}] \rightarrow 0$$

¹spectral family

现在设 $f_i, i \in \mathbb{Z}$ 是无限长的 $\mathcal{J}$ 中可结合的态射，则由上面微分的定义，可以得到一个无限长的正合序列：

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow E \begin{bmatrix} n-1 \\ f_{i+3}, f_{i+4}, f_{i+5} \end{bmatrix} &\xrightarrow{d^{n-1}} E \begin{bmatrix} n \\ f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3} \end{bmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow E \begin{bmatrix} n \\ f_{i+1}, f_{i+3}, f_{i+4} \end{bmatrix} &\rightarrow E \begin{bmatrix} n \\ f_{i+2}, f_{i+3}, f_{i+4} \end{bmatrix} \xrightarrow{d^n} E \begin{bmatrix} n+1 \\ f_i, f_{i+1}, f_{i+2} \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

感兴趣的读者可以阐释该序列与传统谱序列的低次的 5 元正合序列之间的关系。

4.2.7. 对 $\mathcal{A}$ 中的交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \nearrow & \downarrow \phi & \searrow \psi & \\ X' & \xrightarrow{\phi'} & X & \xrightarrow{\eta} & X'' \end{array}$$

其中最后一行是正合的。由 η 的定义得到一个同构 ([1] p. 316, Lemma 1.1)：

$$\text{Im}(\phi) / \text{Im}(\phi') \simeq \text{Im}(\psi)$$

设 $\omega_3 = f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$ 是 $\mathcal{F}_{\ell_3}(\mathcal{J})$ 中的对象，应用前面的注得到一个图表：

$$\begin{array}{ccccc} & & H^n(f_2 f_1) & & \\ & \nearrow \delta & \downarrow & \searrow & \\ H^{n-1}(f_3) & \xrightarrow{\delta} & H^n(f_2) & \longrightarrow & H^n(f_3 f_2) \end{array}$$

我们得到一个同构：

$$E \begin{bmatrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{bmatrix} \simeq \text{Im}(H^n(f_2 f_1) \rightarrow H^n(f_3 f_2)) \quad (4.2.7.1)$$

类似地应用注得到一个图表:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(f_2 f_1) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 H^n(f_1) & \longrightarrow & H^n(f_3 f_2 f_1) & \longrightarrow & H^n(f_3 f_2)
 \end{array}$$

我们得到一个同构:

$$E\left[\begin{array}{c} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{array}\right] \simeq \text{Im}(H^n(f_2 f_1) \rightarrow H^n(f_3 f_2 f_1)) / \text{Im}(H^n(f_1) \rightarrow H^n(f_3 f_2 f_1)) \quad (4.2.7.2)$$

4.3. 项 $E\left[\begin{array}{c} n \\ -\infty, p, q, +\infty \end{array}\right]$

4.3.1. 设 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 是有序集 $\mathbb{Z}$ 加上一个始对象 $-\infty$ 和一个终对象 $+\infty$ 。同样用记号 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 表示与有序集 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 相关联的范畴。 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 中的态射是一个对 $p \leq q$, 其中 p 和 q 是 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 中的元素。一个有序列 $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ 定义了一个 $\mathcal{F}_{\ell_{n-1}}(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的对象, 记为 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 。一个 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 中的态射被称作有限的如果其始和终都在 $\mathbb{Z}$ 中。一个 $\mathcal{F}_{\ell_n}(\mathcal{J})$ 中的对象被称作有限的如果其中的态射及其复合都是有限的。

4.3.2. 我们只会使用 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 形式的谱对象, 现在我们直接称作谱对象。这样我们再次得到 [1] 的第 XV 章 §7 中的记号。设 $(H^n(p, q), \delta, p \leq q \in \tilde{\mathbb{Z}})$ 是一个取值在 Abel 群 $\mathcal{A}$ 中的谱对象。

设

$$F^p H^n(-\infty, +\infty) = \text{Im}(H^n(-\infty, p) \rightarrow H^n(-\infty, +\infty)) \quad (4.3.2.1)$$

我们有 $F^{+\infty} H^n(-\infty, +\infty) = H^n(-\infty, +\infty)$ 和 $F^{-\infty} H^n(-\infty, +\infty) = 0$ 。则 $F^p H^n(-\infty, +\infty)$ 形成一个 $H^n(-\infty, +\infty)$ 的形式为 $\mathbb{Z}$ 的过滤。另外, 对任意 $p \leq q$ 有同构 (4.2.7.2):

$$E\left[-\infty, p, q, +\infty\right]^n \simeq F^q H^n(-\infty, +\infty) / F^p H^n(-\infty, +\infty)$$

4.3.3. 我们格外对项 $E\left[p-r+1, p, p+1, p+r\right]^n, p \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}, r > 0$ 感兴趣。因为, 在某些合适的假设下, 它们将决定与 $H^n(\infty, +\infty)$ 相关的分级。重新使用 *loc. cit.* 中的记号, 我们有:

$$\left\{ \begin{array}{l} E\left[p-r, p-1, p, p+r-1\right]^n = I_r^{-p, n+p} \\ \text{即} \\ I_r^{p, q} = E\left[-p-r, -p-1, -p, -p+r-1\right]^{p+q}, p, q \in \mathbb{Z}, 1 \leq r \leq +\infty \\ \text{对应的微分记作} \\ d^r : I_r^{p, q} \rightarrow I_r^{p+r, q-r+1} \end{array} \right. \quad (4.3.3.1)$$

我们也常常使用以下记号：

$$\left\{ \begin{array}{l} E\left[\begin{array}{c} n \\ p-r+1, p, p+1, p+r \end{array} \right] = \Pi_{r+1}^{n-p, p} \\ \text{即} \\ \Pi_r^{p, q} = E\left[\begin{array}{c} p+q \\ q-r+2, q, q+1, q+r-1 \end{array} \right], p, q \in \mathbb{Z}, 2 \leq r \leq +\infty \\ \text{对应的微分记作} \\ d^r : \Pi_r^{p, q} \rightarrow \Pi_r^{p+r, q-r+1} \end{array} \right. \quad (4.3.3.2)$$

在每个情况下，我们将说明使用的哪一个记号。注意到若使用记号 (4.3.3.1)，则定义对所有 $r \geq 1$ 成立，而当使用记号 (4.3.3.2) 时，该定义只对 $r \geq 2$ 成立。

项 $E\left[\begin{array}{c} n \\ p-r+1, p, p+1, p+r \end{array} \right], n, p \in \mathbb{Z}, 1 \leq r \leq +\infty$ 的全体与他们之间的微分一起叫做与谱对象 $(H^n(p, q), \delta(p, q, r))$ 相关的谱序列。

4.4. 收敛

4.4.1. 对于谱序列的收敛性的细节的研究，我们参考 *loc. cit.* 而只是使用下面的记号：

定义 4.4.2. 我们称一个取值在 $\mathcal{A}$ 中的谱对象是稳定的¹，如

¹fr:stationnaire

果对任意 n , 存在两个项 $u(n), v(n) \in \mathbb{Z}$ 使得

$$H^n(p, q) = 0, u(n) \leq p \leq q \leq +\infty$$

$$H^n(p, q) = 0, -\infty \leq p \leq q \leq v(n)$$

定理 4.4.3. 设 $(H^n(p, q), \delta)$ 是一个稳定的谱对象。

a) 对任意 n , 过滤 $F^p H^n(-\infty, +\infty), p \in \mathbb{Z}$ 是稳定的, 即存在项 $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{Z}$ 使得:

$$F^{n_1} H^n(-\infty, +\infty) = 0 \text{ 且 } F^{n_2} H^n(-\infty, +\infty) = H^n(-\infty, +\infty)$$

b) 从 $E\left[\begin{smallmatrix} n \\ r, p, q, s \end{smallmatrix}\right]$ 出发 (对应地, 以其为目标) 为零如果 $r \leq v(n+1)$ (对应地, $u(n-1) \leq s$) 而且:

c) 对任意 n 和对 $p \leq q$, 对象 $E\left[\begin{smallmatrix} n \\ r, p, q, s \end{smallmatrix}\right]$ 当

$$-\infty \leq r \leq v(n+1) \text{ 且 } u(n-1) \leq s \leq \infty$$

是典范同构的。

该定理由定义立即得到。

一个稳定的谱对象, 在 *loc. cit.* 的意义下形成一个收敛的谱序列。我们称与一个谱对象相关的谱序列是稳定的,

或者称为收敛的, 如果其谱对象是稳定的。用 (4.3.3) 中第一个记号或者第二个记号, 我们写作

$$I_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty, +\infty)$$

$$\Pi_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty, +\infty)$$

来表示一个谱序列的收敛。项 $H^{p+q}(-\infty, +\infty)$ 称作该谱序列的终止¹。

4.4.4. 设 $(H^n(p, q), \delta)$ 和 $(H'(p, q), \delta')$ 为两个取值在 $\mathcal{A}$ 中的谱序列, 而 $m^n(p, q) : H^n(p, q) \rightarrow H'^n(p, q)$ 是谱对象的态射。将该态射得到一个谱家族的态射, 即一族态射:

$$m \left[\begin{smallmatrix} n \\ p, q, r, s \end{smallmatrix} \right] : E \left[\begin{smallmatrix} n \\ p, q, r, s \end{smallmatrix} \right] \rightarrow E' \left[\begin{smallmatrix} n \\ p, q, r, s \end{smallmatrix} \right]$$

与微分之间交换。特别地, 态射 $m_{(p,q)}$ 得到对应谱序列的态射:

$$m_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r'^{p,q}$$

(这里 $E_r^{p,q} = I_r^{p,q}$ 或 $E_r^{p,q} = \Pi_r^{p,q}$ 是 (4.3.3) 中第一个或第二个记号。)

命题 4.4.5. 设谱对象 $(H^n(p, q), \delta)$ 和 $(H'(p, q), \delta')$ 是稳定的, 且对合适的 r , 态射

$$m_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r'^{p,q}$$

¹fr:aboutissement

对任意对 p, q 是同构。从而对任意 $r' \geq r$, 态射

$$m_{r'}^{p,q} : E_{r'}^{p,q} \rightarrow E_{r'}'^{p,q}$$

也是同构, 而态射

$$m^n(-\infty, +\infty) : H^n(-\infty, +\infty) \rightarrow H'^n(-\infty, +\infty)$$

是过滤对象的同构。

事实上, 态射 $m_r^{p,q}$ 定义了带有微分的分级对象 $(E_r^{p,q}, d_r)$ 和 $(E_r'^{p,q}, d_r)$ 之间的同构。这样得到他们上同调的对象 $E_{r+1}^{p,q}$ 和 $E_{r+1}'^{p,q}$ 之间的同构。其中第一个论断通过对 r' 归纳得到。由谱对象是稳定的, 则态射

$$m_\infty^{p,q} : E_\infty^{p,q} \rightarrow E_\infty'^{p,q}$$

是同构。而 $E_\infty^{p,q}$ (对应地, $E_\infty'^{p,q}$) 是与过滤对象 $H^n(-\infty, +\infty)$ (对应地, $H'^n(-\infty, +\infty)$) 相关的分级。又该过滤的对象是稳定的, 我们得到

$$m^n(-\infty, +\infty) : H^n(-\infty, +\infty) \rightarrow H'^n(-\infty, +\infty)$$

是过滤对象的同构。

第三章 导出范畴

1. 导出范畴的定义

在本节中, 若没有特别说明, $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴。

1.1. 记号与术语

1.1.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴 (不一定是 Abel 的), 我们记 $\text{comp}^b(\mathcal{A})$ (对应地, $\text{comp}^+(\mathcal{A}), \text{comp}^-(\mathcal{A})$) 为 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 的全子范畴为复形 X 使得 $X^i = 0$, 对 $|i|$ 足够大 (对应地, i 足够小, i 足够大)。定义 $\text{K}(\mathcal{A})$ (对应地, $\text{K}^+(\mathcal{A}), \text{K}^-(\mathcal{A})$) 为 $\text{K}(\mathcal{A})$ 中由 $\text{comp}^b(\mathcal{A})$ (对应地, $\text{comp}^+(\mathcal{A}), \text{comp}^-(\mathcal{A})$) 定义的全子范畴。

1.1.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 而 $*$ 是一个符号: $b, +, -$ 或空。定义 $\text{comp}^{*,b}(\mathcal{A})$ (对应地, $\text{comp}^{*,+}(\mathcal{A}), \text{comp}^{*,-}(\mathcal{A})$) 为 $\text{comp}^*(\mathcal{A})$ 中的复形 X 使得 $H^i(X) = 0$ 对 $|i|$ 足够大 (对应地, i 足够小,

i 足够大) 所构成的全子范畴。类似地定义 $K^{*,b}(\mathcal{A})$ (对应地, $K^{*,+}(\mathcal{A}), K^{*,-}(\mathcal{A})$) 为 $K^*(\mathcal{A})$ 中的复形 X 使得 $H^i(X) = 0$ 对 $|i|$ 充分大 (对应地, i 充分小, i 充分大) 构成的全子范畴。我们有以下 $K(\mathcal{A})$ 中的子范畴的包含关系:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K^+(\mathcal{A}) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 K^{+,b}(\mathcal{A}) & & & & K^{+,+}(\mathcal{A}) \\
 \nearrow & & \searrow & & \searrow \\
 K^b(\mathcal{A}) & & K^{*,b}(\mathcal{A}) & & K(\mathcal{A}) \\
 \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
 K^{-,b}(\mathcal{A}) & & K^{*,-}(\mathcal{A}) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & K^-(\mathcal{A}) & &
 \end{array} \quad (1.1.2.1)$$

从 $K(\mathcal{A})$ 中的特异三角形的定义 (第一章3.3.1) 和典范上同调函子 $H: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ 的性质知范畴 $K^{*,*'}(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$ 是子剖分范畴 (第二章2.1.5) (如果 $*$ 为空, 则是严格的), 而且是饱和的 (第二章2.1.6)。

1.1.3. 一个 $\mathcal{A}$ 中的复形 X 被称作零调的 (acyclic) 如果对任意 i 有 $H^i(X) = 0$. 定义 $Ac^*(\mathcal{A})$ 为 $K^*(\mathcal{A})$ 中的由所有零调的复形定义的全子范畴。 $K(\mathcal{A})$ (对应地, $comp(\mathcal{A})$) 中的态射 $X \xrightarrow{u} Y$ 被称作拟同构, 如果对任意 i , 态射 $H^i(X) \xrightarrow{H^i(u)} H^i(Y)$ 是同构。定义 $Qis^*(\mathcal{A})$ 为态射 $K^*(\mathcal{A})$ 的饱和的乘性系 (第二章2.1.4)。对于 $K^*(\mathcal{A})$ 中的特异三角形 (X, Y, Z, u, v, w) , 态射 u 是拟同构当且仅当复形 Z 是零调的。或者说 (第二章2.1.15), $Qis^*(\mathcal{A})$ 是 $K^*(\mathcal{A})$ 的与全子范畴 $Ac^*(\mathcal{A})$ 相关的乘性系。

1.1.4. 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中对象的集合, 一个 $\mathcal{A}$ 中的复形被称作 M 形式的, 如果其每个组成都是 M 中的元素。一个 $K^*(\mathcal{A})$ 或 $\text{comp}^*(\mathcal{A})$ 中的态射 $u: X \rightarrow Y$ 被称作 X (对应地, Y) 的 M 形式的右分解 (对应地, 左分解) 如果 u 是拟同构而且 Y (对应地, X) 是 M 形式的复形。通常, 在不引起混淆的情况下, 我们省去“右”(对应地, “左”)。类似地, 在不引起混淆的情况下, 我们称对象 Y 的右分解 (对应地, 左分解) 为 Y 的右分解 (对应地, 左分解) 的箭头 (对应地, 目标)。定义 $\text{comp}_{\mathcal{A}}^*(M)$ 或更简单的 $\text{comp}^*(M)$ (对应地, $K_{\mathcal{A}}^*(M)$ 或更简洁的 $K^*(M)$) 为 $\text{comp}^*(\mathcal{A})$ (对应地, $K^*(\mathcal{A})$) 的由 M 形式的复形所定义的全子范畴。

1.1.5. 当 M 是范畴 $\mathcal{A}$ 的所有投射对象 (对应地, 内射对象) 的全体, 所有组成是投射对象 (对应地, 内射对象) 的复形被称作投射 (对应地, 内射) 形式的复形。读者应该注意区分投射 (对应地, 内射) 形式的复形与范畴 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的投射 (对应地, 内射) 对象。一个 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的投射 (对应地, 内射) 对象是投射 (对应地, 内射) 形式的且同伦与零。

1.2. 导出范畴的著名子范畴

命题 1.2.1. a) 子范畴 $K_{\text{loc}}^{**}(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$ 是在右边且在左边 $\text{Ac}(\mathcal{A})$ -局部的 (第二章 2.3.5)。

b) 子范畴 $K^{+,*}(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$ 是在右边 $Ac(\mathcal{A})$ -局部的。

b)^{bis} 子范畴 $K^{-,*}(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$ 是在左边 $Ac(\mathcal{A})$ -局部的。

c) 子范畴 $K^b(\mathcal{A}) \subset K^+(\mathcal{A})$ 是在右边 $Ac^+(\mathcal{A})$ -局部的。

c)^{bis} 子范畴 $K^b(\mathcal{A}) \subset K^-(\mathcal{A})$ 是在左边 $Ac^-(\mathcal{A})$ -局部的。

d) $K^{+,+}(\mathcal{A})$ 中的对象拟同构于 $K^+(\mathcal{A})$ 中的某个对象。

d)^{bis} $K^{+,-}(\mathcal{A})$ 中的对象拟同构于 $K^-(\mathcal{A})$ 中的某个对象。

e) $K^{+,b}(\mathcal{A})$ 中的对象拟同构与 $K^{+,b}(\mathcal{A})$ 中的某个对象。

e)^{bis} $K^{-,b}(\mathcal{A})$ 中的对象拟同构与 $K^{-,b}(\mathcal{A})$ 中的某个对象。

f) $K^{+,b}(\mathcal{A})$ 中的对象拟同构与 $K^b(\mathcal{A})$ 中的某个对象。

f)^{bis} $K^{-,b}(\mathcal{A})$ 中的对象拟同构与 $K^b(\mathcal{A})$ 中的某个对象。

对任意复形 X ，定义 $X(n, +\infty)$ (对应地， $X(-\infty, n)$) 为复形

$$X(n, +\infty) = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow X^n / \text{Im}(d_X^{n-1}) \rightarrow X^{n+1} \rightarrow \cdots$$

(对应地， $X(-\infty, n) = \cdots \rightarrow X^{n-2} \rightarrow \text{Ker}(d_X^{n-1}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$)

且由 $p: X \rightarrow X(n, +\infty)$ (对应地, $i: X(-\infty, n) \rightarrow X$) 为复形的态射:

$$p^q = \text{恒同}, q > n$$

$$p^n = X^n \rightarrow X^n / \text{Im}(d_X^{n-1}) \quad (\text{典范态射})$$

$$p^q = 0, q \leq n-1$$

$$i^q = \text{恒同}, q < n-1$$

$$(\text{对应地}, i^{n-1} = \text{Ker}(d_X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}) \quad (\text{典范态射}))$$

$$i^q = 0, q \geq n$$

注意到态射 p (对应地, i) 在次数 $j \geq n$ (对应地, $j < n$) 上的上同调对象是同构, 而 $H^j(X(n, +\infty)) = 0$ 对 $j < n$ (对应地, $H^j(X(-\infty, n)) = 0$ 对 $j \geq n$)。命题 (1.2.1) 的所有断言都由该构造立即得到。我们将证明的细节留给读者。

定义 1.2.2. 我们称 $\mathcal{A}$ 的导出范畴, 记为 $D(\mathcal{A})$ 为以下剖分范畴:

$$D(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) / \text{Ac}(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A})[\text{Qis}(\mathcal{A})^{-1}]$$

(第二章2.2.6和2.2.10)。

由定理 (第二章2.2.6) 得到典范上同调函子 $H: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ 唯一地经过一个上同调函子, 仍记作

$$H: D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A} \quad (1.2.2.1)$$

称作典范上同调函子。它经过商函子 $Q: K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 。

定理 1.2.3. a) 下图中自然包含的函子

$$\begin{array}{ccc}
 & & K^{\cdot,+}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A}) \\
 & \nearrow & \searrow \\
 K^{\cdot,b}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A}) & & D(\mathcal{A}) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & & K^{\cdot,-}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A})
 \end{array}$$

是严格的全忠实的。它在对象上是单的，因此将范畴 $K^{\cdot,*}(\mathcal{A})$ 看作 $D(\mathcal{A})$ 的严格全子剖分范畴。一个 $D(\mathcal{A})$ 中的对象 X 是 $K^{\cdot,b}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A})$ (对应地, $K^{\cdot,+}(\mathcal{A})$, $K^{\cdot,-}(\mathcal{A})$) 中的对象当且仅当 $H^i(X) = 0$ 当 $|i|$ 足够大时 (对应地, i 足够小, i 足够大)。

b) 自然的函子使得下图

$$\begin{array}{ccc}
 K^+(\mathcal{A})/Ac^+(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^{\cdot,+}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A}) \\
 & & \searrow \\
 & & D(\mathcal{A}) \\
 & & \nearrow \\
 K^-(\mathcal{A})/Ac^-(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^{\cdot,-}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A}) \\
 & & \nearrow \\
 K^b(\mathcal{A})/Ac^b(\mathcal{A}) & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} K^{+,b}(\mathcal{A})/Ac^+(\mathcal{A}) \\ K^{-,b}(\mathcal{A})/Ac^-(\mathcal{A}) \end{array} \\
 & & \searrow \nearrow \\
 & & K^{\cdot,b}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A}) \dashrightarrow D(\mathcal{A})
 \end{array}$$

是范畴的等价。它在对象的集合上是单的。

c) 自然的函子使得下图

$$\begin{array}{ccc}
 K^{+,b}(\mathcal{A})/Ac^+(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^+(\mathcal{A})/Ac^+(\mathcal{A}) \\
 & & \searrow \\
 & & D(\mathcal{A}) \\
 & & \nearrow \\
 K^{-,b}(\mathcal{A})/Ac^-(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^-(\mathcal{A})/Ac^-(\mathcal{A})
 \end{array}$$

