



计算与数学的共进

张平文

北京大学

2022年3月

目录

- 一. 计算无处不在
- 二. 计算的要素
- 三. 计算与数学的共进
- 四. 展望未来

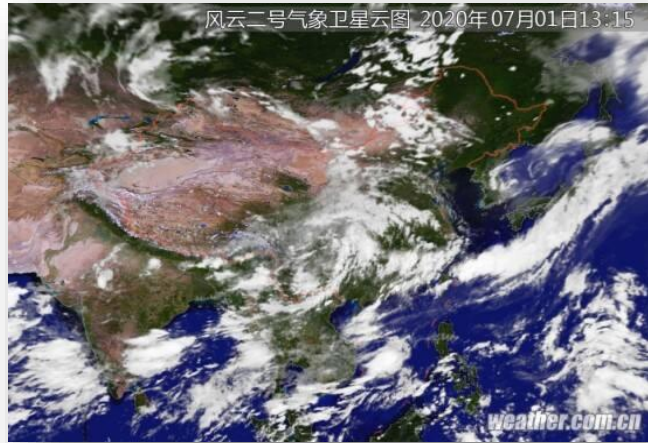
科技
创新
在北大



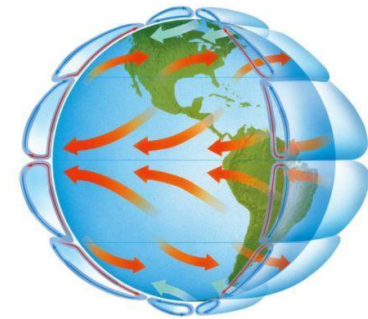
一. 计算无处不在



天气预报



- 天气预报与出行、交通、生产、农业乃至冬奥会都关系密切
- 目前仍有极端天气预报不准



空气的流动可用一组偏微分方程描述并求解

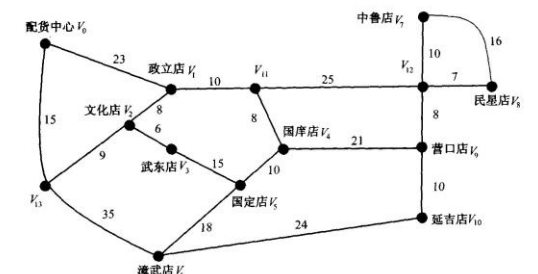
一. 计算无处不在



交通与导航



- 公路和铁路的指挥调度
- 导航计算最优路径



道路选择可转为动态规划问题来计算

一. 计算无处不在



生活



Q 暴雨寻人 搜索

综合 资讯 视频 小视频 图片 用 筛选

河南暴雨紧急寻人

报平安、寻人请留下您的信息

今日头条 抖音 西瓜视频

暴雨寻人入口

暴雨寻人-最新资讯

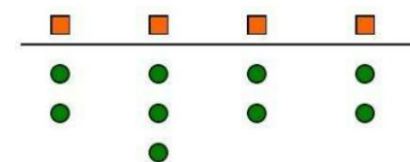
- 抖音提供“暴雨紧急寻人”服务 已助3位网友找到失联亲人
大河网 40分钟前
- 上线“暴雨紧急寻人”服务, 抖音2天助6位网友找到郑州亲人
红网 4分钟前
- (已找回)暴雨急寻!中年女子在焦作市失联, 高1米7, 偏胖, 长发
头条寻人 已关注 7小时前

资讯 查看更多

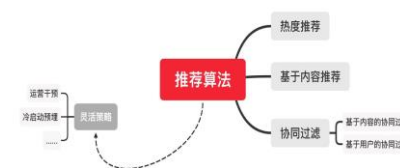
河南暴雨·寻找失联者(更新)