是严格全忠实的且在对象上是单的。

由 (1.2.1) 和 (第二章2.3.5) 立即得到。

1.2.4. 范畴 $D(\mathcal{A})$ 的子范畴 $K^{-b}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A})$ (对应地, $K^{-+}(\mathcal{A})/Ac(\mathcal{A}), K^{-+}$ 被记作 $D^b(\mathcal{A})$ (对应地, $D^+(\mathcal{A}), D^-(\mathcal{A})$), 而被称作有界的子范畴 (对应地, 有下界, 有上界) 的子范畴。要注意这个定义只用到该复形对应的上同调的复形。

1.2.5. 设 X 和 Y 是 $D(\mathcal{A})$ 中的两个对象, 定义 $Ext_{\mathcal{A}}^0(X, Y)$ 为群 $Hom_{D(\mathcal{A})}(X, Y)$ 。类似地, 定义 $Ext_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ 为群 $Ext_{\mathcal{A}}^0(X, Y[i]) \simeq Ext_{\mathcal{A}}^0(X[-i], Y)$ (一章1.3.8)。这个记号之后将被处理。对于 $D(\mathcal{A})$ 中的特异三角形 (X, X', X'', u, v, w) (对应地, (Y, Y', Y'', u, v, w)), 有以下无穷的正合序列:

$$\cdots \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^0(X'', Y) \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^0(X', Y) \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^1(X'', Y) \rightarrow \cdots$$

(对应地, $\cdots \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^0(X, Y') \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^0(X, Y'') \rightarrow Ext_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \rightarrow \cdots$)

(第二章1.2.1)。

1.2.6. 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中一些对象的集合, 定义 $D_M(\mathcal{A})$ 为 $D(\mathcal{A})$ 中的全子范畴, 其对象为每一次上同调对象都在 M 中的复形的全体。定义 $D_M^*(\mathcal{A})$ 为子范畴 $D_M(\mathcal{A}) \cap D^*(\mathcal{A})$ 。如果 $\mathcal{A}$ 中由 M 定义的子范畴是厚子范畴 (即, 如果它是 Abel 的, 则包含函子是正合的且 M 的对象在扩张上是稳定的), 则子范畴 $D_M^*(\mathcal{A})$ 是 $D(\mathcal{A})$ 的全子部分范畴。

1.2.7. 设 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是两个 Abel 范畴之间的正合函子，而 $K(F) : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$ 是函子 F 在同伦意义下的扩张 (第一章2.5.10) 则函子 $K(F)$ 将 $\mathcal{A}$ 中零调的复形变为 $\mathcal{B}$ 中零调的复形，而且是正合的 (第二章1.3.7)，因此，(第二章2.2.6) 定义了一个正合函子 $D(F) : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ 。而函子 $D(F)$ 将有界的对象 (对应地，有下界的，有上界的) 变为 $D(\mathcal{B})$ 中同样的对象。此后，我们将直接记 $F : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ 对任意函子 $D(F)$ 。

1.2.8. 典范同构 (第二章1.3.8) $\iota : K(\mathcal{A})^\circ \rightarrow K(\mathcal{A}^\circ)$ 将 $\text{Ac}(\mathcal{A})^\circ$ 中的对象变为 $\text{Ac}(\mathcal{A}^\circ)$ 中的对象，因此得到剖分范畴之间的同构，任记为 $\iota : D(\mathcal{A})^\circ \rightarrow D(\mathcal{A}^\circ)$ 。此后，若没有特殊说明，则将范畴 $D(\mathcal{A})^\circ$ 和 $D(\mathcal{A}^\circ)$ 通过 ι 看作等同的。注意它将范畴 $D^b(\mathcal{A})^\circ$ 变为范畴 $D^b(\mathcal{A}^\circ)$ ，而将范畴 $D^+(\mathcal{A})^\circ$ 变为 $D^-(\mathcal{A}^\circ)$ ，将 $D^-(\mathcal{A})^\circ$ 变为 $D^+(\mathcal{A}^\circ)$ 。

1.2.9. 典范函子 $\mathcal{A} \rightarrow K(\mathcal{A})$ (第二章1.3.3) 与函子 $Q : K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 的复合得到函子 $\mathcal{A} \rightarrow D(\mathcal{A})$ 是全忠实的，事实上，设 X 和 Y 是 $\mathcal{A}$ 中的两个对象，则 $D(\mathcal{A})$ 中 X 到 Y 的态射是 (第二章2.2.2) 图表所在的类 $\bar{D}$ ：

$$D = X \xleftarrow{s} Z^\bullet \xrightarrow{m} Y$$

这里 s 是 $K(\mathcal{A})$ 中的拟同构。因此 $s : Z^\bullet \rightarrow X$ 得到一个同构 $H^0(s) : H^0(Z^\bullet) \xrightarrow{\sim} H(X) = X$ ，故 $\bar{D} = Q(H^0(m)H^0(s)^{-1})$ ，则就得到同态

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y)$$

是满的。现在证明它是单的。设 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f: X \rightarrow Y$ 在 $D(\mathcal{A})$ 中是零, 当且仅当存在 $K(\mathcal{A})$ 中的拟同构 $s: Z^\bullet \rightarrow X$ 使得 $fs = 0$ 。因此我们得到 $H^0(f)H^0(s) = 0$, 注意到 $H^0(s)$ 是一个同构, 这就得到 $H^0(f) = f = 0$ 。

注意到函子 $\mathcal{A} \rightarrow D(\mathcal{A})$ 在对象上是单的, 因此 $\mathcal{A}$ 是 $D(\mathcal{A})$ 的全子范畴。此后, 范畴 $\mathcal{A}$ 将总是通过该函子看作其导出范畴的全子范畴。典范上同调函子 $D(\mathcal{A}) \xrightarrow{H^0} \mathcal{A}$ 限制在子范畴 $\mathcal{A}$ 中, 是范畴的恒同。

命题 1.2.10. *a)* $D(\mathcal{A})$ 中的对象 X 同构与 $\mathcal{A}$ 中某个对象当且仅当 $H^i(X) = 0$ 对任意 $i \neq 0$ 。它典范同构与 $H^0(X)$ 。

b) 设 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 中的两个对象, 我们有

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) = 0, \quad n < 0$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

先证明 *a)*。显然当 X 是 $\mathcal{A}$ 中对象时, $H^i(X) = 0$ 对 $i \neq 0$ 成立。设 X 是 $D(\mathcal{A})$ 中的对象, 使得 $H^i(X)$ 为零对 $i \neq 0$ 成立。则复形 $X(0, +\infty)$ (在 (1.2.1) 中构造的) 与 X 拟同构, 而典范态射 $H^0(X(0, +\infty)) \rightarrow X(0, +\infty)$ 是拟同构, 这就证明了 X 在 $D(\mathcal{A})$ 中同构与 $H^0(X)$ 。

下面证明 *b)*。第二个等式由 $\mathcal{A}$ 是 $D(\mathcal{A})$ 的全子范畴得到。 $D(\mathcal{A})$ 中 $X[-n]$ 到 Y 的态射有形式 $Q(m)Q(s)^{-1}$, 这里 $m: Z^\bullet \rightarrow Y$

是 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的态射, 而 $s: Z^\bullet \rightarrow X[-n]$ 是 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的拟同构。态射 $i: Z^\bullet(-\infty, n+1) \rightarrow Z^\bullet$ ((1.2.1) 中的构造) 是拟同构, 因此, 我们有:

$$Q(m)Q(s)^{-1} = Q(m)Q(i)Q(i)^{-1}Q(s)^{-1} = Q(mi)Q(si)^{-1}$$

当 n 是严格负的, 有 $mi = 0$, 从而 $Q(m)Q(s)^{-1} = 0$ 。

定义 1.2.11. 记 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 是 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 中由 $\mathcal{A}$ 的对象的平移组成的全子范畴。

范畴 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 是 (不像子范畴 $\mathcal{A}$) 是一个 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的子 $\mathbb{Z}$ -范畴。 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 中的对象同构与 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 中的对象当且仅当其至多有一个上同调对象不是零。

1.3. 典范 δ -函子

1.3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 而 $\mathcal{D}$ 是一个剖分范畴, 一个 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{D}$ 的 δ -函子由以下内容构成:

1) 一个函子 $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ 。

2) 对 $\mathcal{A}$ 的一个正合序列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 有 $\mathcal{D}$ 中的态射:

$$\delta(S): G(Z) \rightarrow G(X)[1]$$

使得以下条件成立:

a) 对任意正合序列的态射:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 S = & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\
 S' = & 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

以下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc}
 G(Z) & \xrightarrow{\delta(S)} & G(X)[1] \\
 G(w) \downarrow & & \downarrow G(u)[1] \\
 G(Z') & \xrightarrow{\delta(S')} & G(X')[1]
 \end{array}$$

b) 对任意 $\mathcal{A}$ 中的正合序列 $S = 0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$, 三角形 $(G(X), G(Y), G(Z), G(u), G(v), \delta(S))$ 是特异的。

1.3.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 而 u 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的态射, 定义 $[u]$ 为 u 在 $D(\mathcal{A})$ 中像。设 $S = 0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的正合序列, 则函子锥的伴随性质 (第一章3.1.3) 定义了一个态射 $\mu(S) : c(u) \rightarrow Z$ 。则以下图表是交换的 (第一章3.2.2.4):

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{p(u)} & c(u) \\
 & \searrow v & \downarrow \mu(S) \\
 & & Z
 \end{array}$$

简单的计算知道态射 $\mu(S)$ 的组成是

$$\begin{aligned}
 \mu(S)^i : Y^i \oplus Y^{i+1} &\rightarrow Z^i \\
 \mu(S)^i &= (v^i, 0)
 \end{aligned} \tag{1.3.2.1}$$

我们得到态射 $\mu(S) : c(u) \rightarrow Z$ 是满射且有正合序列：

$$0 \rightarrow c(\mathrm{id}_X) \rightarrow c(u) \rightarrow Z \rightarrow 0$$

让我们考虑复形 $c(\mu(S))$ ，而 $m : c(\mathrm{id}_X) \rightarrow c(\mu(S))[-1]$ 为态射，其组成为：

$$m^i : X^i \oplus X^{i+1} \rightarrow Z^{i-1} \oplus Y^i \oplus X^{i+1}$$

$$m^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^i & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \quad (1.3.2.2)$$

态射 m 是一个单射，而有以下正合序列：

$$0 \rightarrow c(\mathrm{id}_X) \xrightarrow{m} c(\mu(S))[-1] \rightarrow c(\mathrm{id}_Z)[-1] \rightarrow 0 \quad (1.3.2.3)$$

复形 $c(\mathrm{id}_X)$ 和 $c(\mathrm{id}_Z)$ 均同伦与零，因此复形 $c(\mu(S))$ 是零调的，态射 $\mu(S)$ 是一个拟同构。

传递到范畴 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中，我们得到一个图表 (第一章3.2.2.7)：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\dot{u}} & Y & \xrightarrow{\dot{p}(u)} & c(u) \xrightarrow{\dot{q}(u)} X[1] \\ & & \searrow \dot{v} & \downarrow \dot{\mu}(S) & \\ & & & Z & \end{array}$$

于是

$$\delta(S) = [q(u)][\mu(S)]^{-1} \quad (1.3.2.4)$$

由 $\kappa(\mathcal{A})$ (第一章3.3.1) 和 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ (第二章2.2.6) 中特异三角形的定义得到三角形 $(X, Y, Z, [u], [v], \delta(S))$ 是 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的特异三角形。另外, 我们立即得到态射 $\delta(S)$ 对于 S 是有函子性的 ((1.3.1), 性质 a)。我们同样得到一个典范函子 $\mathrm{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A})$ 具有 δ -函子的结构。因此这个 δ -函子被称作典范 δ -函子。态射 $\delta(S)$ 被称作与正合序列 S 关联的边缘同态。

1.3.3. 设 $\mathcal{A}^\circ$ 是 $\mathcal{A}$ 的反范畴。对任意 $\mathrm{comp}(\mathcal{A}^\circ)$ 中的正合序列 S , 定义 $\delta^\circ(S)$ 为相关联的边缘同态, 设 c 是一个范畴, 而 x 是 c 中的对象而 u 是 c 中的态射, 在下面的命题中, 我们用 x° 和 u° 表示 c 的反范畴中对应的对象和态射 (注意到 c 的反范畴和 c 有相同的对象的集合和态射的集合)。

命题 1.3.4. $a)$ 对任意 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中的正合序列 S , 我们有

$$\delta(S[1]) = -\delta(S)[1]$$

$b)$ 对任意 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中的正合序列 S , 使用 (1.2.8) 中的同构, 我们有

$$\delta^\circ(S^\circ) = \delta(S)^\circ[1]$$

$c)$ $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的特异三角形同构与形式 $(X, Y, Z, [u], [v], \delta(S))$, 这里 $S = 0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的正合序列。

$a)$ 和 $b)$ 的证明留给读者。下面证明 $c)$ 。由 (第二章2.2.6), 对任意 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的特异三角形同构与 $\kappa(\mathcal{A})$ 中某个特异三角形

在 $Q: K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 下的像。由 (第一章3.3.1) 和 TRII 得到, 对任意 $K(\mathcal{A})$ 中的特异三角形, 同构与以下形式:

$$Y \xrightarrow{\dot{p}(u)} c(u) \xrightarrow{\dot{q}(u)} X[1] \xrightarrow{-\dot{u}[1]} Y[1]$$

因此 $D(\mathcal{A})$ 中的特异三角形同构与以下形式的三角形

$$(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], -[u][1])$$

注意到

$$S = 0 \rightarrow Y \xrightarrow{p(u)} c(u) \xrightarrow{q(u)} X[1] \rightarrow 0$$

是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的正合序列。由 (第二章1.2.4) 得到存在三角形的同构:

$$(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], -[u][1])$$

和

$$(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], \delta(S))$$

命题 1.3.5. a) 对任意函子 $F: \text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}$, 将拟同构变为 $\mathcal{C}$ 中的同构, 则该函子唯一地经过函子 $\text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 。

b) $\text{comp}(\mathcal{A})$ 到 $Abel$ 范畴 $\mathcal{B}$ 的半正合的函子, 将拟同构变为同构, 它必唯一地经过典范 δ -函子 $\text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$, 得到一个上调函子 $D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 。

论断 $b)$ 从论断 $a)$ 和 $D(\mathcal{A})$ 中的特异三角形在 (1.3.4) 中的描述得到。论断 $a)$ 由 $D(\mathcal{A})$ 的定义 (第二章2.2.6) 和以下引理得到:

引理 1.3.6. 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴 (不一定是 *Abel* 的), 而 F 是从 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 到范畴 $\mathcal{C}$ 的函子, 则以下条件是等价的:

$i)$ F 经过 $K(\mathcal{A})$ 。

$ii)$ F 将同伦变为 $\mathcal{C}$ 中同构。

显然有 $i) \Rightarrow ii)$ 。为了证明 $ii) \Rightarrow i)$, 只需证明 F 将同伦的态射变为相等的态射。设 X 是一个 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象, 则 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 上的函子

$$Y \mapsto \{X \text{ 到 } Y \text{ 的两个态射和他们之间的一个同伦}\}$$

被复形 Z 所表示:

$$Z^i = X^i \oplus X^i \oplus X^{i+1}$$

$$d_Z^i = \begin{pmatrix} d_X^i & 0 & \text{id}_{X^{i+1}} \\ 0 & d_X^i & -\text{id}_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} \quad (1.3.6.1)$$

存在两个同伦态射 $p_1, p_2 : X \rightarrow Z$:

$$\begin{aligned} p_1^i &= \begin{pmatrix} \text{id}_{X^i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ p_2^i &= \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.6.2)$$

故只需证明 $f(q_1) = F(q_2)$ 。两个态射 $(\text{id}_X, \text{id}_X)$ 和平凡的同伦定义了一个态射 $\pi : Z \rightarrow X$:

$$\pi^i = (\text{id}_{X^i}, \text{id}_{X^i}, 0) \quad (1.3.6.3)$$

而且有 $\pi p_1 = \pi p_2 = \text{id}_X$ 。因此, 我们立即有态射 π, p_1 和 p_2 是同伦的。因此 $F(\pi), F(p_1)$ 和 $F(p_2)$ 都是同构且 $F(\pi)F(p_1) = F(\pi)F(p_2) = \text{id}_{F(X)}$, 从而 $F(p_1) = F(p_2)$, 这就完成了引理的证明。

注 1.3.7. 从命题 (1.3.5) 得到 $\mathcal{A}$ 的导出范畴是一个泛问题的解: 使 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的拟同构有逆 (第二章 2.2.3, b)。

2. 分解

在本节中, $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴。

2.1. 基础的态射

2.1.1. 设 X 是 $\mathcal{A}$ 中的复形, 而 X^i 为次数为 i 的组成。设 $u: Y \rightarrow X^i$ 为 $\mathcal{A}$ 中的态射。则有以下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & X'^{i-1} & \xrightarrow{v_2} & Y & & & \\
 & & v_1 \nearrow & \downarrow u' & & \downarrow u & \searrow v_3 & & \\
 X^{i-3} & \xrightarrow{d_X^{i-3}} & X^{i-2} & \xrightarrow{d_X^{i-2}} & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2}
 \end{array} \quad (2.1.1.1)$$

这里图表

$$\begin{array}{ccc}
 X'^{i-1} & \xrightarrow{v_2} & Y \\
 u' \downarrow & & \downarrow u \\
 X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i
 \end{array}$$

是拉回, 而态射 v_1 和 v_3 由下列等式定义

$$v_2 v_1 = 0$$

$$u' v_1 = d_X^{i-2}$$

$$v_3 = d_X^i u$$

现在定义 $X(u, i)$ 为下列复形

$$X(u, i) = \cdots X^{i-3} \xrightarrow{d_X^{i-3}} X^{i-2} \xrightarrow{v_1} X'^{i-1} \xrightarrow{v_2} Y \xrightarrow{v_3} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \cdots \quad (2.1.1.2)$$

而 $p(u, i) : X(u, i) \rightarrow X$ 为复形的态射:

$$p(u, i)^j = \text{恒同}, j \neq i-1, i$$

$$p(u, i)^{i-1} = u' \quad (2.1.1.3)$$

$$p(u, i)^i = u$$

设 $m : Z \rightarrow X$ 为复形的态射, 显然有 Z 上的复形 Z' 由基变换 $Z \xrightarrow{m} X$ 得到:

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X(u, i) \\ \downarrow & & \downarrow p(u, i) \\ Z & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

它同构与一个复形 $p(w, i) : Z(w, i) \rightarrow Z$ 对某一个合适的态射 w 。

引理 2.1.2. a) 态射 $H^j(p(u, i)) : H^j(X(u, i)) \rightarrow H^j(X)$ 是同构对 $j \neq i-1, i$ 成立。

b) 我们有正合序列

$$0 \rightarrow H^i(X(u, i)) \rightarrow H^i(X) \rightarrow (\text{Ker}(d_X^i) + \text{Im}(u)) / (\text{Im}(d_X^{i-1}) + \text{Im}(u)) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow (\text{Ker}(d_X^i) + \text{Im}(u)) / (\text{Im}(d_X^{i-1}) + \text{Im}(u)) \rightarrow$$

$$X^i / (\text{Im}(d_X^{i-1}) + \text{Im}(u)) \rightarrow X^i / (\text{Ker}(d_X^i) + \text{Im}(u)) \rightarrow 0 \quad (2.1.2.1)$$

$$0 \rightarrow X^i / (\text{Ker}(d_X^i) + \text{Im}(u)) \rightarrow H^{i+1}(X(u, i)) \rightarrow H^{i+1}(X) \rightarrow 0$$

c) 要使 $p(u, i)$ 是拟同构, 需且只需

$$\text{Im}(d_X^{i-1}) + \text{Im}(u) = X^i$$

用追图法, 留给读者。

定义 2.1.3. 一个复形的态射 $m: Z \rightarrow X$ 被称作高度为 i 的基础态射, 如果它同构于 $\mathcal{F}\ell_1(\text{comp}(\mathcal{A}))$ 中形式为 $p(u, i)$ 的态射, 这里 u 是一个满射。

特别地, 一个基础的态射是拟同构 ((2.1.2), c)). 一个初等的态射在 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中是满射。一个 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的满射是初等的当且仅当其核是一个零调的复形, 且至多两个组成非零。两个相同高度的基础态射的复合是一个基础态射。基础态射在基变换下是不变的。设

$$\cdots \rightarrow X_n \xrightarrow{u_n} X_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} X_{n-2} \rightarrow \cdots$$

是一列两个方向都是无限的复形的态射, 使得每一个态射 u_n 是一个高度为 $-n$ 的基础态射。这个序列在 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中有极限和余极限 (该序列在每个组成上在两个方向上都是稳定的)。

引理 2.1.4. 设 $m: X \rightarrow Y$ 是一个 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的拟同构, 则存在一个态射的序列

$$u_n: X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

使得对任意 n , u_n 是一个高度为 $-n$ 的初等态射, 而态射

$$\varinjlim_n X_n \xleftarrow{\sim} Y$$

$$\varprojlim_n X_n \xleftarrow{v} X, \quad v \text{ 为同伦 (第一章 2.5.11)}$$

使得图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & \varprojlim_n X_n \\ m \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_n X_n \end{array}$$

在同伦意义下交换。

首先, 注意到对任意 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的态射 $m : x \rightarrow Y$, 存在一个满射 $m' : X' \rightarrow Y$ 和一个同伦意义下交换的图表:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & X' \\ & \searrow & \swarrow \\ & m & m' \\ & Y & \end{array}$$

这里 v 是同伦。

事实上, 有态射 m 的锥:

$$X \xrightarrow{m} Y \xrightarrow{p(m)} c(m) \rightarrow X[1]$$

再考虑态射 $p(m)$ 的锥:

$$Y \xrightarrow{p(m)} c(m) \rightarrow c(p(m)) \xrightarrow{q} Y[1]$$

态射 $c(p(m)) \xrightarrow{q}$ 是一个满射 (第一章3.2.2)。由特异三角形的性质 TRII 知存在一个同伦

$$X \xrightarrow{v} c(p(m))[-1]$$

使得以下三角形

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & c(p(m))[-1] \\ & \searrow m & \swarrow q[-1] \\ & Y & \end{array}$$

在同伦意义下交换。

因此可以假设态射 m 在 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中是满射, 设

$$N = \cdots \rightarrow N^i \xrightarrow{d_N^i} N^{i+1} \xrightarrow{d_N^{i+1}} N^{i+2} \rightarrow \cdots$$

是态射 m 的核, 设

$$N_{-n} \cdots \rightarrow N^{n-3} \rightarrow N^{n-2} \rightarrow \text{Im}(d_N^{n-2}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

则 N_{-n} 形成了一个递减的 N 的零调的子复形, 设 $X_n = X/N_n$, 有序列

$$u_n : X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

则 u_n 是高度为 $-n$ 的基础态射, 且 $\varprojlim_n X_n = X, \varinjlim_n X_n = Y$ 。

注 2.1.5. 在引理 (2.1.4) 的假设下, 再假设 $X, Y \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 。前面的结果说明可以把 x 作用一个同伦, 从而假设 m 是满射, 序列 X_n 的构造说明正向系 X_n 是稳定的 (即, $X_n = Y$ 且 $u_n = \text{恒同}$ 对充分小的 n) 且对任意 n 有 $X_n \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 。

2.2. 对特定对象的集合的研究

2.2.1. 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中一些对象的集合, 我们考虑下面性质:

(E_1) 零对象在 M 中, M 中任意两个对象的直和在 M 中。

(E_2) 对任意满射 $X \xrightarrow{u} L$, 这里 X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 而 L 是 M 中的对象, 存在满射 $v: L' \rightarrow L, L' \in M$, 经过 u 。

(E_3) 对任意 n 和正合序列:

$$0 \rightarrow X \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow 0, \quad L_i \in M, 1 \leq i \leq n$$

存在一个满射 $L' \rightarrow X$, 这里 $L' \in M$ 。

(E_4) 对任意满射 $u: L \rightarrow L', L, L' \in M$, 态射 u 的核在 M 中。

(E_5) 对任意扩张 $0 \rightarrow L \rightarrow Z \rightarrow L' \rightarrow 0, L, L' \in M$, 则对象 Z 在 M 中, 零是 M 中的对象。

(E_6) 集合 M 是正合的, 即对于一个短正合序列, 若其中任意两个对象在 M 中, 则第三个也在 M 中。零是 M 中的对象。

我们注意到有 (E_6) $\implies$ (E_4) 和 (E_5), (E_4) $\implies$ (E_3) 和 (E_5) $\implies$ (E_1)。一个无限正合序列

$$\cdots \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow X \rightarrow 0, L_i \in M, i \in \mathbb{N}$$

称作 X 的 ∞ - M -表示。设 M 是一些对象的集合满足 $(E_1), (E_2)$ 和 (E_3) 。定义 $M^\wedge$ 为以下对象的集合： X 在 $M^\wedge$ 中如果它有一个 ∞ - M -表示且对任意 n 和正合序列

$$0 \rightarrow X' \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow X \rightarrow 0, L_i \in M, 0 \leq i \leq n$$

对象 X' 有一个 ∞ - M -表示。

引理 2.2.2. 设 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ 为 $\mathcal{A}$ 中的正合序列。

a) 如果 X 和 Y 都是 $M^\wedge$ 中的元素, 则存在一个满射 $u: L \rightarrow Z, L \in M$ 。

b) 如果 X 和 Z 都是 $M^\wedge$ 中的元素, 则存在满射 $u: L \rightarrow Y, L \in M$ 。

c) 如果 Y 和 Z 是 $M^\wedge$ 中的元素, 则存在一个满射 $u: L \rightarrow X, L \in M$ 。

引理 2.2.3. 设 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ 为 $\mathcal{A}$ 中的正合序列。

a) 如果 X 和 Y 都是 $M^\wedge$ 中的元素, 对任意满射 $u: L \rightarrow Z, L \in M$, u 的核是 $M^\wedge$ 中两个元素的一个满射的核。

b) 如果 X 和 Z 都是 $M^\wedge$ 中的元素, 对任意满射 $u: L \rightarrow Y, L \in M$, u 的核是 $M^\wedge$ 中两个元素的一个单射的余核。

c) 如果 Y 和 Z 是 $M^\wedge$ 中的元素, 对任意满射 $u: L \rightarrow X, L \in M$ 。
 u 的核是 $M^\wedge$ 中两个元素的一个满射的核。

这两个引理的证明留给读者, 我们只注意引理 (2.2.2) 和 (2.2.3) 的性质 a) 和 c) 不需要性质 (E_2) 。

命题 2.2.4. a) 集合 $M^\wedge$ 拥有性质 (E_6) 和 (E_2) 。集合 M 在集合 $M^\wedge$ 中。对任意 $M^\wedge$ 中的对象是 M 中某个对象的商对象。

b) 对任意包含 M 的集合 M' , 使得任意 M' 中的对象是 M 中对象的商对象且有性质 (E_3) , 则它包含于 $M^\wedge$ 。

c) 特别地, $(M^\wedge)^\wedge = M^\wedge$ 。

性质 a) 由上述两个引理得到。性质 b) 和 c) 是显然的。

2.2.5. 设 $M \subset M'$ 是 $\mathcal{A}$ 中两个对象的集合使得 M 有性质 (E_4) 和 (E_5) , M' 有性质 (E_4) , 且 M' 中的任意一个对象是 M 中某个对象的商对象。我们称 M' 中的一个对象 X 是 M -维数小于等于 n , 或记为 $M\text{-dim}(X) \leq n$, 如果存在一个正合序列:

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow X \rightarrow 0, L_i \in M, 0 \leq i \leq n$$

如果存在整数 n 使得 $M\text{-dim}(X) \leq n$, 我们称 X 的 M -维数, 记为 $M\text{-dim}(X)$, 为最小的整数 n 使得 $M\text{-dim}(X) \leq n$ 。如果不存在这样的整数, 我们记为 $M\text{-dim}(X) = +\infty$ 。

引理 2.2.6. 设 $0 \rightarrow X \rightarrow L \xrightarrow{u} Y \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的正合序列使得 $L \in M$ 和 $X, Y \in M'$, 我们有

$$M\text{-dim}(X) = \sup\{M\text{-dim}(Y) - 1, 0\}$$

命题 2.2.7. 设 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ 是一个正合序列, $X, Y, Z \in M'$ 。

$$a) \quad M\text{-dim}(Z) \leq \inf\{M\text{-dim}(X), M\text{-dim}(Y)\} \implies M\text{-dim}(X) = M\text{-dim}(Y)$$

$$b) \quad M\text{-dim}(Y) \leq \inf\{M\text{-dim}(X), M\text{-dim}(Z)\} \implies$$

$$M\text{-dim}(X) = \sup\{M\text{-dim}(Z) - 1, M\text{-dim}(Y)\}$$

$$c) \quad M\text{-dim}(X) \leq \inf\{M\text{-dim}(Y), M\text{-dim}(Z)\} \implies M\text{-dim}(Z) = M\text{-dim}(Y) \text{ 或}$$

$$M\text{-dim}(Z) = M\text{-dim}(Y) + 1$$

该命题的证明是循环的, 因为可以构造一个正合序列的满射:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad L_i \in M, 0 \leq i \leq 2$$

根据引理 (2.2.6), 将循环的假设应用到正合序列的核上, 得到一个控制¹。因此只需证明引理。首先, 如果 $M\text{-dim}(Y) =$

¹contrôle

$+\infty$ (对应地, 0), 则 $M\text{-dim}(X) = +\infty$ (对应地, 0)。因此可以假设 $M\text{-dim}(Y)$ 有限且非零。故只需证明 $M\text{-dim}(X) = M\text{-dim}(Y) - 1$ 。设

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow Y \rightarrow 0, n \geq 1$$

为 Y 的一个 M -分解。设

$$V^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow Y \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

(L_i 为次数为 $-i$ 的组成),

$$U_0^\bullet = V^\bullet(u, 1), p_0 = p(u, 1) : U_0^\bullet \rightarrow V^\bullet$$

(2.1.1)。态射 p_0 是一个高度为 1 的基础态射。复形 $U_0^\bullet$ 是以下形式:

$$U_0^\bullet = 0 \rightarrow 0 \cdots 0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \rightarrow Z_0 \rightarrow L \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

根据性质 (E_4) , 对象 Z_0 是 M' 中的对象。因此, 存在一个满射 $u_0 : L'_0 \rightarrow Z_0, L'_0 \in M$ 。设 (2.1.1) $U_1^\bullet = U_0^\bullet(u_0, 0), p_1 = p(u_0, 0) : U_1^\bullet \rightarrow U_0^\bullet$ 。通过这样的方式, 我们用归纳的方式得到存在下面一系列态射:

$$p_i : U_i^\bullet \rightarrow U_{i-1}^\bullet, 1 \leq i \leq n-1$$

$$p_0 : U_0^\bullet \rightarrow V^\bullet$$

这里 p_i 是一个高度为 $-i+1$ 的基础的态射而 $U_i^\bullet$ 有形式:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow L_{i+1} \rightarrow Z_i \rightarrow L'_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L'_0 \rightarrow L \rightarrow 0 \cdots$$

这里 $L'_j \in M, 0 \leq j \leq i-1$ 。因此, 通过复合这些态射 p_i , 得到一个满的拟同构:

$$p: U_{n-1}^\bullet \rightarrow V^\bullet$$

注意到复形

$$U_{n-1}^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow L_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L'_0 \rightarrow L \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

根据性质 (E_4) , Z_{n-1} 是 M 中两个对象的扩张, 从而根据性质 (E_5) , 是 M 中的一个元素。设

$$L^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cdots$$

$$L'^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow L_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L'_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cdots$$

和 $m: L'^\bullet \rightarrow L^\bullet$ 为 p 诱导的态射。 $L^\bullet$ (对应地, $L'^\bullet$) 中唯一非零的上同调对象是 0 维的 Y (对应地, 0 维的 L) 从而态射 m 诱导对象的态射 u 。考虑态射 m 的锥 $c(m)$:

$$c(m) = \rightarrow 0 \rightarrow L_n \rightarrow L_n \oplus Z_{n-1} \rightarrow L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow L_1 \oplus L'_0 \rightarrow L_0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

(L_0 是 $c(m)$ 的次数为 0 的组成)。 $c(m)$ 的上同调对象在次数不是 -1 的地方为零, 在 -1 处等于 X 。态射 $L_n \rightarrow L_n \oplus Z_{n-1}$ 的矩阵形式为 $\begin{pmatrix} \text{id} \\ * \end{pmatrix}$ 有一个收缩。故存在一个态射 $v: Z_{n-1} \rightarrow L_{n-1} \oplus L'_{n-2}$ 使得复形

$$\cdots 0 \rightarrow 0 \rightarrow Z_{n-1} \xrightarrow{v} L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \oplus L'_0 \rightarrow L_0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

与 $c(m)$ 拟同构。另一方面, 根据性质 (E_4) , 态射 $L_1 \oplus L'_0 \rightarrow L_0$ 的核是 M 中的元素。设 L''_1 为核, 则复形

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow Z_{n-1} \xrightarrow{v} L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L_2 \oplus L'_1 \rightarrow L''_1 \rightarrow X \rightarrow 0 \cdots$$

是零调的。这样我们就构造了一个 X 的长为 $n-1$ 的分解, 从而, $M\text{-dim}(X) \leq n-1$ 。又显然有 $M\text{-dim}(X) \geq M\text{-dim}(Y) - 1$, 这就完成了引理 (2.2.6) 和命题 (2.2.7) 的证明。

2.3. 分解上的一些引理

命题 2.3.1. [22]

a) 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中有性质 $(E_1), (E_2), (E_3)$ (2.2.1) 的对象的集合。设 $Y \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 是组成在 $M^\wedge$ (2.2.1) 中的复形, $m: X \rightarrow Y$ 是一个拟同构。则存在一个复形 $L^\bullet \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$, 其组成在 M 中且有拟同构 $w: L^\bullet \rightarrow X$ 。

b) 反之, 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中有性质 (E_1) 的对象的集合, 设对任意 $Y \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 且组成在 M 中和任意拟同构 $m: X \rightarrow Y$, 存在一个复形 $L^\bullet$, 其组成在 M 中且有拟同构 $L^\bullet \rightarrow X$ 。则集合 M 有性质 (E_2) 和 (E_3) 。

为了证明 a), 首先, 存在一个复形 $X' \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 和一个拟同构 $X' \rightarrow X$ (1.2.1)。故我们只需考虑 X 是 $\text{comp}^-(\mathcal{A})$ 中的对象。由 (2.1.4) 和 (2.1.5) 知存在一系列态射:

$$u_n: X_n \rightarrow X_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$$

这里 X_n 是 $\text{comp}^-(\mathcal{A})$ 中的对象, 而态射 u_n 是高度为 $-n$ 的初等态射且有一个同伦意义下的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_n X_n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow m \\ \varinjlim_n X_n & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

为了证明该命题, 我们不妨假设 $X = \varprojlim_n X_n$ 且 $X_n = Y, u_n$ 为恒同对充分小的 n 。我们通过对 n 归纳来构造:

a) 一系列初等态射:

$$v_n: L_n^\bullet \rightarrow L_{n-1}^\bullet, n \in \mathbb{Z}, v_n \text{ 为高度 } -n \text{ 的初等态射}$$

b) 一系列态射

$$w_n: L_n^\bullet \rightarrow X$$

使得

1) 对任意整数 $n \in \mathbb{Z}$, 次数为 $i, i \geq -n$ 的 $L_n^\bullet$ 的组成是 M 中的对象且次数为 $i, i < -n$ 的组成是 $M^\wedge$ 中的元素。

2) 以下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc} L_n^\bullet & \xrightarrow{w_n} & X_n \\ v_n \downarrow & & \downarrow u_n \\ L_{n-1}^\bullet & \xrightarrow{w_{n-1}} & X_{n-1} \end{array}$$

3) 对象 $L_n^\bullet$ 等于 Y 和态射 v_n 和 w_n 是恒同对充分大的 n 。

这是事实, 只需设 $L^\bullet = \varprojlim_n L_n^\bullet, w = \varprojlim_n w_n$, 对足够小的 n , 我们设 $L_n = Y, v_n = \text{id}_Y, w_n = \text{id}_Y$ 。假设我们已经对整数 $n < q, q \in \mathbb{Z}$, 构造了复形 $L_n^\bullet$ 和态射 v_n, w_n 有以上的性质 1), 2), 3)。复形 X_n 有形式:

$$X_n = \cdots \rightarrow Y^{-n-2} \rightarrow Z^{-n-1} \rightarrow X^{-n} \rightarrow X^{-n+1} \rightarrow \cdots$$

而复形 $L_n^\bullet$ 有形式:

$$L_n^\bullet = \cdots \rightarrow Y^{-n-2} \rightarrow X'^{-n-1} \rightarrow L^{-n} \rightarrow L^{-n+1} \rightarrow \cdots$$

这里 Y^i (对应地, X^i) 是复形 Y (对应地, X) 的组成。我们有一个图表:

$$\begin{array}{ccc} & & X^{-q} \\ & & \downarrow (u_q)^{-q} \\ Z'^{-q} & \xrightarrow{(w_{q-1})^{-q}} & Z^{-q} \end{array}$$

这里 $(u_q)^{-q}$ 是满射而 $Z'^{-q} \in M^\wedge$ 。由于集合 $M^\wedge$ 有性质 (E_2) (2.2.4)

我们可以完成图表为交换图表：

$$\begin{array}{ccc} L^{-q} & \xrightarrow{\beta} & X^{-q} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow (u_q)^{-q} \\ Z'^{-q} & \xrightarrow{(w_{q-1})^{-q}} & Z^{-q} \end{array}$$

这里态射 α 是满射而 L^{-q} 是 M 中的对象。于是我们得到，用 (2.1.1.2) 和 (2.1.1.3) 的记号，得到一个复形的交换图表：

$$\begin{array}{ccc} L_{q-1}^\bullet(\alpha, -q) & \xrightarrow{\varphi} & X_{q-1}((u_q)^{-q}, -q) \simeq X_q \\ p(\alpha, -q) \downarrow & & \downarrow p((u_q)^{-q}, -q) \simeq u_q \\ L_{q-1}^\bullet & \xrightarrow{w_{q-1}} & X_{q-1} \end{array}$$

现在设 $L_q^\bullet = L_{q-1}^\bullet(\alpha, -q)$, $w_q = \varphi$, $v_q = p(\alpha, -q)$ ，则复形 $L_n^\bullet$ 是复形的态射，而 $w_n, v_n, n \leq q$ 有性质 2), 3)。故只需证明 $L_q^\bullet$ 有上述的性质 1)。这由集合 $M^\wedge$ 是正合的 (E_6) (2.2.4) 得到。

下面证明 b)。设 L 是 M 中的元素，而 $u: X \rightarrow L$ 是一个满射。定义 Y 为 u 的核。我们有一个拟同构：

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

从而，我们有一个拟同构：

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & L^{-1} & \longrightarrow & L^0 & \longrightarrow & L^1 & \longrightarrow & L^2 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

这里 L^i 是 M 中的元素。因此，态射 uv 是一个满射，这证明了性质 (E_2) 。然后设

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{u} L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow 0$$

为正合序列，这里 L_i 是 M 中的元素。因此我们有一个拟同构：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & L_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

从而存在一个拟同构：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L^{-n-1} & \longrightarrow & L^{-n} & \longrightarrow & L^{-n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

因此 v 是一个满射，这就证明了性质 (E_3) ，从而证明了该命题。

命题 2.3.2. 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中有性质 $(E_1), (E_2), (E_3)$ 的对象的集合。设 $Y \in \text{Ob comp}(\mathcal{A})$ 是一个复形使得对任意整数 n 有 $H^n(Y) \in M$ 且存在一个 n_0 使得 $H^n(Y) = 0$ 对 $n \geq n_0$ 。则存在一个复形 $X \in \text{Ob comp}(\mathcal{A})$ ，其组成在 M 中且有拟同构

$$u : X \rightarrow Y$$

首先, 存在 (1.2.1) 一个复形 $Y' \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 和一个拟同构 $Y' \rightarrow Y$ 。因此我们可以假设 Y 是 $\text{comp}^-(\mathcal{A})$ 中的对象。我们对 n 归纳构造一系列态射:

$$u_n = X_n \rightarrow X_{n-1}$$

有下列性质:

- 1) 对充分小的 n 有 $X_n = Y$ 和 u_n 为恒同。
- 2) X_n 的次数 $i \geq -n$ 的组成是 M 中的对象。 X_n 的次数 $i \geq -n$ 的微分的核和像是 $M^\wedge$ (2.1.1) 中的元素。
- 3) 态射 u_n 是拟同构, 它同构于态射 $p((u_n)^{-n}, -n)$ (2.1.1.3)。

如果其成立, 只需设 $X = \varprojlim_n X_n$ 且态射 u 是典范态射:

$$u : X = \varprojlim_n X_n \rightarrow \varinjlim_n X_n = Y$$

对 n 足够小, 我们设 $X_n = Y$ 且 $u_n = \text{id}_Y$ 。假设我们已经对整数 $n < q$ 构造了复形 X_n 和态射 u_n 有以上的性质 1), 2), 3)。复形 X_{q-1} 有形式:

$$X_{q-1} = \cdots \rightarrow Y^{-q-2} \rightarrow Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+2} \rightarrow \cdots$$

这里 Y^i 是 Y 的组成而 L^i 是 M 的元素, 我们有满射:

$$Z^{-q} \rightarrow Z^{-q} / \text{Im}(Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q}) \rightarrow 0$$

和正合序列：

$$0 \rightarrow H^{-q}(X_{q-1}) \rightarrow Z^{-q} / \text{Im}(Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q}) \rightarrow Z^{-q} / \text{Ker}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Z^{-q} / \text{Ker}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+1} / \text{Im}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^{-q+1}(X_{q-1}) \rightarrow L^{-q+1} / \text{Im}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow L^{-q+1} / \text{Ker}(L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+2}) \rightarrow 0$$

复形 X_{q-1} 与 Y 拟同构，对象 $H^i(X_{q-1})$ 是 M 中的对象。由上述正合序列和归纳假设 2) 和集合 $M^\wedge$ (2.2.4) 的正合性知对象 $Z^{-q} / \text{Im}(Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q})$ 是 $M^\wedge$ 中的元素。因此，存在一个态射

$$v : L^{-q} \rightarrow Z^{-q}$$

使得 L^{-q} 是 M 中的元素且使得态射的复合

$$L^{-q} \xrightarrow{v} Z^{-q} \rightarrow Z^{-q} / \text{Im}(Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q})$$

是满射。设

$$X_q = X_{q-1}(v, -q)$$

$$u_q = p(v, -q) \quad (2.1.1)$$

由 (2.1.2) 得到 u_q 是一个拟同构，这就是性质 3)。故只需验证性质 2)，即态射 $L^{-q} \rightarrow L^{-q+1}$ 的核和像是 $M^\wedge$ 中的对象。这立即由以下正合序列得到：

$$0 \rightarrow \text{Im}(L^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow \text{Ker}(L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+2}) \rightarrow H^{-q+1}(X_q) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ker}(L^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow L^{-q} \rightarrow \text{Im}(L^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow 0$$

这就完成了命题的证明。

命题 2.3.3. 设 $M \subset M'$ 为 $\mathcal{A}$ 中两个对象的集合使得 M 有性质 (E_4) 和 (E_5) , M' 有性质 (E_1) 和 (E_4) , 且 M' 中对象是是 M 中某个对象的商对象。设 $Y \in \text{Ob comp}(\mathcal{A})$ 为复形使得

1) Y 的组成 $Y^i, i \in \mathbb{Z}$ 是 M' 中的元素。

2) 序列 $i \mapsto i - M\text{-dim}(Y^i)$ 当 i 趋于 $+\infty$ 时趋于 $+\infty$ 。

则存在一个复形 $X \in \text{Ob comp}(\mathcal{A})$, 其组成在 M 中且有拟同构

$$u : X \rightarrow Y$$

如果我们再假设 Y 的组成是 M -维数有限且 $Y \in \text{Ob comp}^b(\mathcal{A})$ (对应地, $Y \in \text{Ob comp}^+(\mathcal{A})$), 我们能取 X 在 $\text{comp}^b(\mathcal{A})$ (对应地, $\text{comp}^+(\mathcal{A})$) 中。