- 订外卖
- 网络搜索
- 新闻推送

多队多服务台



外卖可以考虑用排队论方法来求解

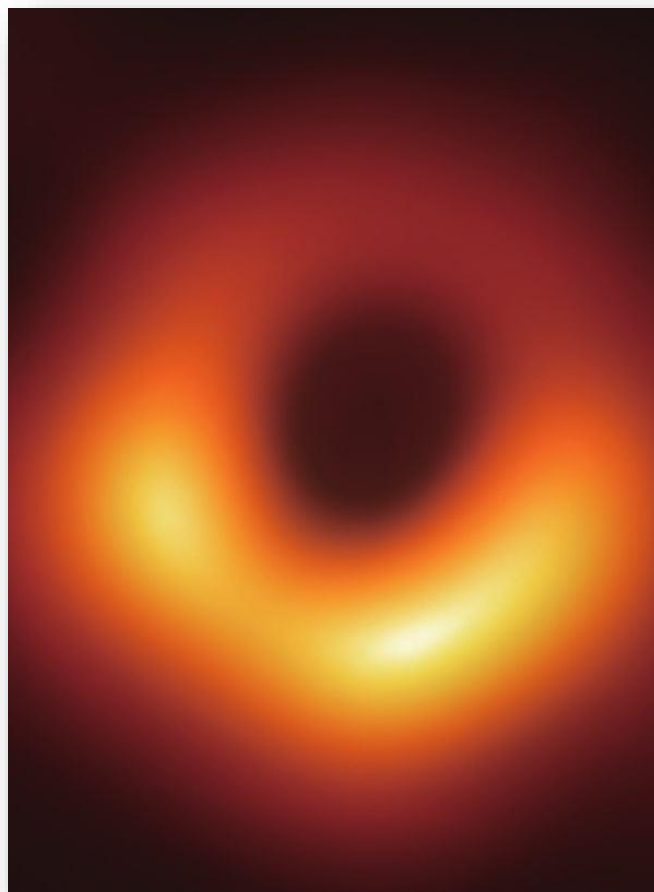


新闻推送一般可以用比对相似性的推荐算法来求解

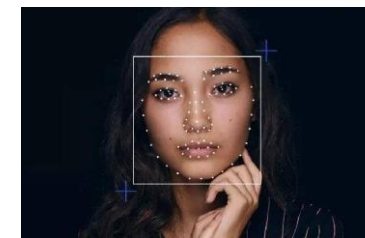
一. 计算无处不在



照相



- 眼见为实?
- 黑洞照片
- 华为手机拍摄的月亮



华为相机可以基于多摄像头，采用多帧合成、像素合并，再结合人工智能算法补色等技术产生高清照片

一. 计算无处不在



小结

- 从衣食住行到生产生活，从科学研究到国防安全，
计算已经无处不在
- 我们有必要对**计算**有更多了解



目录

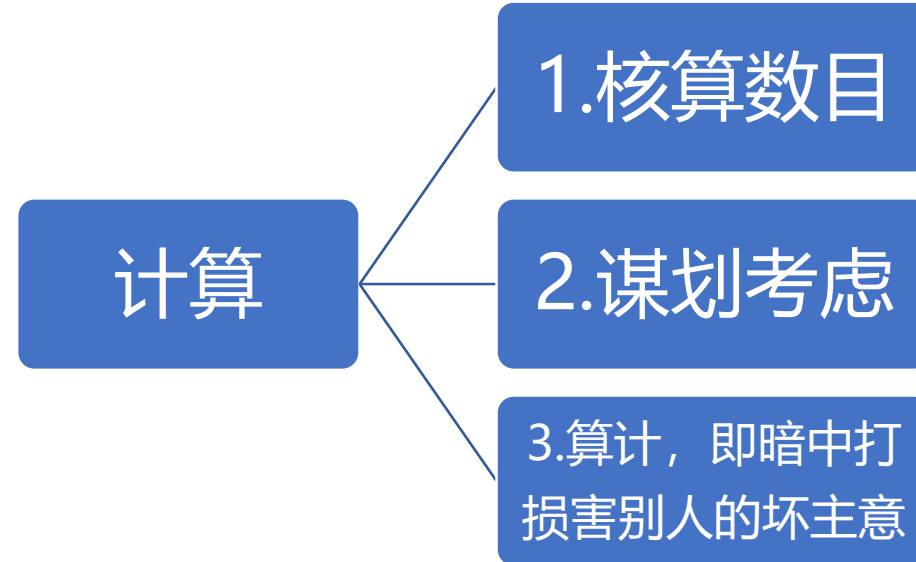
- 一. 计算无处不在
- 二. 计算的要素**
- 三. 计算与数学的共进
- 四. 展望未来