设 n_0 是一个整数使得 $i > n_0 \implies M\text{-dim}(Y^i) < +\infty$ 。我们想构造:

a) 一系列复形 $X_i, i \geq n_0$ 。

b) 一系列态射 $u_i : X_i \rightarrow X_{i-1}, i > n_0, u_{n_0} : X_{n_0} \rightarrow Y$ 使得:

$$1)_i (X_i)^j \in M \text{ 对 } j \leq i$$

2)_i $(X^i)^j = Y^j$ 对 $j > i$ 。

3)_i 态射 u_i 是拟同构。

4)_i $(u_i)^j = \text{恒同对}$ $j > i$ 。

5)_i $(u_i)^j = \text{恒同对}$ $j < i - M\text{-dim}(Y^i)$ 。最后个性质对 $i > n_0$

如果有了该构造，注意到对投射系 X_i 有 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 的投射极限：该投射系的组成的次数是稳定的，因为 $i - M\text{-dim}(Y^i)$ 和 i 一起趋向于 $+\infty$ 。因此只需设 $X = \varprojlim_i X_i$ 和 $u : X \rightarrow Y$ 为典范态射。复形 X 的组成是 M 中的元素而态射 u 是拟同构。

首先构造态射 $u_{n_0} : X_{n_0} \rightarrow Y$ 。根据假设，我们已经构造了对整数 i 且 $-n_0 \leq i < q$ ，复形 $X_{n_0, i}$ 和态射 $v_{n_0, i} : X_{n_0, i} \rightarrow X_{n_0, i-1}, i > -n_0$ 和 $v_{n_0, -n_0} : X_{n_0, -n_0} \rightarrow Y$ 使得

$II)_{n_0, i}$ 组成 $(X_{n_0, i})^j$ 是 M 中的对象对 $-i \leq j \leq n_0$ 。

$III)_{n_0, i}$ 组成 $(X_{n_0, i}^j)$ 是 M' 中的对象对任意整数 j 。

$III)_{n_0, i}$ 态射 $v_{n_0, i}$ 是高度为 $-i$ 的初等态射 (2.1.3)。

于是复形 $X_{n_0, q-1}$ 有形式

$$\dots \rightarrow Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+2} \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow L^{n_0-1} \rightarrow L^{n_0} \rightarrow Y^{n_0+1} \rightarrow Y^{n_0+2} \rightarrow \dots$$

这里 Z^{-q} 是 M' 中的元素而 $L^j, -q+1 \leq j \leq n_0$ 为 M 中的元素。
故存在一个满射

$$\alpha : L^{-q} \rightarrow Z^{-q} \text{ 这里 } L^{-q} \in M$$

于是设

$$X_{n_0, q} = X_{n_0, q-1}(\alpha, -q)$$

$$v_{n_0, q} = p(\alpha, -q) \quad (2.1.1)$$

显然由此构造我们有性质 $I)_{n_0, q}$ 和 $III)_{n_0, q}$ 。性质 $II)_{n_0, q}$ 由集合 M' 有性质 (E_1) 和 (E_4) 得到。于是我们构造了 $X_{n_0, i}$ 。最后设 $X_{n_0} = \varprojlim_i X_{n_0, i}$ 和 $u_{n_0} : X_{n_0} \rightarrow Y$ 为典范态射, 我们得到一个复形和一个态射有性质 $1)_{n_0}, 2)_{n_0}, 3)_{n_0}, 4)_{n_0}$ 。

为了构造复形 X_i 和态射 $u_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$, 我们使用归纳法。假设我们已经对整数 $i, n_0 \leq i < q$ 构造了复形 X_i 和态射 $u_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ 有性质 $1)_i, 2)_i, 3)_i, 4)_i, 5)_i, n_0 \leq i < q$ 。要构造复形 X_q 和态射 $u_q : X_q \rightarrow X_{q-1}$ 有性质 $1)_q, 2)_q, 3)_q, 4)_q, 5)_q$ 。首先, 如果 $Y^q \in M$, 我们设 $X_q = X_{q-1}$ 且 u_q 为恒同。假设 Y^q 不在 M 中, 即 $M\text{-dim}(Y^q) > 0$ 。为了构造复形 X_q 和态射 $u_q : X_q \rightarrow X_{q-1}$, 我们使用新的归纳。设 r 是一个整数使得 $-q < r \leq -q + M\text{-dim}(Y^q)$ 。假设我们已经得到复形 $X_{q, l}, -q < l < r$ 和态射 $v_{q, r} : X_{q, r} \rightarrow X_{q, l-1}$ (我们设 $X_{q, -q} = X_{q-1}$) 使得

$I')_l \quad (X_{q,l})^j = (X_{q,l-1})^j \quad \text{对于} \quad j \neq -l, -l+1 \circ$

$II')_l \quad (X_{q,l})^{-l} \in M' \quad \text{且} \quad M\text{-dim}((X_{q,l})^{-l}) = M\text{-dim}(Y^q) - l - q \circ$

$III')_l \quad (X_{q,l})^{-l+1} \in M \circ$

$IV')_l \quad v_{q,l}$ 是高度为 $-l+1$ 的初等态射而 $(v_{q,l})^j = \text{恒同对}$ $j \neq -l, -l+1 \circ$

复形 $X_{q,r-1}$ 有形式:

$$\cdots \rightarrow L^{-r} \rightarrow Z^{-r+1} \rightarrow L^{-r+2} \rightarrow \cdots \rightarrow L^q \rightarrow Y^{q+1} \rightarrow Y^{q+2} \rightarrow \cdots$$

这里 L^i 是 M 中的元素, 而 Z^{-r+1} 是 M' 中的元素使得 $M\text{-dim}(Z^{-r+1}) = M\text{-dim}(Y^q) - r + 1 - q$ 因此存在一个满射 $\alpha: L^{-r+1} \rightarrow Z^{-r+1}$

这里 L^{-r+1} 是 M 中的元素, 因此设 $X_{q,r} = X_{q,r-1}(\alpha, -r+1)$ 和 $v_{q,r} = p(\alpha, -r+1)$ (2.1.1)。显然 $X_{q,r}$ 和 $v_{q,r}$ 有性质 $I')_r, III')_r, IV')_r \circ$

另外, 由复形 $X_{q,r}$ (2.1.1) 的定义, 有一个正合序列:

$$0 \rightarrow (X_{q,r})^{-r} \rightarrow L^{-r} \oplus L^{-r+1} \rightarrow Z^{-r+1} \rightarrow 0$$

由性质 (E_4) 得到 $(X_{q,r})^{-r}$ 是 M' 中的元素 (2.2.6) 且

$$M\text{-dim}((X_{q,r})^{-r}) = M\text{-dim}(Z^{-r+1}) - 1 = M\text{-dim}(Y^q) - r - q$$

这就是性质 $II')_r$ 。于是我们能继续构造。设 $X_{q,-q+M\text{-dim}(Y^q)} = X_q$ 且定义 $u_q: X_q \rightarrow X_{q-1}$ 为 $v_{q,l}$ 的复合。显然 X_q 和 u_q 有性质

$1)_q, 2)_q, 3)_q, 4)_q, 5)_q \circ$ 这完成了该命题的第一个断言的证明。为了证明第二个断言，只需注意到在充分性条件下，我们可以取 $X_{n_0} = Y$ 对合适的 n 。

注 2.3.4. 在复形 X_{n_0} (命题 (2.3.3)) 的构造中，我们实际上得到了以下命题：设 $M \subset M'$ 为两个 $\mathcal{A}$ 中的对象的集合使得 $0 \in M$, M' 有性质 (E_1) 和 (E_4) , 且 M' 中的对象是 M 中某个对象的商对象。设 $Y \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 为组成在 M' 中的复形，则存在一个复形 $X \in \text{Ob comp}^-(\mathcal{A})$ 其组成在 M 中且有拟同构 $u: X \rightarrow Y$ 。

2.3.5. 我们留给读者去陈述在 $\mathcal{A}$ 的反范畴中的类似的结果。我们称 $\mathcal{A}$ 中的集合 M 有性质 $(E_i)^\circ, 1 \leq i \leq 6$, 如果 $\mathcal{A}^\circ$ 中的集合 M 有 (2.2.1) 中的性质 (E_i) 。

2.4. 应用

命题 2.4.1. a) 设 $\mathcal{A}$ 是一个 *Abel* 范畴而 M 是 $\mathcal{A}$ 中满足 (E_1) (2.2.1) 的对象的集合，则范畴 $\mathcal{K}^-(M)$ (1.1.4) 在左边是 $\text{Ac}(\mathcal{A})$ -局部的 (第二章 2.3.5) 当且仅当 M 有性质 (E_2) 和 (E_3) 。

b) 设 M 是对象的集合满足 $(E_1), (E_2)$ 和 (E_3) , 而 $M^\wedge$ 是在 (2.2.1) 中定义的与 M 相关的集合。则自然函子：

$$\mathcal{K}^-(M)/\text{Ac}^-(M) \rightarrow \mathcal{K}^-(M^\wedge)/\text{Ac}^-(M^\wedge)$$

是范畴同构。自然函子：

$$K^-(M^\wedge)/Ac^-(M^\wedge) \rightarrow D^-(\mathcal{A})$$

是全忠实的。 $D^-(\mathcal{A})$ 中上同调的对象是 $M^\wedge$ 中的元素的对象同构与 $K^-(M^\wedge)/Ac^-(M^\wedge)$ 中的对象，这里 $Ac^-(M)$ 和 $Ac^-(M^\wedge)$ 为对象分别在 M 和 $M^\wedge$ 中的零调的复形组成的范畴。

该命题立即由 (2.3.1) 和 (2.3.2) 和 (第二章2.3.5) 得到。

推论 2.4.2. 设 U 为泛元，设 $\mathcal{A}$ 是一个 U -范畴，即，对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 Y 和 Z ， $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$ 是 U 中的元素。且下标为 U 中元素的直和存在。设 $(X_i)_{i \in I \in U}$ 是范畴 $\mathcal{A}$ 中的生成元，而 M 是 $\mathcal{A}$ 中形如 $\coprod_{j \in J \in U} X_j$ 的对象的集合，这里 X_j 是集合 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 中的元素。则自然函子

$$K^-(M)/Ac^-(M) \rightarrow D^-(\mathcal{A})$$

是范畴同构。

由 (2.4.1) 立即得到。

命题 2.4.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 *Abel* 范畴， M 是 $\mathcal{A}$ 中有性质 (E_4) 和 (E_5) 的对象的集合，使得任意 $\mathcal{A}$ 中对象是 M 中某个对象的商对象。且存在一个整数 $n \in \mathbb{N}$ 为 $\mathcal{A}$ 中对象 X 的 M -维数的界。

a) 范畴 $K^*(M)$ 在左边是 $Ac^*(\mathcal{A})$ -局部的 ($*$ = $-$, $+$, b 或空)。

b) 自然函子

$$K^*(M)/Ac^*(M) \rightarrow D^*(\mathcal{A})$$

是范畴同构。

由命题 (2.3.3) ($*$ = +, b 或空), 和命题 (2.3.1) ($*$ = -)。

命题 2.4.4. 定义 $Q^* : K^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{A})$ 为典范函子。

a) 设 X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 则 X 在左边是 Q -自由的 (第二章 2.3.2) 当且仅当 X 是 $\mathcal{A}$ 中的投射对象。

b) 设 P 表示 $\mathcal{A}$ 中投射对象的集合, 则剖分范畴 $K^-(P)$ 是在左边 Q -自由的对象构成的范畴的子范畴。自然函子

$$K^-(P) \rightarrow D(\mathcal{A})$$

是全忠实的。

c) 如果任意 $\mathcal{A}$ 中对象都是投射对象的商对象 (对应地, 如果存在一个整数 $n \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{A}$ 中对象的投射维数的界), 则

1) 自然函子 $K^-(P) \rightarrow D^-(\mathcal{A})$ (对应地, $K^*(P) \rightarrow D^*(\mathcal{A})$) 是范畴同构。定义 $L^- : D(\mathcal{A}) \rightarrow K^-(P)$ (对应地, $L^* : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow K^*(P)$) 为拟逆函子。

2) 函子 $L^-Q^- : K^-(\mathcal{A}) \rightarrow K^-(P)$ (对应地, $L^*Q^* : K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K^*(P)$) 是包含函子的右伴随:

$$K^-(P) \rightarrow K^-(\mathcal{A}), (\text{对应地}, K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K^*(P))$$

伴随态射 $\text{id}_{K^-(\mathcal{A})} \rightarrow L^-Q^-$ (对应地, $\text{id}_{K^*(\mathcal{A})} \rightarrow L^*Q^*$) 是拟同构。

3) 函子 L^- (对应地, L^*) 是函子 Q^- (对应地, Q^*) 的左伴随。

4) $K^-(\mathcal{A})$ (对应地, $K^*(\mathcal{A})$) 中的对象是在坐标 Q^- -自由的当且仅当他同构与 $K^-(P)$ (对应地, $K^*(P)$) 中的对象。

先证明 a)。对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 Y , 我们有 $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0$ 对 $n \neq 0$, 从而如果 X 是在左边 Q^- -自由 (第二章2.3.3), 我们有

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0, \text{ 对于 } n \neq 0$$

此外, 我们有 $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ (1.2.9)。于是设

$$S = 0 \rightarrow Y' \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Y'' \rightarrow 0$$

是 $\mathcal{A}$ 中的正合序列, 作用典范上同调函子 $\text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ (1.3.2) 得到特异三角形 $(Y', Y, Y'', [u], [v], \delta(S))$ 。于是有一个正合序列 (第二章1.2.1):

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y') \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y'') \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

即，一个正合序列：

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y'') \rightarrow 0$$

这证明了 X 是 $\mathcal{A}$ 中的投射对象。

再证明 $b)$ 。设 $L^\bullet$ 是 $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ 中的投射型的复形而 $u: L^\bullet \rightarrow Y$ 是零调复形之间的态射。假设我们已经构造对任意整数 $i > n$ ，一个态射 $s^i: L^i \rightarrow Y^{i-1}$ 使得 $u^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_L^i$ 。(这样的构造一定存在对充分大的 n 因为 $L^\bullet$ 是 $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ 中的对象)。我们得到 $d_Y^n(u^n - s^{n+1}d_L^n) = 0$ ，因此态射 $u^n - s^{n+1}d_L^n$ 经过 $\text{Ker}(d_Y^n)$ 。复形 Y 是零调的，因此态射 $Y^{n-1} \rightarrow \text{Ker}(d_Y^n)$ 是满射，而对象 L^n 是投射的，存在一个态射 $s^n: L^n \rightarrow Y^{n-1}$ 使得 $d_Y^{n-1}s^n = u^n - s^{n+1}d_L^n$ 。因此根据归纳法知存在对任意整数 i 有态射 s^i 使得 $u^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_L^i$ 。态射 u 与零同伦。于是 (第二章2.3.3) 我们得到对象 $L^\bullet$ 是在左边 Q -自由的。 $b)$ 的第二个断言由 (第二章2.3.3) 得到。

再证明 $c)$ 。断言 $1)$ 立即由 $b)$ 和 (2.3.1) 得到。为了证明断言 $1)$ 的对应地情况，首先证明任意投射型的复形都在左边 Q -自由的。设 $L^\bullet$ 是一个投射型的复形而 $u: X \rightarrow L^\bullet$ 是拟同构。只需证 u 有一个右逆 (第二章2.3.3)。只需证们存在一个投射型的复形 $L'^\bullet$ 和一个拟同构 $v: L'^\bullet \rightarrow X$ 使得态射的复合 $uv: L'^\bullet \rightarrow L^\bullet$ 是 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的同构。根据 (2.3.3)，存在一个投射型的复形 $L'^\bullet$ 和一个拟同构 $v: L'^\bullet \rightarrow X$ ，故只需证明拟同构 $uv: L'^\bullet \rightarrow L^\bullet$ 是一个同构。存在一个特异三角形

$(L^\bullet, L^\bullet, L''^\bullet, uv, w, m)$ 这里 $L''^\bullet$ 是一个投射型的零调的复形。故只需证明零调的投射型的复形同伦于零。设 $L''^\bullet$ 是一个零调的投射型的复形, 由于 $\mathcal{A}$ 中对象的投射维数有界, $L''^\bullet$ 的微分的核与像是投射的 (2.2.6)。我们得到 $L''^\bullet$ 的微分是可分解的态射 (第二章1.2.8), 于是 $L''^\bullet$ 同伦与零。

从 (第二章2.3.3) 得到自然函子 $\kappa^*(P) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 是全忠实的。因此, 函子 $\kappa^*(P) \rightarrow D^*(\mathcal{A})$ 是全忠实的。根据 (2.3.3), 该函子也是要满的, 从而为范畴等价。断言 2) 和 3) 是 (第二章2.3.3) 的直接应用。断言 4) 是平凡的: 根据 (2.1.3)(对应地, (2.3.3)), $\kappa^-(\mathcal{A})$ (对应地, $\kappa^*(\mathcal{A})$) 的一个在左边 Q -自由的对象有一个 $\kappa^-(\mathcal{A})$ (对应地, $\kappa^*(\mathcal{A})$) 中的投射型的左分解。而一个在左边 Q -自由的对象的拟同构是 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的同构。

注 2.4.5. a) 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, 其对象均同构与一个投射对象的商对象。一个投射型的复形不一定是在左边 Q -自由的。

例如: 设 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -模的范畴, 则复形

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \cdots$$

其每个微分均为乘以 2, 它是零调的且是投射型的, 但它不同伦与零。类似的复形给出一个内射型的零调复形与零不同伦。

b) 类似地, 当 $\mathcal{A}$ 中对象的投射维数无界时, 存在投射型的在左边 Q -自由的复形, 其在 $D(\mathcal{A})$ 中的像不在 $D^-(\mathcal{A})$ 中。例如, Cartan-Eilenberg 的投射复形是在左边 Q -自由的, 更一般地, 在左边 Q -自由的对象的直和是在左边 Q -自由的。

2.4.6. 我们留给读者去陈述在 $\mathcal{A}$ 的反范畴中的类似的结果。

3. Ext 的研究

在本节中, $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴。

3.1. 不同定义的等价性

3.1.1. 我们称 $\mathcal{A}$ 的上同调维数是低于或等于 n 如果对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 和 Y 以及任意整数 $p > n$ 有 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(X, Y) = 0$ ((1.2.5), (1.2.9))。我们称 $\mathcal{A}$ 的上同调维数, 记作 $\dim\text{coh}(\mathcal{A})$, 为最小的整数 n 使得 $\mathcal{A}$ 的上同调维数小于或等于 n 。如果不存在这样的整数 n 使得 $\mathcal{A}$ 的上同调维数小于或等于 n , 则称 $\mathcal{A}$ 的上同调维数为无穷并记为 $\dim\text{coh}(\mathcal{A}) = +\infty$ 。

3.1.2. 在 (1.1.3) 中我们定义了 Qis^* 为 $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ ($*$ = $b, -, +$ 或空) 中的拟同构的集合。设 X 是 $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ 中的对象, 定义 Qis^*/X (对应地, $X \backslash \text{Qis}^*$) 为指向 X (对应地, 从 X 发出) 的拟同构 (第二章 2.2.1) 所组成的范畴。范畴 Qis^*/X (对应地, $X \backslash \text{Qis}^*$) 是在左 (对应地, 右) 边过滤的 (第二章 2.2.1)。范畴 Qis^*/X (对应地, $X \backslash \text{Qis}^*$) 有一个始对象 (对应地, 终对象) $u: Y \rightarrow X$ (对应地, $u: X \rightarrow Y$) 当且仅当存在一个在左 (对应地, 右) 边 Q^* -自由的对象 Y 和拟同构 $u: Y \rightarrow X$ (对应地, $u: X \rightarrow Y$), 由 (第二章 2.3.3) 立即可以看出这一点。

命题 3.1.3. 设 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 中的两个复形。

$$(1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) = \varinjlim_{(\text{Qis}/X)^{\circ}} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(\cdot, Y)$$

$$(2) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{Y \setminus \text{Qis}} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot)$$

$$(3) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{(\text{Qis}/X)^{\circ} \times (Y \setminus \text{Qis})} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(\cdot, \cdot)$$

$$(4) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X[p], Y[n+p]), \quad \text{对任意整数 } p。$$

$$(5) \quad \text{对任意 } \mathbf{K}^{-}(\mathcal{A}) \text{ 中的 } X, \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{(\text{Qis}^{-}/X)^{\circ}} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(\cdot, Y)$$

$$(6) \quad \text{对任意 } \mathbf{K}^{+}(\mathcal{A}) \text{ 中的 } Y, \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{Y \setminus \text{Qis}^{+}} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot)$$

$$(7) \quad \text{对任意 } \mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \text{ 中的 } X \text{ 和 } \mathbf{K}^{+}(\mathcal{A}) \text{ 中的 } Y,$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{(\text{Qis}^b/X)^{\circ}} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(\cdot, Y)$$

$$(8) \quad \text{对任意 } \mathbf{K}^{-}(\mathcal{A}) \text{ 中的 } X \text{ 和 } \mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \text{ 中的 } Y,$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{Y \setminus \text{Qis}^b} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot)$$

式 (1) 由范畴局部化 (第二章2.2.2) 的定义得到。式 (2) 由式 (1) 通过传递到反范畴 (第二章2.2.4) 中得到。式 (3) 由式 (1) 和 (2) 得到。式 (4) 就是定义 (第一章1.3.8)。式 (5) 和 (6) 由命题 (1.2.1) 的 $b)$ 和 $b)^{\text{bis}}$ 得到。式 (7) 和 (8) 由命题 (1.2.1) 的 $c)$ 和 $c)^{\text{bis}}$ 得到。

命题 3.1.4. 我们设任意 $\mathcal{A}$ 中的对象同构与一个 $\mathcal{A}$ 中内射 (对应地, 投射) 对象的子 (对应地, 商) 对象。

1) $K^+(\mathcal{A})$ (对应地, $K^-(\mathcal{A})$) 中的对象 Y (对应地, X) 有一个内射 (对应地, 投射) 型 (1.1.4) 的右 (对应地, 左) 分解 $u: Y \rightarrow I^\bullet$ (对应地, $u: P^\bullet \rightarrow X$)。

2) 该分解定义了一个同构:

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, I^\bullet), \text{ 对 } K(\mathcal{A}) \text{ 中的 } X$$

$$(\text{对应地, } \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P^\bullet, Y), \text{ 对 } K(\mathcal{A}) \text{ 中的 } Y)$$

3) $\mathcal{A}$ 的上同调维数以 $\mathcal{A}$ 中对象的内射 (对应地, 投射) 维数为上界。

4) 当 $\mathcal{A}$ 的上同调维数是有限时, 对任意 $K(\mathcal{A})$ 中的对象 Y (对应地, X) 有一个内射 (对应地, 投射) 型的右 (对应地, 左) 分解 $u: Y \rightarrow I^\bullet$ (对应地, $u: P^\bullet \rightarrow X$)。