科技
创新
在北大



计算的含义

- 作为汉语词语



- 作为数学用语

计算，是一种将单一或复数之输入值转换为单一或复数之结果的一种思考过程。

数学上也可以将计算看做一种映射

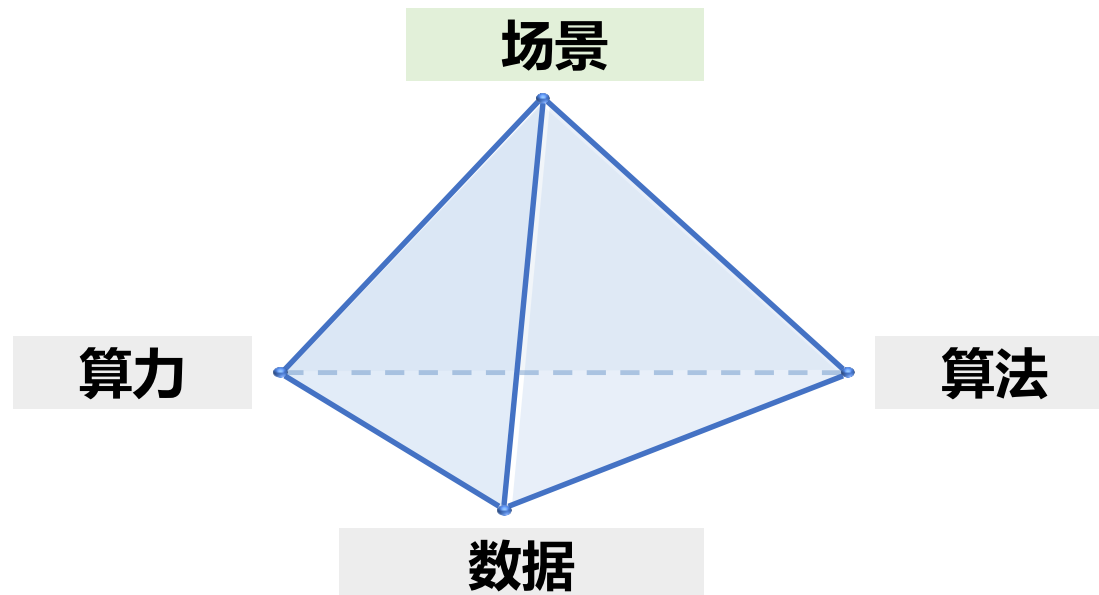
二. 计算的要素



计算的4个要素

计算的要素

- 计算与数据、算力、算法、场景密切相关，成为计算的4个要素



计算4要素
形象称之为
计算四面体
或计算金字塔

目录

一. 计算无处不在

二. 计算的要素

1. 数据

2. 算力

3. 算法

4. 场景

三. 计算与数学的共进

四. 展望未来

科技
创新
在北大



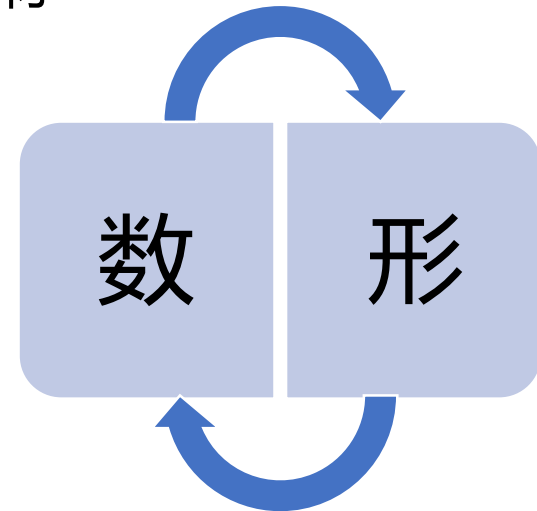
二. 计算的要素 —— 数据



数与数据

- **数**是一个用作计数、标记或用作量度的抽象概念
 - **数**的历史悠久，是数学的重要组成部分与研究对象
- **数据**是事实或观察的结果，是对客观事物的逻辑归纳
 - **数据**是用于表示客观事物的未经加工的原始素材

数学



二. 计算的要素 —— 数据



数的历史

- “数” 是计算中**最基本**的组成部分
- 人类的生产生活中需要有 “数”

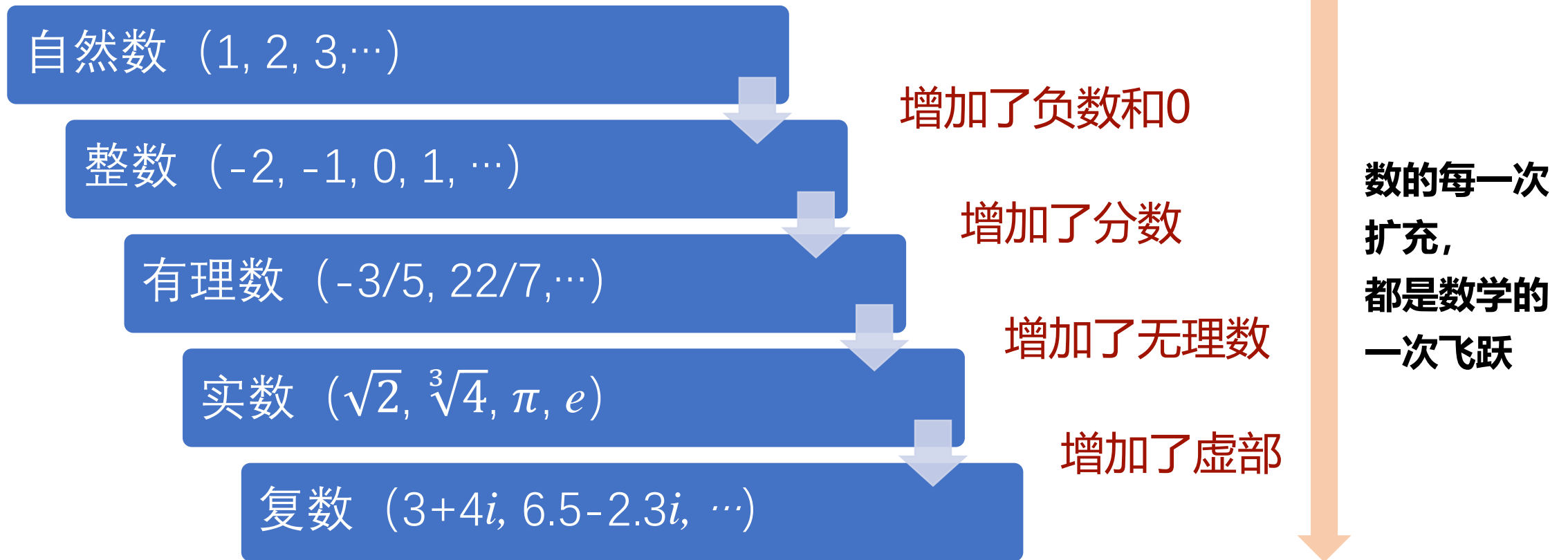


- 远古时候，人类并没有“数”的概念
- 为了更清楚地知道自己部落里有多少人，养了多少只羊，就需要用“数”来表示
- 数的概念从“有一无”、“1个—很多”逐步发展到“1个、2个、3个…”

二. 计算的要素 —— 数据



数的扩充



二. 计算的要素 —— 数据



还有什么数?

矩阵

- 矩阵 (Matrix) 是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合
- 矩阵可以看做一种广义的“数”

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 2.4 \\ 6 & e \\ \sqrt{3} & -8 \end{bmatrix}$$

矩阵是数的二维表达形式,
三维或更高维的表达形式
我们称之为张量

由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵, 也可以记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

二. 计算的要素 —— 数据



与数紧密相关的进制

进制

- 为了记录更大的数，我们需要有“进制”的概念
- 进制也就是进位制，是人们规定的一种进位方法

10进制是最常见、最常用的进制，即逢10进1（位）
10进制的来历：很可能是因为人有10根手指



二. 计算的要素 —— 数据



2进制

2进制

- 逢2进1, 即为2进制
- 2进制的数只有0和1两种数字
- 2进制的数: 0,1,10,11,100,101,...10111001,...
- 为了避免歧义, 2进制的数 x 可以记做 $x_{(2)}$

2进制数与10进制数的换算

- **2进制转10进制:**
从低位 (记作第0位) 开始, 有1的数位, 加上2的对应次方;
 $101_{(2)} = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 = 5_{(10)}$
- **10进制转2进制:**
除2取余, 然后倒序排列;
 $101_{(10)} = 1100101_{(2)}$

10进制转2进制的计算

2		101	
2		501
2		250
2		121
2		60
2		30
2		11
		01

二. 计算的要素 —— 数据



还有哪些进制?