5) 在 4) 的假设下, 一个这样的分解定义了一个同构:

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, I^\bullet), \text{ 对 } K(\mathcal{A}) \text{ 中的 } X$$

$$(\text{对应地, } \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P^\bullet, Y), \text{ 对 } K(\mathcal{A}) \text{ 中的 } Y)$$

只需证明第三个论断。其余论断为命题 (2.4.4) 的直接推论。论断 2) 说明 $\mathcal{A}$ 的上同调维数小于或等于 $\mathcal{A}$ 中对象的内射 (对应地, 投射) 维数。假设 $\mathcal{A}$ 的上同调维数等于 n 且设

$$I^\bullet = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^2 \rightarrow I^3 \rightarrow \cdots$$

是 $\mathcal{A}$ 中对象 Y 的内射分解。对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 X , 我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X[-n-1], I^\bullet) = 0$, 特别地, 假设 $X = \mathrm{Ker} d_{I^\bullet}^{n-1}$, 我们便得到典范态射 $\mathrm{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1} \rightarrow I^{n+1}$ 经过 I^n :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1} & & \\ & \swarrow \text{---} & \downarrow & & \\ I^n & \longrightarrow & I^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

因此, $\mathrm{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1}$ 和 $\mathrm{Ker} d_{I^\bullet}^n$ 是 I^n 的直和因子, 从而是内射的。复形

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I^{n-1} \rightarrow \mathrm{Ker} d_{I^\bullet}^n \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

是 Y 的一个内射分解。这就说明了 Y 的内射维数小于或等于 n 。类似得到 $\mathcal{A}$ 中对象 X 的投射维数小于或等于 n 。

3.1.5. 设 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 中的两个对象, 命题 (3.1.4) 说明当 $\mathcal{A}$ 中有足够多内射或投射对象时, 这里定义的群 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ 与传统的定义是一样的。

3.2. Yoneda 的构造

3.2.1. 设 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 中的两个对象。定义 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) (n \geq 1)$ 为以下正合序列的集合：

$$S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow Z_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0$$

n 被称作序列 $S^n(X, Y)$ 的长度。我们将 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 中的元素 $S^n(X, Y)$ 关联到三个复形：

a) 复形 X ，其组成除了 0 次为 X 外均为零。

b) 复形

$$Z^\bullet = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow Y \rightarrow Z^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Z_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

(Y 的次数为 $-n$ ，而 Z_i 的次数为 $-i$)。

c) 复形 $Y[n]$ ，其唯一非零的组成是 $-n$ 次的 Y 。

定义 $u(S^n(X, Y)) : Z^\bullet \rightarrow X$ 为态射，其唯一非零的组成为 0 次的 u_0 。而 $v(S^n(X, Y)) : Z^\bullet \rightarrow Y[n]$ 为态射，其唯一非零的组成为 $-n$ 次的 id_Y 。态射 $u(S^n(X, Y))$ 是一个拟同构，从而得到 $D(\mathcal{A})$ 中的态射 (用 (1.3.2) 的记号)：

$$\delta_{\mathcal{A}}^n(S^n(X, Y)) = [v(S^n(X, Y))][v(S^n(X, Y))]^{-1} : X \rightarrow Y[n] \quad (3.2.1.1)$$

因此我们定义了一个映射

$$\delta_{\mathcal{A}}^n : E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \quad (3.2.1.2)$$

注意到 δ^n 的记号没有任何歧义。

命题 3.2.2. a) 态射 δ^n 是满的。

b) 两个元素

$$S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Z_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

$$S'^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \rightarrow Z'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Z'_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

在 δ^n 下的像相同当且仅当存在一个元素

$$S''^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \rightarrow Z''_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Z''_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

和一个交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{id} & & & & & & & & \text{id} & & \\
 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z''_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{id} & & & & & & & & \text{id} & & \\
 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z'_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

c) 当 $n = 1$ 时, δ^1 为由典范 δ -函子 $\text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{D}(\mathcal{A})$ ([1.3.2](#)) 所定义。

这些结果由命题 (3.1.3) 公式 (7) 得到。我们留给读者作为练习，也可以参照 [3]。

3.2.3. 设 $S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} Z_{n-2} \cdots Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0$ 为 $E_A^n(X, Y)$ 中的元素。对所有整数 $p, 0 \leq p \leq n$, 取一个 $\varepsilon_p \in \{-1, +1\}$, 定义 $S_\varepsilon^n(X, Y)$ 为正合序列

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{\varepsilon_n u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon_{n-1} u_{n-1}} Z_{n-2} \cdots Z_0 \xrightarrow{\varepsilon_0 u_0} X \rightarrow 0 \quad (3.2.3.1)$$

为 $E_A(X, Y)$ 中的元素，我们有等式

$$\delta^n(S_\varepsilon^n(X, Y)) = \left(\prod_{i=0}^n \varepsilon_i \right) \delta^n(S^n(X, Y)) \quad (3.2.3.2)$$

式 (3.2.3.2) 由 (3.2.2),_b) 中的等价关系和 δ^n 的定义 (3.2.1.1) 得到。

3.2.4. 设有两个正合序列：

$$S^n(X, X') = 0 \rightarrow X' \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0$$

$$S^m(X', X'') = 0 \rightarrow X'' \xrightarrow{u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{u'_{m-1}} \cdots \xrightarrow{u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u'_0} X' \rightarrow 0$$

定义 $S^m(X', X'') * S^n(X, X')$ 为以下正合序列：

$$S^m(X', X'') * S^n(X, X') =$$

$$0 \rightarrow X'' \xrightarrow{u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{u'_{m-1}} \cdots Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0 \quad (3.2.4.1)$$

命题 3.2.5. 我们有等式

$$\delta^{m+n}(S^m(X, X'') * S^n(X, X')) = (-1)^{mn}(\delta^m(S^m(X', X'')))[n]\delta^n(S^n(X, X'))$$

首先决定态射 $(\delta^m(S^m(X', X'')))[n]\delta^n(S^n(X, X'))$ 。使用 (3.2.1) 的记号, 我们有两个图表:

$$X' \xleftarrow{u(S^m(X', X''))} Z' \bullet \xrightarrow{v(S^m(X', X''))} X''[m]$$

$$X \xleftarrow{u(S^n(X, X'))} Z \bullet \xrightarrow{v(S^n(X, X'))} X'[n]$$

从而我们有

$$X \xleftarrow{u(S^n)} Z \bullet \xrightarrow{v(S^n)} X'[n] \xleftarrow{u(S^m)[n]} Z' \bullet [n] \xrightarrow{v(S^m)[n]} X''[m+n]$$

(这里省略了显然的一些记号)。由 $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ 中平移的定义 (第二章 2.2.6) 有等式:

$$\begin{aligned} (\delta^m(S^m(X, X')))[n]\delta^n(S^n(X, X')) = \\ [v(S^m)[n]][u(S^m)[n]]^{-1}[v(S^n)][u(S^n)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.5.1)$$

设

$$\begin{aligned} Z'' \bullet = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow X'' \xrightarrow{(-1)^n u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{(-1)^n u'_{m-1}} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{(-1)^n u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.2.5.2)$$

(z_i 在 $z''^\bullet$ 中的次数为 $-i$),

$$\begin{aligned} S^{m+n}(X, X'') = 0 \rightarrow X'' &\xrightarrow{(-1)^n u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{(-1)^n u'_{m-1}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{(-1)^n u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \dots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

现在定义两个复形的态射:

$$\rho: Z''^\bullet \rightarrow Z^\bullet \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^p = \text{id}, p \geq -n+1 \\ \rho^{-n} = u'_0 \\ \rho^p = 0, p \leq -n \end{array} \right. \quad (3.2.5.3)$$

$$\psi: Z''^\bullet \rightarrow Z'^\bullet[n] \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^p = 0, p \geq -n+1 \\ \psi^p = \text{id}, p \leq -n \end{array} \right.$$

我们立即得到以下性质:

a) 态射 $\rho: Z''^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ (3.2.5.3) 是一个拟同构。

b) 以下图表

$$\begin{array}{ccccc} & u(S^{m+n}) & Z''^\bullet & v(S^{m+n}) & \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\ X & \xleftarrow{u(S^n)} & Z^\bullet & \xrightarrow{\rho} & Z'^\bullet[n] & \xrightarrow{v(S^m)[n]} & Z''[m+n] \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\ & v(S^n)X & \xrightarrow{u(S^m)[n]} & & \end{array} \quad (3.2.5.4)$$

中间的方形和两侧的三角形在 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中是交换的。

因此在 $D(\mathcal{A})$ 中, 图表 (3.2.5.4) 得到等式:

$$(\delta^m(S^m(X', X'')))[n]\delta^n(S^n(X, X')) = \delta^{m+n}(S^{m+n}(X, X''))$$

只需使用 (3.2.3.2) 来完成证明。

3.2.6. 命题 (3.2.5) 的一个尤其重要的应用如下。设

$$S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0$$

是 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 中的元素。对任意整数 $p, 1 \leq p \leq n$, 设

$$S_p^1 = 0 \rightarrow \text{Ker}(u_{p-1}) \rightarrow Z_{p-1} \rightarrow \text{Im}(u_{p-1}) \rightarrow 0 \quad (3.2.6.1)$$

我们有等式

$$\delta^n(S^n(X, Y)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \delta^1(S_n^1)[n-1]\delta^1(S_{n-1}^1)[n-2] \cdots \delta^1(S_1^1) \quad (3.2.6.2)$$

用命题 (3.2.5) 立即可以得到。

3.2.7. 设 X 和 Y 是 $\mathcal{A}$ 中的两个对象, 从而也使 $\mathcal{A}$ 的反范畴 $\mathcal{A}^\circ$ 中的对象。则集合 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 和 $E_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X)$ 是相等的, 且我们有两个映射:

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \\ \parallel & & \\ E_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}^\circ}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) \end{array} \quad (3.2.7.1)$$

另外, 在 (1.2.8) 中我们有范畴 $D(\mathcal{A})^\circ$ 等同于范畴 $D(\mathcal{A}^\circ)$, 这允许我们将集合 $\text{Ext}_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X)$ 和 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 等同起来 (第一章1.3.9)。在这个意义下, 我们有两个映射有相同的始和相同的终:

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \\ \parallel & & \parallel \\ E_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}^\circ}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) \end{array} \quad (3.2.7.2)$$

从而我们有关系

$$\delta_{\mathcal{A}}^n = \delta_{\mathcal{A}^\circ}^n \quad (3.2.7.3)$$

该关系在 $n = 1$ 时是正确的, 我们也可以对 n 归纳并使用 (3.2.5) 来证明。

3.2.8. 设

$$S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_2} Z_1 \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0$$

为 $E_{\mathcal{A}}^n$ 中的元素, $f: X' \rightarrow X$ 和 $g: Y \rightarrow Y''$ 为 $\mathcal{A}$ 中两个态射, 设

$$S^n(X, Y) * f = 0 \rightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_2} Z_1 \xrightarrow{u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u'_0} X' \rightarrow 0 \quad (3.2.8.1)$$

这里 Z'_0 是纤维积:

$$\begin{array}{ccc} Z'_0 & \xrightarrow{u'_0} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z_0 & \xrightarrow{u_0} & X \end{array}$$

而 u'_1 定义为唯一的态射使得 $f'u'_1 = u_1$ 和 $u'_0 u'_1 = 0$ 。类似地, 设

$$g * S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y'' \xrightarrow{u''_n} Z''_{n-1} \xrightarrow{u''_{n-1}} Z_{n-2} \xrightarrow{u_{n-2}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0 \quad (3.2.8.2)$$

这里 Z''_{n-1} 为纤维和:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u_n} & Z_{n-1} \\ g \downarrow & & \downarrow g'' \\ Y'' & \xrightarrow{u''_n} & Z''_{n-1} \end{array}$$

而 u''_{n-1} 为唯一的态射使得 $u''_{n-1}g'' = u_{n-1}$ 和 $u''_{n-1}u''_n = 0$ 。

命题 3.2.9. a) 我们有等式:

$$\delta^n(S^n(X, Y) * f) = \delta(S^n(X, Y))f$$

$$\delta^n(g * S^n(X, Y)) = g[n]\delta^n(S^n(X, Y))$$

b) 对于交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} = 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \\) = 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z'_1 & \longrightarrow & Z'_0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

有等式

$$\delta^n(g * S^n(X, Y)) = \delta^n(S'^n(X', Y') * f) \quad (3.2.9.1)$$

当 $n=1$ 时, 该性质就是典范 δ -函子 $\text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{D}(\mathcal{A})$ (1.3) 的性质。一般情况由对 n 的归纳得到, 并运用 (3.2.5)。

3.2.10. 设 $S^n(X, Y)$ 和 $S^n(X', Y')$ 分别为 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 和 $E_{\mathcal{A}}^n(X', Y')$ 中的对象, 并考虑态射

$$\delta^n(S^n(X, Y) \oplus S^n(X', Y')) : X \oplus X' \rightarrow (Y \oplus Y')[n]$$

我们有等式:

$$\delta^n(S^n(X, Y) \oplus S^n(X', Y')) = \begin{pmatrix} \delta^n(S^n(X, Y)) & 0 \\ 0 & \delta^n(S^n(X', Y')) \end{pmatrix} \quad (3.2.10.1)$$

这由映射 δ^n ¹ 的定义立即得到。

3.2.11. 设 $f = \delta^n(S^n(X, Y))$ 而 $g = \delta^n(S'^n(X, Y))$ 为 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 中的两个元素, 根据定义, 态射 $f + g \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 为以下态射的复合:

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ \text{id} \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y[n] \oplus Y[n] \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} Y[n]$$

(3.2.9) 和 (3.2.10) 说明对于元素 $S^n(X, Y)$ 和 $S'^n(X, Y)$, 存在一个 $S''^n(X, Y) \in E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 使得 $\delta^n(S''^n(X, Y)) = f + g$ 。我们留给读者去给出明显的构造。

¹原书为 δ_n

3.2.12. 在这里, 我们说明了群 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ (X 和 Y 是 $\mathcal{A}$ 中的对象) 是由集合 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 商掉 (3.2.2) 中描述的等价关系得到的。另外, 扩张的复合和加法都能直接通过对 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 中的元素的简单操作中得到。这样我们便得到了 Yoneda[3] 中的描述。

3.3. 范畴 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$

引理 3.3.1. a) 设 X 和 Y 是 $\mathcal{A}$ 中的两个对象, 而 $\xi \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X[p], Y)$ $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{q-p}(X, Y), q > p$ 。则存在 $q-p$ 个长度为 1 的正合序列 $S_i^1, 1 \leq i \leq q-p$ 使得由 (3.2.4) 中定义的长度为 n 的正合序列 $S_{q-p}^1 * S_{q-p-1}^1 * \cdots * S_1^1$ 使得

$$\delta^{q-p}(S_{q-p}^1 * S_{q-p-1}^1 * \cdots * S_1^1)[p] = \xi \quad (3.3.1.1)$$

b) 设 S^n 和 S'^n 为两个 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 中的元素, 我们用 (3.2.6) 的记号:

$$S^n = S_n^1 * S_{n-1}^1 * \cdots * S_1^1$$

$$S'^n = S_n'^1 * S_{n-1}'^1 * \cdots * S_1'^1$$

这里 S_i^1 和 $S_i'^1, 1 \leq i \leq n$ 为长度为 1 的正合序列。则以下性质是等价的:

$$i) \quad \delta^n(S^n) = \delta^n(S'^n)$$

ii) 存在长度为 1 的正合序列 $S''^1, 1 \leq i \leq n$ 和 $2n-2$ 个 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f_i, 1 \leq i \leq n-1$ 和 $g_i : 1 \leq i \leq n-1$ 使得正合序列 $S_i^1 * f_{i-1}, 1 < i \leq n, f_i * S_i''^1, 1 \leq i \leq n, S_i'^1 * g_{i-1}, 1 < i \leq n, g_i * S_i''^1, 1 \leq i < n$ 由 ((3.2.8.1) 和 (3.2.8.2)) 定义且使得

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^1(S_n''^1) = \delta^1(S_n^1 * f_{n-1}) \\ \delta^1(S_n''^1) = \delta^1(S_n'^1 * g_{n-1}) \\ \delta^1(f_i * S_i''^1) = \delta^1(S_i^1 * f_{i-1}), 1 < i \leq n-1 \\ \delta^1(g_i * S_i''^1) = \delta^1(S_i'^1 * g_{i-1}), 1 < i \leq n-1 \\ \delta^1(f_1 * S_1''^1) = \delta^1(S-1^1) \\ \delta^1(g_1 * S_1''^1) = \delta^1(S_1'^1) \end{array} \right. \quad (3.3.1.2)$$

事实上, 断言 $a)$ 由 (3.2.2) 和 (3.2.5) 立即得到, 而断言 $b)$ 由映射 $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ ((3.2.2) 和 (3.2.9) 的等价关系的描述中得到。

3.3.2. 回忆 (1.2.11) 中定义 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 为 $\text{D}(\mathcal{A})$ 的由 $\mathcal{A}$ 中对象在平移后生成的全子范畴。设 $\mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$ 为一个函子 (取值为一个范畴但不一定是加性的)。对任意整数 n , 定义 $F^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子 $X \mapsto F(X[n])$ 。类似地, 对任意 $\mathcal{A}$ 中的正合序列 $S^1 = 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 定义 $\delta_F^n(S^1) : F^n(Z) \rightarrow F^{n+1}(X)$ 为态射:

$$F(\delta^1(S^1)[n]) : F(Z[n]) \rightarrow F(X[n+1])$$

函子序列 $F^n, n \in \mathbb{Z}$, 和态射 δ_F^* 具有以下性质 (3.2.9):

SFL I) 对于交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc} S=0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow g & & \\ S'=0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中每行是正合的, 对任意整数 n , 有一个交换图表:

$$\begin{array}{ccc} F^n(Z) & \xrightarrow{\delta_F^n(S)} & F^{n+1}(X) \\ \downarrow F^n(g) & & \downarrow F^{n+1}(f) \\ F^n(Z') & \xrightarrow{\delta_F^n(S')} & F^{n+1}(X') \end{array}$$

SFL II) 当 $S = 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$, 态射 $\delta_F^n(S)$ 对任意整数 n 均为同构。

现在设 $m: F \rightarrow F'$ 为函子 $F, F': \mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$ 的态射, 我们能以显然的方式定义一系列函子的态射 $m^n: F^n \rightarrow F'^n$ 。这一列函子有以下性质:

MSFL) 对任意正合序列 $S = 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 和任意整数 n , 以下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc} F^n(Z) & \xrightarrow{\delta_F^n(S)} & F^{n+1}(X) \\ \downarrow m^n(Z) & & \downarrow m^{n+1}(X) \\ F'^n(Z) & \xrightarrow{\delta_{F'}^n(S)} & F'^{n+1}(X) \end{array}$$

定义 3.3.3. 一系列函子 $F^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ 和对任意正合序列 $S = 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ 的态射 $\delta_F^n(S) : F^n(Z) \rightarrow F^{n+1}(X)$ 具有性质 SFL I) 和 SFL II) 被称作关联的函子列, 设 (F^n, δ_F^n) 和 $(F'^n, \delta_{F'}^n)$ 为两个关联函子列, 一系列函子态射 $m^n : F^n \rightarrow F'^n$ 被称作关联函子列之间的态射, 如果它满足性质 MSFL)。

命题 3.3.4. 设 $\mathcal{H}om(\mathcal{A}^{\text{Ext}}, \mathcal{C})$ 为从范畴 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子范畴, 而 $\mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 为一个范畴, 其对象为关联函子列, 其态射为关联函子列的态射。上面性质定义了一个函子:

$$\Phi : \mathcal{H}om(\mathcal{A}^{\text{Ext}}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

a) 该函子是一个范畴等价。

b) 当范畴 $\mathcal{C}$ 是加性时, 一个从 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子是预加性¹的当且仅当相关联的函子列中的每个都是加性的。

我们限于证明 Φ 是要满的。首先, 通过考虑其等价的范畴, 我们可以设 $\mathcal{A}$ 有唯一的零对象。从而我们立即得到范畴 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 有唯一零对象。再设 (F^n, δ_F^n) 是相关的函子列。注意到, 对任意整数 n , 性质 SFL II) 定义了一个同构 $F^n(0) \rightarrow F^{n+1}(0)$ 。于是, 我们可以将列 (F^n, δ_F^n) 变为同构使得对任意 n 有 $F^n(0) = F^{n+1}(0)$ 且 δ_F^0 为恒同。对 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 中的任意

¹preadditive

非零对象 W ，它唯一地写成形式 $X[n]$ ，这里 X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象。因此对任意 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 中的非零的对象 W ，设 $F(W) = F^n(X)$ 且 $F(0) = F^0(0)$ 。这样我们定义了一个从 $\text{Ob}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ 到 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 的映射。我们将将其扩张到一个函子 $F : \mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得其诱导函子列 (F^n, δ_F^n) 。设 $m : W \rightarrow W'$ 为 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 中的态射，首先验证以下不同情况：

- 1) $W = W' = 0$ ，我们设 $F(m) = \text{id}_{F^0(0)}$
- 2) $W = 0$ 且 $W' = X[p], X \neq 0$ ，我们设 $F(m) = F^p(0 \rightarrow X)$
- 3) $W = Y[p], Y \neq 0$ 且 $W' = 0$ ，我们设 $F(m) = F^p(Y \rightarrow 0)$

现在设 W 和 W' 均为非零的对象，它们有唯一的形式 $W = X[p]$ 和 $W' = X[q]$ ，这里 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 中的对象。整数 $q - p$ 称作 m 的次数。

- 4) m 的次数 < 0 ，我们设 $F(m) = F^q(0 \rightarrow Y)F^p(X \rightarrow 0)$
- 5) m 的次数 $= 0$ ，态射 m 有唯一的形式 $f[p]$ ，这里 f 是 $\mathcal{A}$ 中的态射，我们令 $F(m) = F^p(f)$
- 6) m 的次数 $= 1$ ，则存在 $\mathcal{A}$ 中的正合序列

$$S = 0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$$

使得 $m = \delta^1(S)[p]$ (3.3.1)。我们设 $F(m) = \delta_F^p(S)$, 从 (3.2.2) 和性质 SFL I) 知 $F(m)$ 的定义与正合序列的选取无关。

定义 $\text{Fl}_{\leq n}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ 为使得 w 或 w' 为零对象或者 m 的次数小于或等于 n 的态射 $m: W \rightarrow W'$ 的集合。从函子列 (F^n, δ_F^n) 扩张成函子 $F: \mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$ 有下列引理和命题得到。

引理 3.3.5. 设 $m: W \rightarrow W', m': W' \rightarrow W'', m'' = m'm$ 为 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 的在 $\text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ 中的三个态射。态射 $F(m), F(m'), F(m'')$ 为满足上述情况 1), 2), 3), 4), 5), 6) 的态射, 我们有

$$F(m'') = F(m')F(m) \quad (3.3.5.1)$$

命题 3.3.6 (用生成子和关系定义 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$). 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴, 而

$$\text{Ob}(F): \text{Ob}(\mathcal{A}^{\text{Ext}}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$$

$$\text{Fl}_{\leq 1}(F): \text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{C})$$

为两个与从 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 到 $\mathcal{C}$ 的映射相容的映射, 使得对任意三个态射 $m: W \rightarrow W', m': W' \rightarrow W'', m'' = m'm, m, m', m'' \in \text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$, 我们有

$$\text{Fl}_{\leq 1}(F)(m')\text{Fl}_{\leq 1}(m) = \text{Fl}_{\leq 1}(F)(m'')$$

则存在唯一一个函子 $F: \mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 F 诱导对象集合上的映射 $\text{Ob}(F)$ 并使得对任意 $m \in \text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ 有

$$F(m) = \text{Fl}_{\leq 1}(F)(m)$$

事实上, 我们容易得到与一个函子关联的函子列由 (3.3.5) 和 (3.3.6) 定义正是前面有的列 (F^n, δ_F^n) 。

3.3.7. 引理 (3.3.5) 的证明。 证明由以下几种不同情况得到。首先, 当 w, w', w'' 中至少两个为零的情况。态射 $F(m), F(m'), F(m'')$ 由情形 1), 2), 3) 定义, 式 (3.3.5.1) 的验证是显然的从而留给读者。其次, 要验证当 w, w', w'' 中有一个为零的情况。态射 m, m', m'' 中的两个由情形 1), 2), 3) 定义, 第三个由 4), 5), 6) 定义。其验证仍然是显然的而留给读者。最后只需考虑当 w, w', w'' 均非零的情况。这有八种情况:

$c_1)$ m 和 m' 的次数小于 0;

$c_2)$ m 的次数小于 0, m' 的次数等于 0;

$c_3)$ m 的次数等于 0, m' 的次数小于 0;

$c_4)$ m 和 m' 的次数均为 0;

$c_5)$ m 的次数为 1, m' 的次数小于 0;

$c_6)$ m 的次数小于 0, m' 的次数等于 1;

$c_7)$ m 的次数等于 1, m' 的次数等于 0;

$c_8)$ m 的次数等于 0, m' 的次数等于 1;

我们限制于考虑情形 $c_8)$, 情形 $c_7)$ 是一样的, 而情形 $c_i), 1 \leq i \leq 6$ 是平凡的, 设

$$S = 0 \rightarrow X'' \rightarrow Y \rightarrow X' \rightarrow 0$$

是一个正合序列使得 $\delta^1(S)[p] = m'$, 而 $f : X \rightarrow X'$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射使得 $f[p] = m$ 。我们有 $F(m) = F^p(f), F(m') = \delta_F^p(S)$ 且 $F(m'') = \delta_F^p(S * f)$ (3.2.9)。我们有一个交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc} S * f = 0 & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ S = 0 & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中有交换图表 (SFL I):

$$\begin{array}{ccc} F^p(X) & \xrightarrow{\delta_F^p(S * f)} & F^{p+1}(X'') \\ \downarrow F^p(f) & & \downarrow \text{id} \\ F^p(X') & \xrightarrow{\delta_F^p(S)} & F^{p+1}(X'') \end{array}$$

即

$$F(m') = F(m')F(m)$$

3.3.8. 命题 (3.3.6) 的证明。 设 $m : X[p] \rightarrow Y[p+n]$ 是 $\mathcal{A}^{\text{Ext}}$ 中的态射, X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 中的对象, $n > 0$ 。根据引理 (3.3.1), 存在 $n+1$ 个对象 $X_i[p+i], 0 \leq i \leq n, X_0[p] = X[p], X_n[p+n] = Y[p+n]$ 和 n 个态射:

$$X[p] \xrightarrow{m_1} X_1[p+1] \xrightarrow{m_2} X_2[p+2] \xrightarrow{m_3} \cdots \xrightarrow{m_n} Y[p+n]$$

使得 $m = m_n m_{n-1} \cdots m_2 m_1$ ，这些项立即得到 F 的唯一性。对于存在性，只需注意到由引理 (3.3.1)，当我们有 m 的第二个分解 $m = m'_n m'_{n-1} \cdots m'_1$ ，我们有一个交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X_1[p+1] & \xrightarrow{m_2} & X_2[p+2] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X_{n-1}[p+n-1] \\
 & \nearrow m_1 & \uparrow f_1[p+1] & & \uparrow f_2[p+2] & & f_{n-1}[p+n-1] \uparrow \\
 X[p] & \xrightarrow{m''_1} & X''_1[p+1] & \xrightarrow{m''_2} & X''_2[p+2] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X''_{n-1}[p+n-1] & \xrightarrow{m''_n} & Y[p+n] \\
 & \searrow m'_1 & \downarrow g_1[p+1] & & \downarrow g_2[p+2] & & g_{n-1}[p+n-1] \downarrow & & \nearrow m'_n \\
 & & X'_1[p+1] & \xrightarrow{m'_2} & X'_2[p+2] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X'_{n-1}[p+n-1]
 \end{array}$$

这里 f_i 和 $g_i, 1 \leq i \leq n-1$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射。

4. 通常的谱对象

4.1. 第一个典范谱对象

4.1.1. 回忆 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 为有序集 $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 或者是与该有序集关联的一个范畴 (第二章4.3.1)。设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴而 $Y : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{comp}(\mathcal{A})$ 是一个函子:

$$q \in \tilde{\mathbb{Z}}, q \mapsto Y(p) \quad (4.1.1.1)$$

$$(p, q) \in \text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}}), u(p, q) : Y(p) \rightarrow Y(q)$$

因此, 我们可以通过第一章 (3.3.6), 将函子 Y 关联到一个取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的 ($\tilde{\mathbb{Z}}$ 形式的) 谱对象 (第二章4.1.2和4.1.3)。让我们回忆一下其中的构造。

首先, 对 $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的对象 (p, q) (即, 对任意对 $p, q \in \tilde{\mathbb{Z}}$ 使得 $p \leq q$), $\mathcal{Y}(p, q)$ 为态射 $u(p, q)$ 的锥 (第一章3.1.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(p, q)^i &= Y(q)^i \oplus Y(p)^{i+1} \\ d_{\mathcal{Y}(p, q)}^i &= \begin{pmatrix} d_{Y(q)}^i & u(p, q)^{i+1} \\ 0 & -d_{Y(p)}^{i+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.1.2)$$

接下来, 定义对任意 $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的对 (p, q) 和 (p', q') 使得 $p \leq p'$ 和 $q \leq q'$:

$$\Psi((p, q), (p', q')) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow \mathcal{Y}(p', q') \quad (4.1.1.3)$$

定义为下式：

$$\Psi((p, q), (p', q')) = \begin{pmatrix} u(q, q')^i & 0 \\ 0 & u(p, p')^{i+1} \end{pmatrix} \quad (4.1.1.4)$$

因此我们定义了一个函子 $\mathcal{F}\ell_1(\tilde{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ 。

设 (p, q, r) 为 $\mathrm{Fl}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素，定义

$$\delta(p, q, r) : \mathcal{Y}(q, r) \rightarrow \mathcal{Y}(p, q)[1] \quad (4.1.1.5)$$

为以下复形态射的同伦类：

$$d(p, q, r) : \mathcal{Y}(q, r) \rightarrow \mathcal{Y}(p, q)[1] \quad (4.1.1.6)$$

我们有 (第一章3.3.6) 一个 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的三角形：

$$(\mathcal{Y}(p, q), \mathcal{Y}(p, r), \mathcal{Y}(q, r), \Psi((p, q), (p, r)), \Psi((p, r), (q, r)), \delta(p, q, r))$$

是特异的且对于 (p, q, r) 是函子性的。因此我们得到一个取值在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的谱对象 $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$ 。

设 $Y : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 和 $Y' : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 为两个函子，而 $m : Y \rightarrow Y'$ 为函子态射，则态射 m 诱导相关联的谱对象的态射：

$$\mathcal{M}(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow \mathcal{Y}'(p, q) \quad (4.1.1.7)$$

4.1.2. 设 Y 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象, 设

$$q \in \mathbb{Z}, Y(q) = 0 \rightarrow 0 \rightarrow Y^{-q} \rightarrow Y^{-q+1} \rightarrow Y^{-q+2} \rightarrow \dots \quad (4.1.2.1)$$

该复形的微分由 Y 的微分所诱导。类似定义:

$$Y(-\infty) = 0, Y(+\infty) = Y \quad (4.1.2.2)$$

我们有一些单射:

$$0 = Y(-\infty) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Y(q) \hookrightarrow Y(q+1) \hookrightarrow Y(q+2) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Y(+\infty) = Y$$

使得定义了 Y 的形式为 $\mathbb{Z}$ 的过滤, 称为 Y 的第一个典范过滤, 和一个函子, 仍记作 Y , 从 $\mathbb{Z}$ 到 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 。这样用 (4.1.1) 中的构造, 我们得到一个取值在 $\text{K}(\mathcal{A})$ 中的谱对象 $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$ 。我们将描述一个谱对象, 同构与 $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$ 。首先设 (4.1.2.3)

a) 对于 $-\infty < p < q < +\infty$:

$$Y(p, q) = 0 \rightarrow 0 \rightarrow Y^{-q} \rightarrow Y^{-q+1} \rightarrow \dots \rightarrow Y^{-p-2} \rightarrow Y^{-p-1} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

b) 对于 $-\infty < p < +\infty$:

$$Y(p, +\infty) = \dots \rightarrow Y^i \rightarrow Y^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow Y^{-p-2} \rightarrow Y^{-p-1} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

c) $Y(-\infty, q) = Y(q)$ 对任意 $q \in \mathbb{Z}$, $Y(p, p) = 0$ 对任意 $p \in \mathbb{Z}$, 复形的微分由复形 Y 的微分诱导。

定义

$$\varphi((p, q), (p', q')) : Y(p, q) \rightarrow Y(p', q'), p \leq p', q \leq q' \quad (4.1.2.4)$$

为以下复形态射的同伦类:

$$\psi((p, q), (p', q')) : Y(p, q) \rightarrow Y(p', q') \quad (4.1.2.5)$$

其组成在始和终为非零对象时为恒同态射。我们立即得到一个从 $\mathcal{F}_{\ell_1}(\tilde{\mathbb{Z}})$ 到 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的函子。

设 (p, q, r) 为 $\mathcal{F}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素, 定义

$$\delta(p, q, r) : Y(q, r) \rightarrow Y(p, q)[1] \quad (4.1.2.6)$$

为以下态射的同伦类:

$$d(p, q, r) : Y(q, r) \rightarrow Y(p, q)[1] \quad (4.1.2.7)$$

其组成为

$$d(p, q, r)^i = 0, i \neq -q - 1 \quad (4.1.2.8)$$

$$d(p, q, r)^{-q-1} = -d_Y^{-q-1}$$

最后, 对任意 $\mathcal{F}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素 (p, q) , 定义

$$J(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow Y(p, q) \quad (4.1.2.9)$$

为以下态射所在的同伦类：

$$j(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow Y(p, q) \quad (4.1.2.10)$$

由下式定义：

$$\begin{aligned} j(p, q)^i &= 0, i < -q \text{ 或 } i > -p - 1 \\ j(p, q)^i &= \text{恒同}, -q \leq i \leq -p - 2 \\ j(p, q)^{-p-1} &: Y^{-p-1} \oplus Y^{-p} \rightarrow Y^{-p-1} \\ j(p, q)^{-p-1} &= (\text{id}, 0) \end{aligned} \quad (4.1.2.11)$$

命题 4.1.3. a) 对任意 $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素 (p, q) , $\text{K}(\mathcal{A})$ 中的态射 $J(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow Y(p, q)$ 是一个同构。

b) 对任意 $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的对 $(p, q), (p', q')$ 使得 $p \leq p'$ 和 $q \leq q'$, $\text{K}(\mathcal{A})$ 中的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(p, q) & \xrightarrow{\Phi((p, q), (p', q'))} & \mathcal{Y}(p', q') \\ J(p, q) \downarrow & & \downarrow J(p', q') \\ Y(p, q) & \xrightarrow{\varphi((p, q), (p', q'))} & Y(p', q') \end{array}$$

是交换的。

c) 对任意 $\text{Fl}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的对象 (p, q, r) , $\text{K}(\mathcal{A})$ 中的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(q, r) & \xrightarrow{\delta(p, q, r)} & \mathcal{Y}(p, q)[1] \\ J(q, r) \downarrow & & \downarrow J(p, q)[1] \\ Y(q, r) & \xrightarrow{\delta(p, q, r)} & Y(p, q)[1] \end{array}$$

是交换的。

其验证留给读者。

4.1.4. 从 (4.1.3) 知对任意 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象 Y ,

$$\text{Spec}_1(Y) = (Y(p, q), \delta(p, q, r))$$

由 (4.1.2.3), (4.1.2.4) 和 (4.1.2.6) 定义, 是一个取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的谱对象。谱对象 $\text{Spec}_1(Y)$ 对于 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的复形 Y 有函子性。这样我们定义了一个函子

$$Y \mapsto \text{Spec}_1(Y)$$

从 $\mathcal{A}$ 中的复形范畴到取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的谱对象。该函子被称作取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的第一个典范谱对象。对任意 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象 Y , 谱对象称作与复形 Y 相关的取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的第一个典范谱对象。注意到当 Y 是 $\text{comp}^*(\mathcal{A})$ ($*$ = +, -, b 或空) 中的对象时, 与复形 Y 相关的取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的第一个典范谱对象事实上取值在 $\kappa^*(\mathcal{A})$ 中。

4.1.5. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴。典范函子 $\kappa(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 在与复形 Y 相关的取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的第一个典范谱对象上的像是一个与复形 Y 相关的取值在 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 中的第一个典范谱对象。此后, 我们用与复形 Y 关联的第一个谱对象, 记为

$$\text{Spec}_1(Y) = (Y(p, q), \delta(p, q, r))$$

为与复形 Y 相关的取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的第一个典范谱对象。第一个典范谱对象函子与典范函子 $K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 的复合称作取值在 $D(\mathcal{A})$ 的第一个典范谱对象函子。注意该函子是从 $\mathcal{A}$ 中的复形范畴到取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的谱对象的范畴，且一般情况下，该函子不经过复形的同伦范畴。

4.1.6. $\mathcal{A}$ 中的 n -维复形可以构造其单复形过滤的结构，从而得到一个取值在 $K(\mathcal{A})$ 中的谱对象。设 X 是一个 n -维复形 (第一章2.1.2)，而 m 是一个整数， $1 \leq m \leq n$ 。对任意 $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ (记号为 (第一章2.1.1))，定义 σ_m 为第 m 个分量。

首先，我们将定义一族复形和复形的态射。对任意对 $(p, q) \in \text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ ，设 ${}^m X(p, q)$ 为一个 n -维复形，定义为

$$\left\{ \begin{array}{l} ({}^m X(p, q))^{\sigma} = \begin{cases} X^{\sigma}, & -q \leq \sigma_m < -p \\ 0, & \sigma < -q \text{ 或 } -p \leq \sigma_m \end{cases} \\ {}^m X(p, q) \text{ 的微分是 } X \text{ 中的微分，如果其} \\ \text{始和终非零，否则为零} \end{array} \right. \quad (4.1.6.1)$$

对任意 $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的对 (p, q) 和 (p', q') 使得 $p \leq p'$ 和 $q \leq q'$ ，定义

$$f((p, q), (p', q')) : {}^m X(p, q) \rightarrow {}^m X(p', q') \quad (4.1.6.2)$$

该 n -维复形的态射，其组成在始和终均非零时为恒同态射，否则为零。最后，对任意 $\text{Fl}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素 (p, q, r) ，定义

$$g(p, q, r) : {}^m X(q, r) \rightarrow T_m({}^m X(p, q)) \quad (4.1.6.3)$$

(T_m 为 m 方向上的平移 (第一章2.3.1)), 其组成为:

$$\begin{cases} g(p, q, r)^\sigma = 0, \sigma_m \neq -q - 1 \\ g(p, q, r)^\sigma = -d_X^{\sigma, m}, \sigma_m = -q - 1 \end{cases} \quad (4.1.6.4)$$

现在引进新的记号。首先, 定义 $\int_n : \text{comp}^n(\mathcal{A}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{A})$ 为关联单复形函子的 Π -扩张或 Σ -扩张 (假设 $\mathcal{A}$ 中的可数直积或直和存在 (第一章2.2.3)), 设

$$\begin{cases} \int_n {}^m X(p, q) = {}^m Y(p, q) \\ \int_n {}^m X(-\infty, q) = {}^m Y(-\infty, q) = {}^m Y(q) \\ \int_n {}^m X(\infty, +\infty) = \int_n X = {}^m Y(-\infty, +\infty) = {}^m Y(+\infty) = Y \end{cases} \quad (4.1.6.5)$$

和

$$\int_n f((p, q), (p', q')) = h((p, q), (p', q')) \quad (4.1.6.6)$$

并设

$${}^m d(p, q, r) : {}^m Y(q, r) \rightarrow {}^m Y(p, q)[1] \quad (4.1.6.7)$$

为态射的复合:

$$\begin{array}{ccc} {}^m Y(q, r) & \xrightarrow{\int_n g(p, q, r)} & \int_n T_m {}^m X(p, q) \xrightarrow{(*)} \left(\int_n {}^m X(p, q) \right) [1] \\ & & \parallel \\ & & Y(p, q)[1] \end{array} \quad (4.1.6.8)$$

这里态射 $(*)$ 是与平移交换的关联单复形函子的同构 (第一章2.3.2.1)。

我们有单复形 $Y = {}^m X$ 的过滤:

$$0 = {}^m Y(-\infty) \subset \cdots \subset {}^m Y(q) \subset \cdots \subset {}^m Y(+\infty) = Y \quad (4.1.6.9)$$

称作由 X 的第 m 次定义的过滤。

通过与 (4.1.1) 一样的过程, 我们可以将过滤 (4.1.6.9) 关联到一个取值在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的谱序列

$$(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r)) \quad (4.1.6.10)$$

最后, 在下面的命题中, 我们定义类似的记号, 一个从 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 到 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的态射。

命题 4.1.7. a) 对象 ${}^m Y(p, q)$ (4.1.6.5), 态射 $h((p, q), (p', q'))$ (4.1.6.6) 和态射 ${}^m d(p, q, r)$ (4.1.6.7) 定义了一个取值在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的谱序列, 对 n -维复形 X 有函子性。

该谱对象称作定义在复形 X 的第 m 次过滤上的取值在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的谱对象。

b) 存在一个典范同构 (即关于 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 的对象 X 有函子性), 从谱对象 $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$ 到 $({}^m Y(p, q), {}^m d(p, q, r))$ 。

首先, 假设当 X 是一个双复形而 $m = 1$ 时该命题成立, 而考虑其他情况。设 $\varphi: [n] \rightarrow [2]$ 为映射:

$$\begin{cases} \varphi(m) = 1 \\ \varphi(i) = 2, i \in [n], i \neq m \end{cases} \quad (4.1.7.1)$$

设 $\int_{\varphi} X = Z$ (第一章2.2.2), 我们可以给双复形 Z 以 $(4.1.6.i), 1 \leq i \leq 4$ 中的构造, 我们得到双复形:

$${}^1Z(p, q), (p, q) \in \text{Fl}_1(\tilde{Z}) \quad (4.1.7.2)$$

和双复形的态射

$$\begin{aligned} f_Z((p, q), (p', q')) &: {}^1Z(p, q) \rightarrow {}^1Z(p', q') \\ g_Z(p, q, r) &: {}^1(q, r) \rightarrow T_1({}^1Z(p, q)) \end{aligned} \quad (4.1.7.3)$$

我们断言有

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} {}^mX(p, q) &= {}^1Z(p, q), (p, q) \in \text{Fl}_1(\tilde{Z}) \\ \int_{\varphi} f((p, q), (p', q')) &= f_Z((p, q), (p', q')) \end{aligned} \quad (4.1.7.4)$$

(直接验证) 并且有态射 $g_Z(p, q, r)$ 是以下态射的复合:

$$\int_{\varphi} {}^mX(q, r) \xrightarrow{\int_{\varphi} g(p, q, r)} \int_{\varphi} T_m({}^mX(p, q)) \xrightarrow{(**)} T_1 \left(\int_{\varphi} {}^mX(p, q) \right) \quad (4.1.7.5)$$

这里 $(**)$ 是与函子 $\int_{\varphi}$ 与平移交换的同构 (第一章2.3.2.1) (为了验证这一点, 我们用 Z 的微分的明显的性质 (第一章2.2.2.5)) 且该同构交换 (第一章2.3.2.1)。然后构造 Z 的第一次的过滤的谱对象。由于 $\int_2 \int_{\varphi} = \int_n$, (4.1.7.4), (4.1.7.5) 和 (第一章2.3.3) 知 $({}^mY(p, q), {}^md(p, q, r))$ 与所要求的谱对象相等。

接下来假设 X 是一个双复形, 而 $m = 1$ 。为了证明 $a)$, 只需验证对任意 $(p, q, r) \in \text{Fl}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$, $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的图表

$$\int_1 {}^1X(p, q) \rightarrow \int_2 {}^1X(p, r) \rightarrow \int_2 {}^1X(q, r) \xrightarrow{{}^1d(p, q, r)} \int_2 T_1({}^1X(p, q)) = \left(\int_2 {}^1X(p, q) \right) [1] \quad (4.1.7.6)$$

定义了 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的一个特异三角形 (注意与平移交换的同构 $\int_2 T_1({}^1X(p, q)) \xrightarrow{\sim} (\int_2 {}^1X(p, q)) [1]$ 是恒同)。 $a)$ 中的另一个论断是显然的。为了证明 (4.1.7.6) 定义恶劣 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的特异三角形, 只需根据性质 TRII(第二章1.1.1), 证明一下图表

$$\left(\int_2 {}^1X(q, r) \right) [-1] \xrightarrow{{}^{-1}d(p, q, r)[-1]} \int_1 {}^1X(p, q) \rightarrow \int_2 {}^1X(p, r) \rightarrow \int_2 {}^1X(q, r) \quad (4.1.7.7)$$