8进制

- 逢8进1, 8进制的数有0、1、2、3、4、5、6、7共8种数字

16进制

- 逢16进1, 16进制的数有0到9、以及A、B、到F共16种数字
- A表示10进制中的10, F表示10进制中的15



半斤=八两?

- 此外, 还有用于月份的12进制, 用于钟表的60进制等, 这些进制的出现一般与自然现象及传统习惯有关
- 理论上, 可以有任意进制!

例如:

$$12_{(16)} = 18_{(10)} = 22_{(8)}$$

$$22_{(8)} = 10010_{(2)}$$



二. 计算的要素 —— 数据

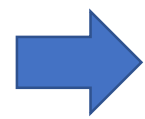


为什么有这么多种“数”？

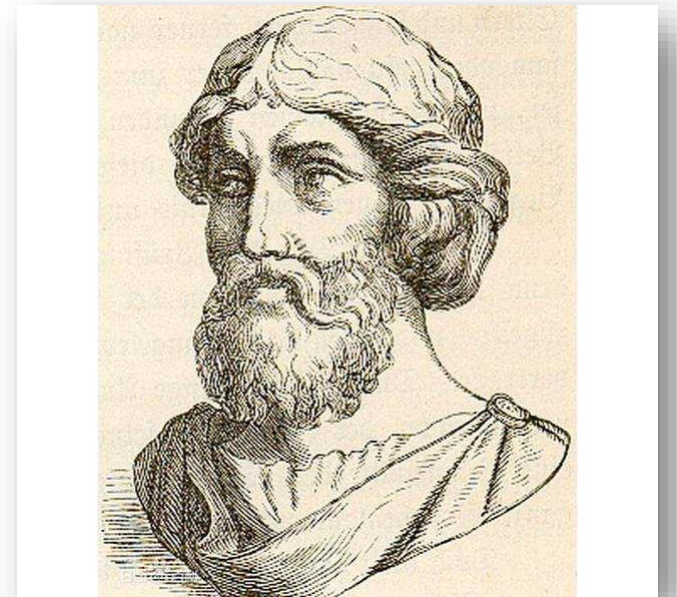
数的逐步丰富与人类的发展相关

- 人类在生产生活中逐步发现了更多种数
- 为了便于研究或计算，引入或构造了新的“数”

随着数学、信息技术等的发展，现在几乎所有的事物都可以“数字化”



万物皆数



“万物皆数”最早由毕达哥拉斯学派提出

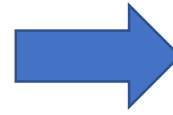
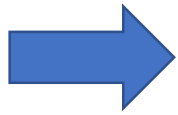
二. 计算的要素 —— 数据



声音的数字化

声音

- 声音是物体震动产生的一种机械波，并通过介质传播
- 声音是一种连续的信号



[0,15,86,13,95,75,42,0....]

通过采样设备高速（通常每秒钟8000次）采样，将声波的幅度（声音高低）用对应脉冲信号的大小来表示

将脉冲信号按时间顺序用数组或矩阵的形式来表达，就将声音变成了数

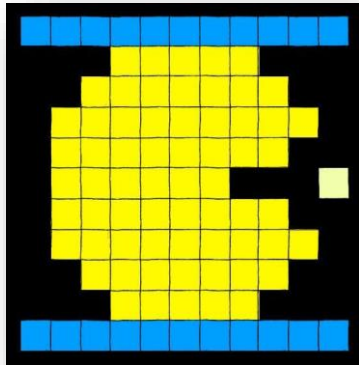
二. 计算的要素 —— 数据



图像和视频的数字化

图像

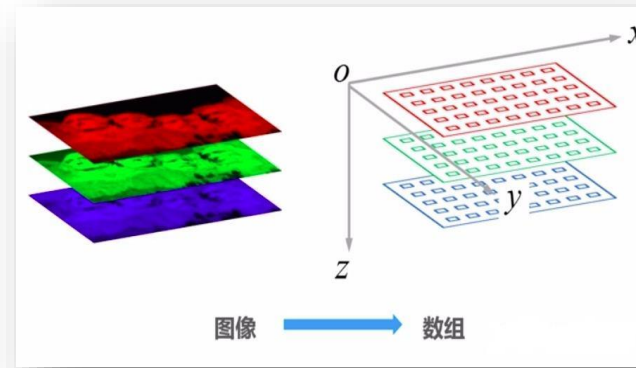
- 图像有不同的表示格式，以位图 (bmp) 格式为例，每一张彩色图片都可以表示成一个个按行、列紧密排列的不同颜色的小点所组成