定义了 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的特异三角形。然后我们立即断言单复形 $\int_2 {}^1X(p, r)$ 就是态射 ${}^{-1}d(p, q, r)[-1]$ 的锥 (第一章3.1.2) 且态射 $\int_1 {}^1X(p, q) \rightarrow \int_2 {}^1X(p, r)$ 和 $\int_2 {}^1X(p, r) \rightarrow \int_2 {}^1X(q, r)$ 正是由锥函子诱导的态射 (第一章3.2.2.2和3.2.2.4)。因此, 由图表 (4.1.7.7) 定义的 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的三角形由定义 (第一章3.3.1) 是特异三角形。现在证明 $b)$ 。用 (4.1.6.5) 中引入的记号, 我们只需证明图表

$${}^1Y(q, r)[-1] \xrightarrow{{}^{-1}d(-\infty, q, r)} {}^1Y(q) \rightarrow {}^1Y(r) \rightarrow {}^1Y(q, r) \quad (4.1.7.8)$$

中复形 ${}^1Y(r)$ 是态射 ${}^{-1}d(-\infty, q, r)$ 的锥 (在 (4.1.7.7) 中令 $p =$

$-\infty$)。此外, 由 (4.1.1), 对象 $\mathcal{Y}(q, r)$ 定义为态射

$${}^1Y(q) \rightarrow {}^1Y(r) \quad (4.1.7.9)$$

的锥。因此由定义, 在 (第一章3.2.5.2), 我们有一个同伦 (在 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 中为同构):

$$J(q, r) : \mathcal{Y} \rightarrow {}^1Y(q, r) \quad (4.1.7.10)$$

我们留给读者验证该同伦对于 $(q, r) \in \mathrm{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 和双复形 X 是由函子性的, 且它定义了谱对象 $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$ 到 $({}^1Y(p, q), {}^1d(p, q, r))$ 的典范同构。

4.1.8. 当 X 是一个单复形, 由定义在 X 的第一次的过滤的取值在 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 的谱对象 (4.1.7) 就是与复形 X 关联的取值在 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 的第一个谱对象。类似地, 设 X 是一个 n 维复形而 m 是一个整数 $1 \leq m \leq n$, 设 X 的组成 X^σ 是 0 如果 $\sigma - \sigma_m e_m \neq 0$ (σ_m 是第 m 个分量), 我们说由 X 在第 m 次的过滤定义的谱对象等于单复形 $\int_m X$ 的第一个典范谱序列。

最后, 当 $\mathcal{A}$ 是 Abel 的, 典范函子 $\mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ 将取值在 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 的 n -维复形在第 m 次的过滤的谱对象变为一个取值在 $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ 上的谱对象。该谱对象称作定义在复形 X 的第 m 次过滤上的取值在 $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ 中的谱对象。在不引起混淆时, 我们省略“取值在 $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ 中”。

4.1.9. 设 $X^{\bullet\bullet}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的双复形, 对任意整数 q , 定义 $X^{q,\bullet}$ (对应地, $X^{\bullet,q}$) 为单复形:

$$X^{q,\bullet} = \dots \xrightarrow{d_2^{q,i-1}} X^{q,i} \xrightarrow{d_2^{q,i}} X^{q,i+1} \xrightarrow{d_2^{q,i+1}} \dots$$

$$(\text{对应地, } X^{\bullet,q} = \dots \rightarrow X^{i,q} \xrightarrow{(-1)^q d_1^{i,q}} X^{i+1,q} \xrightarrow{(-1)^q d_1^{i+1,q}} X^{i+1,q} \rightarrow \dots)$$

其次数为 i 的组成为 $X^{q,i}$ (对应地, $X^{i,q}$)。

$X^{\bullet\bullet}$ 的第一个 (对应地, 第二个) 方向的微分导出一个态射 (在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中):

$$d_1^{q,\bullet} : X^{q,\bullet} \rightarrow X^{q+1,\bullet}$$

$$(\text{对应地, } d_2^{\bullet,q} : X^{\bullet,q} \rightarrow X^{\bullet,q+1})$$

其组成为:

$$(d_1^{q,\bullet})^i = d_1^{q,i}$$

$$(\text{对应地, } (d_2^{\bullet,q})^i = (-1)^i d_2^{i,q})$$

定义 $({}^1Y(p, q), {}^1\delta(p, q, r))$ (对应地, $({}^2Y(p, q), {}^2\delta(p, q, r))$) 为取值在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中, 由 X 定义, 关于第一次 (对应地, 第二次) 过滤的谱序列 (4.1.7)。立即由定义得到以下关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1Y(q-1, q) = X^{-q,\bullet}[q] \\ {}^2Y(q-1, q) = X^{\bullet,-q}[q] \\ {}^1\delta(q-1, q, q+1) = -(d_1^{-q-1,\bullet})[q+1] \\ {}^2\delta(q-1, q, q+1) = -(d_2^{\bullet,-q-1})[q+1] \end{array} \right. \quad (4.1.9.1)$$

该公式在 (4.6) 中会用到。

4.2. 与 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中过滤对象关联的取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的谱对象

在本节和以下几小节中， $\mathcal{A}$ 为一个 Abel 范畴。

4.2.1. 设 X 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象而 $X(q), q \in \mathbb{Z}$ 是一个形式为 $\tilde{Z}$ 的过滤：

$$0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset X(q+1) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X \quad (4.2.1.1)$$

由 (4.1.1) 中的构造，我们得到一个取值在 $\kappa(\mathcal{A})$ 中的谱对象 $(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$ ，再作用典范函子 $\kappa(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ ，得到一个取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的谱对象，仍然记作 $(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$ 。我们想描述一个取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的谱对象，它同构与最后一个谱序列。

4.2.2. 设 $0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset X(q+1) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X$ 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的过滤，设

$$X(p, q) = X(q)/X(p) \quad (4.2.2.1)$$

对任意 $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素 (p, q) 。(这里可以作商是因为范畴 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 是 Abel 的)。定义

$$\varphi((p, q), (p', q')) : X(p, q) \rightarrow X(p', q') \quad (4.2.2.2)$$

这里 (p, q) 和 (p', q') 是 $\mathrm{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的两个元素使得 $p \leq p'$ 且 $q \leq q'$ 。在 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中的典范态射在 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的像为:

$$\psi((p, q), (p', q')) : X(p, q) \rightarrow X(p', q') \quad (4.2.2.3)$$

这样我们定义了一个从 $\mathcal{F}\ell_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 到 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的函子。对任意 $\mathrm{Fl}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素 (p, q, r) , 设

$$S(p, q, r) : 0 \rightarrow X(p, q) \rightarrow X(p, r) \rightarrow X(q, r) \rightarrow 0 \quad (4.2.2.4)$$

为 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中的正合序列其态射为 X 中过滤定义的典范态射。最后, 对任意 $\mathrm{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素 (p, q) , 设

$$J(p, q) : \mathcal{X}(p, q) \rightarrow X(p, q) \quad (4.2.2.5)$$

为 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中的态射

$$j(p, q) : \mathcal{X}(p, q) \rightarrow X(p, q) \quad (4.2.2.6)$$

在 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 下的像, 其组成为

$$\begin{aligned} j(p, q)^i : \mathcal{X}(p, q)^i &= X(q)^i \oplus X(p)^{i+1} \rightarrow X(q)^i / X(p)^i = X(p, q)^i \\ j(p, q)^i &= (\pi^i, 0) \end{aligned} \quad (4.2.2.7)$$

这里 π^i 为典范满射:

$$\pi^i : X(q)^i \rightarrow X(q)^i / X(p)^i$$

命题 4.2.3. 对任意 $\mathrm{Fl}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元素 (p, q, r) , 定义

$$\delta(p, q, r) : X(q, r) \rightarrow X(p, q)[1]$$

为 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的态射

$$\delta(p, q, r) = \delta(S(p, q, r)) \quad (4.2.3.1)$$

这里 $\delta(p, q, r)$ 为典范 δ -函子 $\mathrm{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A})$ (1.3.2) 作用在正合序列 $S(p, q, r)$ (4.2.2.4) 上的 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的态射。

a) 对象 $X(p, q)$ (4.2.2.1), 态射 $\varphi((p, q), (p', q'))$ (4.2.2.2) 和态射 $\delta(p, q, r)$ (4.2.3.1) 定义了一个取值在 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的谱序列。

b) 态射 $J(p, q)$ (4.2.2.5) 定义了谱对象 $(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$ 到 $(X(p, q), \delta)$ 的同构。

断言 a) 由典范 δ -函子 $\mathrm{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A})$ (1.3.1) 的性质立即得到。为了证明 b), 读者可以参阅 (1.3.2)。

4.2.4. 一个 $\tilde{\mathbb{Z}}$ 形式的 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中的过滤对象的态射以显然的方式诱导一个由 (4.2.3), b) 定义的谱对象的态射。因此命题 (4.2.3) 定义了一个从 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中过滤对象到取值在 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的谱对象的一个函子。

设 X 是 $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象, 而 $X(q) \subset X, q \in \tilde{\mathbb{Z}}$ 是第一个典范的过滤。由命题 (4.2.3) 将过滤对象 $(X, X(q), q \in \tilde{\mathbb{Z}})$ 关联到的谱

对象, 在这种情况下, 就是与 X 关联的取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的第一个谱对象 (4.1.5)。

类似地, 设 X 是一个 $\mathcal{A}$ 中的 n -维复形, $\int_n X = Y$ 为关联的单复形, m 为一个整数, $1 \leq m \leq n$, 而

$$0 = {}^m Y(-\infty) \subset \cdots \subset {}^m Y(q) \subset \cdots \subset {}^m Y(+\infty) = Y$$

是 X 的第 m 次定义的过滤 (4.2.3)。由命题 (4.2.3) 与过滤 $(Y, {}^m Y(q), q \in \mathbb{Z})$ 关联的谱对象, 在这情况下, 正是由 X 定义的第 m 次山的取值在 $D(\mathcal{A})$ 的谱对象 (4.1.8)。

4.3. 第二个典范谱对象

4.3.1. 设 X 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象, 设

$$X(-\infty) = 0, X(+\infty) = X \quad (4.3.1.1)$$

$$X(q) = \cdots X^{q-3} \rightarrow X^{q-2} \rightarrow \text{Ker}(d_X^{q-1}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots, q \in \mathbb{Z}$$

上述复形的最后一个微分由 X 中的微分诱导。我们有典范的单射:

$$0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset X(q+1) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X \quad (4.3.1.2)$$

它定义了 X 上的 $\mathbb{Z}$ 形式的过滤, 称作第二个典范过滤。根据命题 (4.2.3), 我们定义了一个谱对象 $(X(p, q), \delta(p, q, r))$, 称作

与 X 相关的取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的第二个谱对象。一个 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的态射 $X \rightarrow Y$ 诱导第二个典范过滤的态射，从而函子

$$X \mapsto (X(p, q), \delta(p, q, r))$$

是从 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 到取值在 $D(\mathcal{A})$ 的谱对象的范畴的函子。该函子称作第二个典范谱对象函子。

命题 4.3.2. 设 X 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象， $(X(p, q), \delta(p, q, r))$ 为与 X 关联的第二个典范谱对象，而 $H : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ 为典范上同调函子。

a) $H^r(X(p, q)) = 0$ 对任意整数 $r < p$ 或 $r \geq q$ 。

b) 设 r 是一个整数，对任意元素 $(p, q) \in \text{Fl}_1 \tilde{\mathbb{Z}}$ 使得 $p \leq r < q$ ，有且仅有一个同构：

$$i_{p,q}^r(X) : H^r(X) \rightarrow H^r(X(p, q))$$

使得 $i_{-\infty, +\infty}^r(X)$ 是恒同且使得对任意对 (p, q) 和 $(p', q'), p \leq p', q \leq q', p \leq r < q, p' \leq r < q'$ ，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccc} i_{p,q}^r(X) & & H^r(X) & & i_{p',q'}^r(X) \\ & \nwarrow & \searrow & \nearrow & \nwarrow \\ H^r(X(p, q)) & \xrightarrow{H^r(\varphi((p, q), (p', q')))} & & \xrightarrow{\quad} & H^r(X(p', q')) \end{array}$$

c) 设 $m : X \rightarrow Y$ 为 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的态射，而

$$m(p, q) : X(p, q) \rightarrow Y(p, q)$$

为对应的第二个谱对象的态射，对任意 $\mathrm{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ 中的元 (p, q) 和整数 r 使得 $p \leq r < q$ ，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^r(X) & \xrightarrow{\mathrm{H}^r(m)} & \mathrm{H}^r(Y) \\ i_{p,q}^r(X) \downarrow \sim & & \sim \downarrow i_{p,q}^r(Y) \\ \mathrm{H}^r(X(p, q)) & \xrightarrow{\mathrm{H}^r(m(p, q))} & \mathrm{H}^r(Y(p, q)) \end{array}$$

该命题由定义立即得到。

推论 4.3.3. 第二个典范谱对象函子 (4.3.1) 以唯一的方式经过典范函子

$$\mathrm{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A})$$

事实上，根据 (4.3.2)，一个拟同构 $m : X \rightarrow Y$ 被该函子作用后得到一个谱对象的同构。该引理由 (1.3.5) 得到。

4.3.4. 从 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 到 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 上的谱对象组成的范畴，此后被称作第二个典范谱对象。设 X 是 $\mathcal{A}$ 的一个复形， $(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$ 为与 X 关联的第二个谱对象，由 (4.3.2) 和 (1.2.10) 知我们有 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 中的典范同构：

$$X(p, p+1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X)[-p] \quad (4.3.4.1)$$

当 X 是 $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$ ($*$ = $-$, $+$, b 或空) 中的对象时，同样也记与 X 关联的第二个谱对象为取值在 $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$ 中的。

4.4. 常用谱序列

4.4.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴, 不一定是 Abel 的, $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 为一个取值在 Abel 范畴 $\mathcal{B}$ 中的上同调函子, $F^p: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 为 F 与 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的平移函子的复合 ($F^p(X) = F(X[p])$)。再设 Y 是 $\mathcal{A}$ 中的复形, 函子 F 将取值在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的与 Y 关联的第一个谱对象 (4.1.4) 变成一个取值在 $\mathcal{B}$ 中的谱对象, 关于 F 和 Y (当它在 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中取值) 有函子性, 称作与 Y 关联的函子 F 的第一个谱序列。对于此谱序列, 我们总是用在 (第二章 4.3.3.1) 中引入的指标。

命题 4.4.2. $a)$ 与 Y 关联的函子 F 的第一个谱序列中的项 $I_1^{p,q}$ 是:

$$I_1^{p,q} = F^q(Y^p)$$

(Y^p 为复形, 其唯一非零的组成是 0 次上, 为 Y 的第 p 个组成)。对应的微分为:

$$d_1: I_1^{p,q} \rightarrow I_1^{p+1,q}$$

$$d_1 = F^q(-d_Y^p): F^q(Y^p) \rightarrow F^q(Y^{p+1})$$

$b)$ 该谱序列的项 $I_2^{p,q}$ 由以下方式描述: 定义 $F^{q,\bullet}: \text{comp}(\mathcal{K}(\mathcal{A})) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{B})$ 为 F^q 到复形上的扩张, $H_B^p: \text{comp}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ 为第 p 个上同调函子, 而 $Y^\bullet$ 为 $\text{comp}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ 中的对象:

$$Y^\bullet = \cdots \rightarrow Y^{p-1} \xrightarrow{d_Y^{p-1}} Y^p \xrightarrow{d_Y^p} Y^{p+1} \rightarrow \cdots$$

我们有

$$I_2^{p,q} = H_B^p F^{q,\bullet}(Y^\bullet)$$

c) 项 $I_\infty^{p,q}$ 为对象 $F^{p+q}(Y)$ 以一种合适的方式分级。

先证明 a), 设 $(Y(p, q), \delta(p, q, r))$ 为与 Y 关联的取值在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的第一个谱对象。由定义立即得到我们有 (4.1.2.3):

$$Y(-p-1, -p) = Y^p[-p]$$

因此 (第二章4.3.3.1):

$$I_1^{p,q} = F^{p+q}(Y^p[-p]) = F^q(Y^p)$$

微分 $d_1 : I_1^{p,q} \rightarrow I_1^{p+1,q}$ 的描述立即由 (4.1.2.6) 得到。断言 b) 立即由 a) 得到。第二个断言由 (第二章4.3.2) 得到。

注 4.4.3. 定义 $(I_r^{p,q}, d_r, r \geq 1)$ 为与复形 Y 关联的函子 F 的谱序列, 函子

$$Y \mapsto (I_r^{p,q}, d_r, r \geq 1)$$

是从范畴 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 到取值在 $\mathcal{B}$ 中的谱序列范畴的函子。一般地, 该函子经过范畴 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, 也就是说, 函子

$$Y \mapsto (I_r^{p,q}, d_r, r \geq 2)$$

根据命题 (4.4.2), b), 经过同伦范畴。

4.4.4. 现在设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, $F : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个取值在 Abel 范畴的上同调函子, $F^p, p \in \mathbb{Z}$ 为 F 与 $D(\mathcal{A})$ 中的平移的复合 ($F^p(X) = F(X[p])$), 再设 Y 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象, 而 $(Y(p, q), \delta(p, q, r))$ 为取值在 $D(\mathcal{A})$ 的与 Y 关联的第一个谱对象, 函子 F 将该谱对象广值为取值在 $\mathcal{B}$ 中的谱对象, 从而得到一个取值在 $\mathcal{B}$ 中的谱序列, 称为与复形 Y 关联的函子 F 的第一个谱序列。该谱序列正是由命题 (4.4.2) 所描述 (只需将命题 (4.4.2) 中的范畴 $K(\mathcal{A})$ 换成 $D(\mathcal{A})$ 即可)。与复形 Y 关联的函子 F 的第一个谱序列关于 F 和 Y 在 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中取值是有函子性的。对于此谱序列, 我们总是用在 (第二章4.3.3.1) 中引入的指标。

4.4.5. 数据与 (4.4.4) 类似, 但我们设 X 是 $D(\mathcal{A})$ 中的对象, 设 $(X(p, q), \delta(p, q, r))$ 为与 X 关联的取值在 $D(\mathcal{A})$ 中的第二个谱对象 (4.3.1), 函子 F 将该谱对象变成一个取值在 $\mathcal{B}$ 中的谱对象, 从而我们得到一个谱对象, 关于 F 和 X 在 $D(\mathcal{A})$ 中取值有函子性 (4.3.3)。这个谱序列称作与 X 关联的 F 的第二个谱序列。对于此谱序列, 我们总是用在 (第二章4.3.3.2) 中的指标。

命题 4.4.6. 与 X 关联的 F 的第二个谱序列的项 $\Pi_2^{p,q}$ 为:

$$\Pi_2^{p,q} = F^p(H^q(X))$$

项 $\Pi_{\infty}^{p,q}$ 为对象 $F^{p+q}(X)$ 以合适的方式过滤。

事实上 (4.3.4.1), 我们有典范同构:

$$X(p, p+1) \xrightarrow{\sim} H^p(X)[-p]$$

于是由 (第二章4.3.3.2):

$$\Pi_2^{p,q} = F^{p+q}(H^q(X)[-q]) = F^p(H^q(X))$$

这就是 a), 断言 b) 由 (第二章4.3.2) 得到。

4.5. 收敛的问题

定义 4.5.1. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为两个 Abel 范畴, 一个上同调函子 $F: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B} (* = +, -, b \text{ 或空})$ 被称作在右边 (对应地, 在左边) 稳定的, 如果存在一个整数 n_0 使得对任意 $D^*(\mathcal{A})$ 中的对象 X 使得 $H^i(X) = 0$ 对于 $i < 0$ (对应地, $i > 0$), 有 $F^n(X) = 0$ 对任意 $n < n_0$ (对应地, $n > n_0$)。函子 F 被称作稳定的如果它在左边和右边都是稳定的。一个正合函子 $G: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^{*'}(\mathcal{B})$ 被称作在右边稳定的 (对应地, 在左边稳定, 稳定) 如果由函子 G 和典范上同调函子 $D^{*'}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ 复合后的上同调函子是在右边稳定的 (对应地, 在左边稳定, 稳定)。

4.5.2. 设 $F: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个在右边稳定的上同调函子, p 为一个整数。 X 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象且

$$0 = X(-\infty) \rightarrow \cdots \rightarrow X(q) \rightarrow X(q+1) \rightarrow \cdots \rightarrow X(+\infty) = X$$

为 X 的第二个典范过滤 (4.3.1)。则导出系 $F^p(X(q))$ 是稳定的, 即存在一个整数 q_0 使得对任意 $q, q_0 \leq q \leq +\infty$, 态射

$$F^p(X(q)) \rightarrow F^p(X)$$

是同构。事实上, 用 (4.2.3) 的记号, 我们有一个正合序列:

$$F^{p-1}(X(q, +\infty)) \rightarrow F^p(X(q)) \rightarrow F^p(X) \rightarrow F^p(X(q, +\infty))$$

而函子 F 在右边稳定, 存在一个整数 q_0 使得对任意 $q > q_0$ 对象 $F^p(X(q, +\infty))$ 和 $F^{p-1}(X(q, +\infty))$ 都是零。

类似地, 设 F 是一个在右边稳定的上同调函子, p 是一个整数, Y 是一个 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象, 而

$$0 = Y(-\infty) \rightarrow \cdots \rightarrow Y(q) \rightarrow Y(q+1) \rightarrow \cdots Y(+\infty) = Y$$

为 Y 的第一个过滤 (4.1.2)。则存在一个整数 q_0 使得对任意 $q < q_0$, 对象 $F^p(Y(q))$ 为零, 与上面类似的验证留给读者。读者也可以通过转到反范畴中去研究在左边稳定的函子的类似性质。

命题 4.5.3. a) 设 Y 是 $\text{comp}^*(\mathcal{A})$ (1.1.1) ($*$ = +, -, b 或空) 中的对象, 设 $F: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个上同调函子, 与 Y 关联的 F 的第一个谱对象 (4.4.1) 的始对象为 (4.4.2):

$$I_1^{p,q} = F^q(Y^p)$$

在以下情况下是稳定的 (第二章4.4.2):