位图示意图



每种颜色都可以用红、绿、蓝三种颜色组合而成



每种颜色按各自位置组成一个数组，三个数组叠加，即可表示一张图片



按照时间将多个图像连接起来，就成为了视频，同样可以表示为数组/矩阵

目录

一. 计算无处不在

二. 计算的要素

1. 数据

2. 算力

3. 算法

4. 场景

三. 计算与数学的共进

四. 展望未来

科技
创新
在北大



二. 计算的要素 —— 算力



算力与数学

算力通常指用于计算的工具，借助算力，可提高计算的效率和准确率
现在一般指“计算机”

计算机的发明过程中，数学家做出了非常重要的贡献

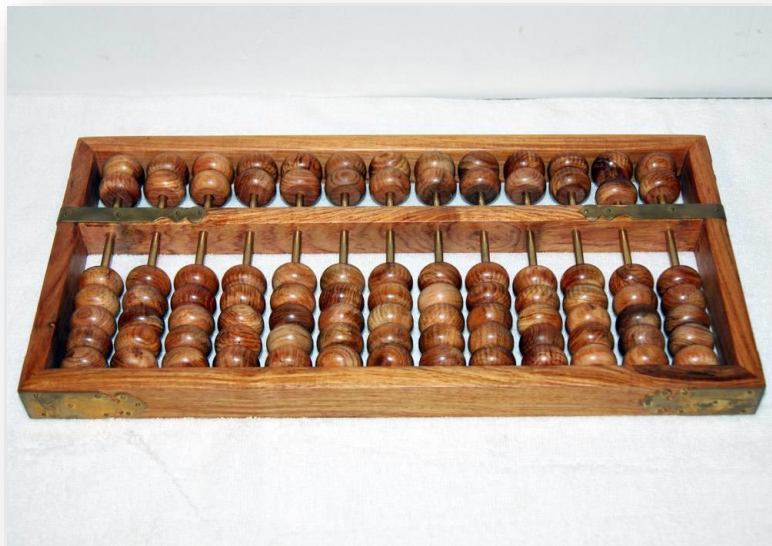
二. 计算的要素 —— 算力



最早的“算力”

算盘

- 算盘的前身“算珠”，最早可以追溯到公元前600年
- 算盘兴起于北宋时期，是中国古代劳动人民发明创造的一种**简便**的计算**工具**
- 算盘的运行效率主要取决于人的手速



加法口诀表

加数	不进位的加		进位的加	
	直加	满五加	进十加	破五进十加
一	一上一	一下五去四	一去九进一	
二	二上二	二下五去三	二去八进一	
三	三上三	三下五去二	三去七进一	
四	四上四	四下五去一	四去六进一	
五	五上五		五去五进一	
六	六上六		六去四进一	六上一去五进一
七	七上七		七去三进一	七上二去五进一
八	八上八		八去二进一	八上三去五进一
九	九上九		九去一进一	九上四去五进一

口诀表相当于一种算法

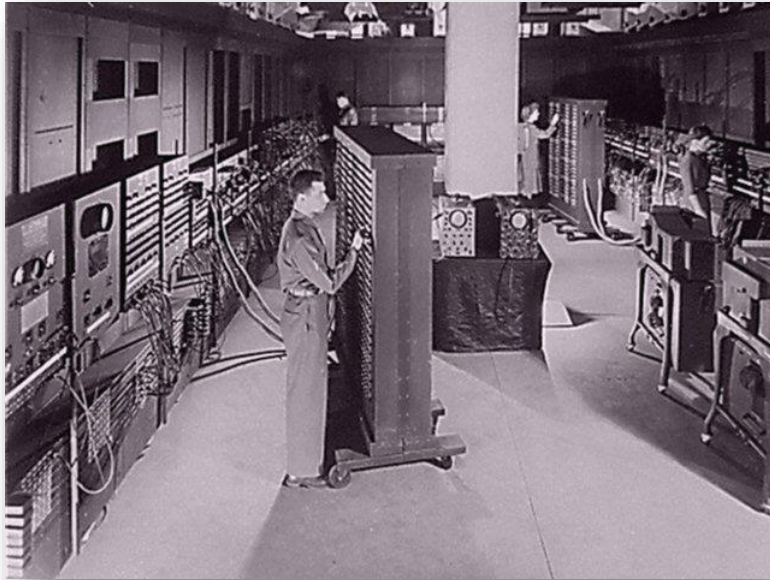
二. 计算的要素 —— 算力



第一台计算机

ENIAC

- 于**1946年**2月14日在美国诞生
- 世界上**第一台通用计算机**
- 占地面积约170平方米，重达30英吨
- 计算速度是每秒5000次加法或400次乘法



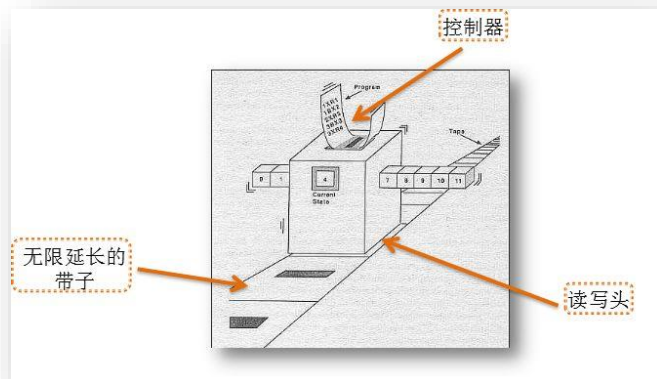
二. 计算的要素 —— 算力



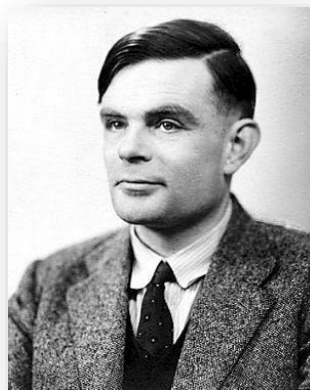
现代计算机的根基 — I

- 图灵机模型

- **图灵机**: 所有计算机都遵循的理论模型, 能模拟实际计算机的所有计算行为
- 图灵: 计算机科学之父, 人工智能之父, 著名数学家
 - ◆ 提出**图灵测试**, 即一个人在不接触对方的情况下, 通过和对方进行一系列的问答, 考虑在相当长时间内, 是否能判断出对方是人还是计算机



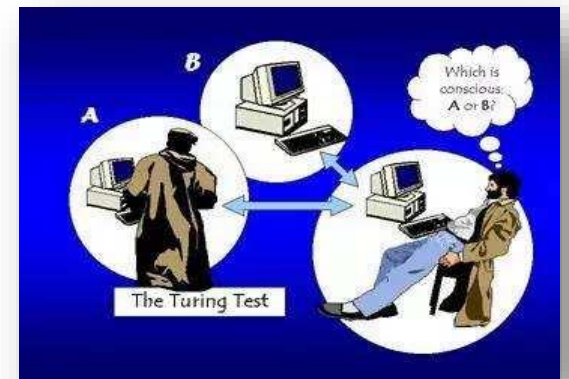
图灵机模型



图灵



图灵奖: 计算机科学界的诺贝尔奖



图灵测试

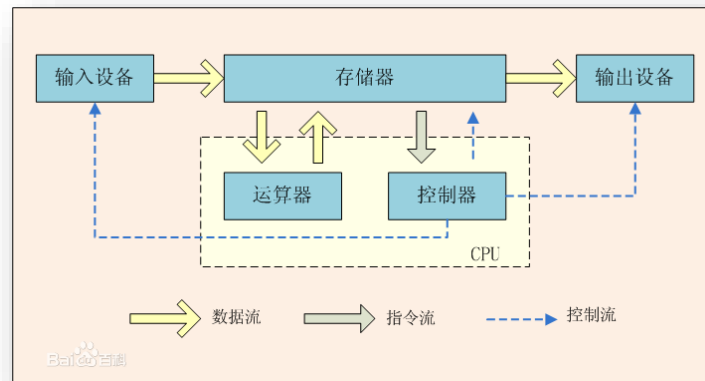
二. 计算的要素 —— 算力



现代计算机的根基 — II

- 冯·诺伊曼体系架构

- 从第一台现代计算机（1945年）到当前最先进的计算机，**全部基于冯·诺伊曼体系架构**
- 冯·诺依曼：**现代计算机之父**，20世纪最重要的**数学家之一**
 - ◆ 创立博弈论，并解决了希尔伯特第5问题