- 1) Y 是一个 $\text{comp}^b(\mathcal{A})$ 中的对象。
- 2) Y 是 $\text{comp}^+(\mathcal{A})$ 中的对象, 而 F 是在右边稳定的。
- 3) Y 是 $\text{comp}^-(\mathcal{A})$ 中的对象, 而 F 是在左边稳定的。
- 4) F 是稳定的。

b) 设 X 是一个 $D^*(\mathcal{A})$ (1.2.4) 中的对象, 而 $F: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个上同调函子, 与复形 X 关联的 F 的第二个谱序列 (4.4.5) 在以下情况下是稳定的:

- 1) X 是一个 $\text{comp}^b(\mathcal{A})$ 中的对象。
- 2) X 是 $\text{comp}^+(\mathcal{A})$ 中的对象, 而 F 是在右边稳定的。
- 3) X 是 $\text{comp}^-(\mathcal{A})$ 中的对象, 而 F 是在左边稳定的。
- 4) F 是稳定的。

该命题由 (4.5.2) 和定义 (第二章4.4.2) 立即得到。

定理 4.5.4. 设 $F_1, F_2 : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B} (* = +, -, b \text{ 或空})$ 为两个上同调函子 (对应地, $G_1, G_2 : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^{*'}(\mathcal{B})$ 为两个正合函子) 而 $m : F_1 \rightarrow F_2$ (对应地, $m : G_1 \rightarrow G_2$) 为两个函子的态射 (对应地, 正合函子的态射 (第一章??))。由 $D^*(\mathcal{A})$ 中使得 $m(X[p])$ 对任意整数 p 是同构的复形 X 定义的 $D^*(\mathcal{A})$ 的全子范畴是一个严格满的饱和的全子剖分范畴 (第二章 2.1.6), 记作 $\text{Is}(m)$ 。

a) 如果任意 $\mathcal{A}$ 中的对象都是 $\text{Is}(m)$ 中的对象, 则 $D^b(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(m)$ 。

b) 如果任意 $\mathcal{A}$ 中的对象都是 $\text{Is}(m)$ 中的对象, 且函子 F_1 和 F_2 (对应地, G_1 和 G_2) 是在右边稳定的, 则 $D^+ \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(m)$ 。

c) 如果任意 $\mathcal{A}$ 中的对象都是 $\text{Is}(m)$ 中的对象, 且函子 F_1 和 F_2 (对应地, G_1 和 G_2) 是在左边稳定的, 则 $D^- \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(m)$ 。

d) 如果任意 $\mathcal{A}$ 中的对象都是 $\text{Is}(m)$ 中的对象, 且函子 F_1 和 F_2 (对应地, G_1 和 G_2) 是稳定的, 则 $D^*(\mathcal{A}) = \text{Is}(m)$ 。

e) 如果存在 $\text{Ob}(\mathcal{A})$ 的一部分 M 使得

α) 任意 $\mathcal{A}$ 中的对象同构与 M 中某个对象的商对象;

β) 任意 M 中的对象是 $\text{Is}(m)$ 中的对象。

如果函子 F_1 和 F_2 (对应地, G_1 和 G_2) 是在左边稳定的, 则

$$D^-(\mathcal{A}) \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(m)。$$

f) 如果存在 $\text{Ob}(\mathcal{A})$ 的一部分 M 使得

α) 任意 $\mathcal{A}$ 中的对象同构与 M 中某个对象的子对象;

β) 任意 M 中的对象是 $\text{Is}(m)$ 中的对象。

如果函子 F_1 和 F_2 (对应地, G_1 和 G_2) 是在右边稳定的, 则

$$D^+(\mathcal{A}) \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(m) \circ$$

首先, 注意到定理 (4.5.4) 中对应的那些部分由非对应的那些部分通过将函子 G_1, G_2 复合典范函子 $D'^*(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ 得到。先证明 a)。设 X 是 $D^b(\mathcal{A})$ 中的对象, 态射 m 诱导关联 X 的 F_1 和 F_2 的第二个典范谱序列的态射, 该态射诱导他们的始对象的态射:

$$m_2^{p,q} : F_1^p(H^q(X)) \rightarrow F_2^p(H^q(X))$$

由假设是同构。另外, 这两个谱序列是稳定的 (4.5.3)。从 (第二章4.4.5) 得到态射 m 诱导这两个谱序列的结果的同构, 从而 $m(X)$ 是一个同构。断言 $b), c), d)$ 由类似的方式得到: 只需注意根据假设, 这两个典范谱序列是稳定的 (4.5.3)。再证明 e)。根据 $c)$, 只需证明任意 $\mathcal{A}$ 中的对象是 $\text{Is}(m)$ 中的对象。设 X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, p 是一个整数, 要证明态射

$$m(X[p]) : F_1^p(X) \rightarrow F_2^p(X)$$

是一个同构。函子 F_1 和 F_2 在左边是稳定的, 存在一个整数 r 使得 $F_i^p(Y) = 0, i = 1, 2$ 对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 Y 和整数 $q \geq p + r - 1$ 。

性质 $\alpha)$ 推出 X 和复形

$$W^\bullet = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow Y \rightarrow L^{-r+1} \rightarrow L^{-r+2} \rightarrow \cdots \rightarrow L^{-1} \rightarrow L^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

是拟同构的, 这里组成 $L^i, -r+1 \leq i \leq 0$ 是 M 中的元素。定义 $L^\bullet$ 为复形

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow L^{-r+1} \rightarrow L^{-r+2} \rightarrow \cdots \rightarrow L^{-1} \rightarrow L^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

我们有一个正合序列:

$$0 \rightarrow L^\bullet \rightarrow W^\bullet \rightarrow Y[r] \rightarrow 0$$

根据 (1.3.2) 有一个 $D^*(A)$ 中的特异三角形:

$$\begin{array}{ccc} & Y[r] & \\ \nearrow & & \searrow \\ L^\bullet & \longrightarrow & X \end{array}$$

于是我们得到一个交换图表, 其中行为正合的:

$$\begin{array}{ccccccc} F_1^{p+r-1}(Y) & \longrightarrow & F_1^p(L^\bullet) & \longrightarrow & F_1^p(X) & \longrightarrow & F_1^{p+r}(Y) \\ \downarrow & & m(L^\bullet[p]) \downarrow & & \downarrow m(X[p]) & & \downarrow \\ F_2^{p+r-1} & \longrightarrow & F_2^p(L^\bullet) & \longrightarrow & F_2^p(X) & \longrightarrow & F_2^{p+r}(Y) \end{array}$$

整数 r 可以取使得对象 $F_i^q(Y)$ 为零对 $i=1,2$ 和 $q \geq p+r-1$, 而因此只需证明态射 $m(L^\bullet)$ 是一个同构, 对任意 $\text{comp}^b(A)$ 中组成均为 M 中的元素的对象 $L^\bullet$ 。而态射 m 诱导关联复形 $L^\bullet$ 的函子 F_1 和 F_2 的第一个谱序列态射。在其始对象上, 态射

$$m_1^{p,q}(L^\bullet) : F_1^q(L^\bullet) \rightarrow F_2^q(L^\bullet)$$

根据假设是一个同构。该谱序列是稳定的 (4.5.3), 态射 m 诱导它们的结果 (第二章4.4.5) 的同构, 于是, 由 (4.4.2), 态射 $m(L^\bullet)$ 是一个同构。这完成了断言 $e)$ 的证明。断言 $f)$ 由断言 $e)$ 得到。通过传递到反范畴中, 该定理证毕。

4.6. Cartan-Eilenberg 谱对象

定义 4.6.1. 我们称一个 $\mathcal{A}$ 中的复形 $I^\bullet$ 是 Cartan-Eilenberg 内射复形, 如果对任意整数 i , 对象 $\text{Im}(d_{I^\bullet}^i)$ 和 $H^i(I^\bullet)$ 是内射对象。

4.6.2. 注意到一个 Cartan-Eilenberg 内射复形 $I^\bullet$ 是内射型的 (1.1.5), 即其组成是 $\mathcal{A}$ 中的内射对象, 且对任意整数 i , 对象 $\text{Ker}(d_{I^\bullet}^i)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的内射对象。其验证是显然的, 只需用链接这些不同对象的短正合列即可。

命题 4.6.3. 设 $I^\bullet$ 是 Cartan-Eilenberg 内射复形。

a) 对任意复形 Y , 典范态射

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(H^p(Y), H^p(I^\bullet))$$

是一个同构。

b) 设 $Q: K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 为商函子, 复形 $I^\bullet$ 是在右边 Q -自由的

(第二章2.3.3), 即对任意复形 Y , 态射

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) \rightarrow \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet)$$

是同构。

c) 设

$$H^*(I^\bullet) : \cdots \rightarrow H^p(I^\bullet) \rightarrow H^{p+1}(I^\bullet) \rightarrow \cdots$$

为复形, 其组成为 $H^p(I^\bullet), p \in \mathbb{Z}$, 其微分为零。则有且仅有一个 $K(\mathcal{A})$ 中的同构 $I^\bullet \rightarrow H^*(I^\bullet)$, 由上同调对象上的恒同诱导。

d) 典范态射 $H^*(I^\bullet) \rightarrow H^p(I^\bullet)[-p]$ 定义了 $K(\mathcal{A})$ 中的同构, 而在 $D(\mathcal{A})$ 中

$$H^*(I^\bullet) \xrightarrow{\sim} \prod_{p \in \mathbb{Z}} H^p(I^\bullet)[-p]$$

证明 a) 推出 b)。事实上, 只需 (第二章2.3.3) 证明对任意零调的复形 Y , 有 $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) = 0$, 则由 a) 得到。证明 a) 推出 c)。事实上, 只需将 a) 中的同构中的 Y 换成 $I^\bullet$, $I^\bullet$ 换成 $H^*(I)$ 即可。类似地, 将 a) 中同构中的 $I^\bullet$ 换成复形 $H^*(I^\bullet)$ 便得到 a) 推出 d)。下面证明 a)。由定义立即得到复形 $I^\bullet$ 同构于以下形式的复形:

$$\cdots \rightarrow J^{n-2} \oplus H^{n-1} \oplus J^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} J^{n-1} \oplus H^n \oplus J^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} J^n \oplus H^{n+1}$$

因此, 存在一个从 $I^\bullet$ 到 $H^*(I^\bullet)$ 的同伦。为了证明 $a)$, 可以不妨假设 $I^\bullet = H^*(I^\bullet)$ 。显然有以下同构:

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y, H^*(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y, H^p(I^\bullet)[-p])$$

另外, 对象 $H^p(I^\bullet)$ 是内射的, 典范态射

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y, H^p(I^\bullet)[-p]) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H^p(Y), H^p(I^\bullet))$$

是一个同构。

4.6.4. 设 $X^{\bullet\bullet}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的双复形 (第一章2.1.2), 双复形 $X^{\bullet\bullet}$ 定义为 $\mathrm{comp}(\mathrm{comp}(\mathcal{A}))$ 中的对象:

$$X^{\bullet\bullet} = \cdots \rightarrow X^{\bullet, n-1} \xrightarrow{d_2^{\bullet, n-1}} X^{\bullet, n} \xrightarrow{d_2^{\bullet, n}} X^{\bullet, n+1} \rightarrow \cdots$$

(我们用 (4.1.9) 中的记号, 注意符号!) 定义 $B_1^p(X^{\bullet\bullet})$ 为单复形:

$$\begin{cases} B_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = \mathrm{Im}(d_1^{p-1, i}) \\ d_{B_1^p(X^{\bullet\bullet})}^i \text{ 由 } d_2^{p, i} \text{ 诱导} \end{cases} \quad (4.6.4.1)$$

定义 $Z_1^p(X^{\bullet\bullet})$ 为单复形:

$$\begin{cases} Z_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = \mathrm{Ker}(d_1^{p, i}) \\ d_{Z_1^p(X^{\bullet\bullet})}^i \text{ 由 } d_2^{p, i} \text{ 诱导} \end{cases} \quad (4.6.4.2)$$

定义 $H_1^p(X^{\bullet\bullet})$ 为单复形:

$$\begin{cases} H_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = Z_1^p(X^{\bullet\bullet})^i / B_1^p(X^{\bullet\bullet})^i \\ d_{H_1^p(X^{\bullet\bullet})}^i \text{ 由 } d_2^{p,i} \text{ 诱导} \end{cases} \quad (4.6.4.3)$$

最后, Y 为 $\mathcal{A}$ 中的单复形, 我们也定义 Y 为双复形, 其第二个次数非零的组成为零, 而在第二个次数为零时, 其组成和第一个微分均为 Y 的组成和微分。

定义 4.6.5. 设 Y 是 $\mathcal{A}$ 中的一个单复形, 一个 Y 的 Cartan-Eilenberg 内射分解为一个双复形:

$$I^{\bullet\bullet} : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow I^{\bullet,0} \rightarrow I^{\bullet,1} \rightarrow I^{\bullet,2} \rightarrow \cdots$$

和一个态射, 称作提升:

$$\varepsilon : Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$$

使得对任意整数 p , 单复形 $B_1^p(I^{\bullet\bullet})$ (4.6.4.1) 和 $H_1^p(I^{\bullet\bullet})$ (4.6.4.3) 有提升:

$$B_1^p(\varepsilon) : \text{Im}(d_Y^{p-1}) \rightarrow B_1^p(I^{\bullet\bullet})$$

$$H_1^p(\varepsilon) : H^p(Y) \rightarrow H_1^p(I^{\bullet\bullet})$$

他们是投射形式的分解 (1.1.4)。

我们称复形 Y 的 Cartan-Eilenberg 内射分解是因为作者简单地称为复形 Y 的内射分解 ([1] 第 XVII 章), 但在这

里我们不用这个术语。一个 Cartan-Eilenberg 内射分解诱导出 Y 的组成和微分的像的内射型分解 [*loc. cit.*]。我们称一个 Y 的 Cartan-Eilenberg 内射分解是有限长度的，如果存在一个整数 n_0 使得 $I^{\bullet, n} = 0$ 对 $n > n_0$ 。对于一个复形 Y 有有限的 Cartan-Eilenberg 内射分解，需且只需 Y 的上同调对象和 Y 的微分的像的内射维数是这样的。回忆在 *loc. cit.* 中建立的结果：

命题 4.6.6. a) 当 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象时 (3.1.5)，对 $\mathcal{A}$ 中的单复形 Y ，存在 Cartan-Eilenberg 内射分解。

b) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是单复形的态射， $\varepsilon: X \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ 和 $\varepsilon': Y \rightarrow J^{\bullet\bullet}$ 为两个 Cartan-Eilenberg 内射分解，则存在一个双复形的态射：

$$g: I^{\bullet\bullet} \rightarrow J^{\bullet\bullet}$$

在 f 上，即使的以下双复形的态射的图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon' \\ I^{\bullet\bullet} & \xrightarrow{g} & J^{\bullet\bullet} \end{array}$$

是交换的。

c) 两个 f 上的态射 $g, g': I^{\bullet\bullet} \rightarrow J^{\bullet\bullet}$ 是同伦的 (在两个双复形的态射的同伦的意义下 (第一章 2.5.1))。

参阅 *loc. cit.*。

4.6.7. 设 Y 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 中的对象, 而 $Y \rightarrow I^\bullet$ 是 Y 的一个 Cartan-Eilenberg 内射分解。双复形 $I^\bullet$ 得到两个取值在 $\text{D}(\mathcal{A})$ 中的谱对象, 分别按照第一次或第二次过滤 (4.1.7)。取值在 $\text{D}(\mathcal{A})$ 中的由 $I^\bullet$ 的第二次过滤得到的谱对象称作 Y 的 Cartan-Eilenberg 谱对象 (与 Cartan-Eilenberg 考虑的分解相关)。

命题 4.6.8. 设 Y 是 $\mathcal{A}$ 中的复形, 而 $\varepsilon: Y \rightarrow I^\bullet$ 为 Y 的 Cartan-Eilenberg 内射分解。单 Y 是 $\text{comp}^+(\mathcal{A})$ 中的对象时, 或更好地, 当分解 $I^\bullet$ 是有限长度的, 单复形 $\int_2 I^\bullet$ 是一个投射型的复形, 而复形的态射:

$$\int_2 \varepsilon: Y \rightarrow \int_2 I^\bullet$$

是一个拟同构。

事实上, 态射 ε 诱导一个从取值在 $\text{D}(\mathcal{A})$ 中的 Y 的第一个谱对象 (4.1.5) 到取值在 $\text{D}(\mathcal{A})$ 由 $I^\bullet$ 由第一个次数过滤的谱对象 ((4.1.7) 和 (4.1.8)) 的态射。这两个谱对象通过典范上同调函子 $\text{H}: \text{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, 得到取值在 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的谱对象。故只需证明 ε 诱导这两个谱对象的同构。而由 Y 定义的谱对象总是稳定的 (第二章 4.4.2) 而根据假设, 由 $I^\bullet$ 定义的谱对象也是收敛的。故只需证明 ε 诱导它们的始对象

的同构。第一个的始对象为

$$I_1^{p,q} = H^q(Y^p)$$

而第二个是

$$'I_1^{p,q} = H^q(I^{p,\bullet})$$

此外，由 ε 诱导的始对象是由复形态射

$$\varepsilon^p : Y^p \rightarrow I^{p,\bullet}$$

传递到上同调对象所得到的。但该态射是拟同构，这就证明此结论。

4.6.9. 设 $F : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个上同调函子， Y 是 $\text{comp}(\mathcal{A})$ 的对象，而 $Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ 是 Cartan-Eilenberg 内射分解。函子 F 将对应的 Cartan-Eilenberg 谱对象 (4.6.7) 变为一个取值在 $\mathcal{B}$ 中的谱对象，该谱序列称作 Cartan-Eilenberg 谱序列。定义 $(\text{C.E.})_r^{p,q}$ 为该谱序列的项 (第二章4.3.3.1)。该序列的始对象为 (4.1.9.1):

$$(\text{C.E.})_1^{p,q} = F^{p+q}(I^{\bullet,p}[-p]) = F^q(I^{\bullet,p})$$

而第一个微分为 (4.1.9.1):

$$d_1^{p,q} : (\text{C.E.})_1^{p,q} \rightarrow (\text{C.E.})_1^{p+1,q}$$

$$d_1^{p,q} = F^q(-d_2^{\bullet,p})$$

复形 $I^{\bullet, p}$ 是 Cardan-Eilenberg 内射复形 (4.6.1), 且由 (4.6.3) 我们有一个 $D(\mathcal{A})$ 中的典范同构:

$$I^{\bullet, p} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} H^r(I^{\bullet, p})[-r]$$

然后用 (4.6.4.2) 中引入的复形 $H_1^p(I^{\bullet\bullet})$, 对任意整数 r , 我们有:

$$H_1^r(I^{\bullet\bullet})^p = H^r(I^{\bullet, p})$$

从而有 $D(\mathcal{A})$ 中的典范同构:

$$I^{\bullet, p} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} H_1^r(I^{\bullet\bullet})^p[-r]$$

在这个同构的意义下, 复形的态射

$$d_2^{\bullet, p} : I^{\bullet, p} \rightarrow I^{\bullet, p+1}$$

同构与以下态射:

$$\prod_{r \in \mathbb{Z}} d_{H_1^r(I^{\bullet\bullet})}^p[-r]$$

这个表达式定义了始对象

$$(C.E.)_1^{p, q} = F^q \left(\prod_{r \in \mathbb{Z}} H_1^r(I^{\bullet\bullet})[-r] \right) \quad (4.6.9.1)$$

且第一个微分为

$$d_1^{p, q} = -F^q \left(\prod_{r \in \mathbb{Z}} d_{H_1^r(I^{\bullet\bullet})}^p[-r] \right) \quad (4.6.9.2)$$

现在设 $F^{q, \bullet}(\mathbf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))$ 为 $\mathcal{B}$ 中的复形, 为函子 F^q 作用在复形 $\mathbf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})$ 的组成和微分上。式 (4.6.9.1) 和 (4.6.9.2) 定义了一个态射:

$$(\text{C.E.})_2^{p,q} \rightarrow \prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}_{\mathcal{B}}^p(F^{q-r, \bullet}(\mathbf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))) \quad (4.6.9.3)$$

该态射是同构, 例如, 当 Y 是 $\text{comp}^+(\mathcal{A})$ 中的对象且当函子 F 在右边稳定, 或者更好地, 对 Y 不作假设, 而 F 是稳定的 (4.5.1)。

当双复形 $I^{\bullet\bullet}$ 是 Y 的 Cartan-Eilenberg 内射分解时, 复形 $\mathbf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})$ 是 $\mathbf{H}^r(Y)$ 的内射分解, 因此, 我们有一个同构:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{B}}^p(F^{q-r, \bullet}(\mathbf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))) \xrightarrow{\sim} R^p F^{q-r}(\mathbf{H}^r(Y)) \quad (4.6.9.4)$$

这里 $R^p F^{q-r} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 为函子 F^{q-r} 的第 p 个右到函子 (在 [1] 的意义下)。因此, 当态射 (4.6.9.3) 中的态射是一个同构时, 我们有一个同构:

$$(\text{C.E.})_2^{p,q} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} R^p F^{q-r}(\mathbf{H}^r(Y)) \quad (4.6.9.5)$$

4.6.10. 研究在一个合适的泛元中当 $\mathcal{B}$ 是 Abel 群组成的范畴 Ab 时的情况。而函子

$$F : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ab}$$

是函子

$$Y \mapsto F(Y) = \text{Ext}^0(Z, Y)$$

这里 Z 是 $D(\mathcal{A})$ 中的对象。设 Y 是一个复形，而 $\varepsilon: Y \rightarrow I^\bullet$ 是一个 Cartan-Eilenberg 内射分解。态射 (4.6.9.3) 因此是一个同构 (4.6.3)，且因此我们有一个同构：

$$(C.E.)_2^{p,q} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} \text{Ext}^p(H^{r-q}(Z), H^r(Y)) \quad (4.6.10.1)$$

另一方面，与 F 相关的谱序列当 Y 是 $\text{comp}^+(\mathcal{A})$ 且 Z 是 $D^-(\mathcal{A})$ 中的对象时是稳定的，或者，更好地，当 Cartan-Eilenberg 内射分解是有限长度的。此外，在该假设下，此谱序列的结果，根据 (4.6.8) 是

$$\prod_{r \in \mathbb{Z}} \text{Ext}^p(H^{r-q}(Z), H^r(Y)) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(Z, Y)$$