冯·诺依曼体系架构



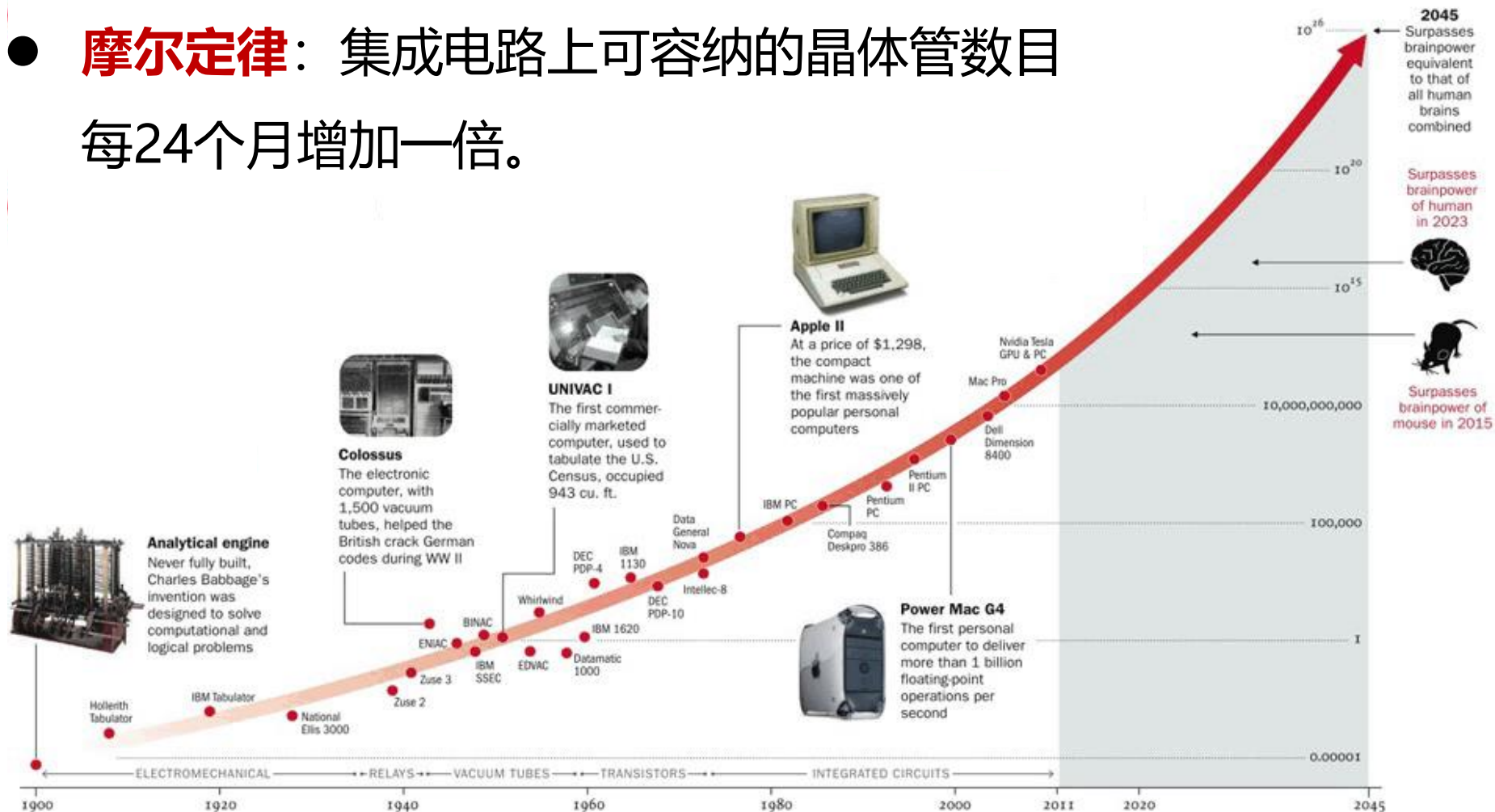
冯·诺依曼

二. 计算的要素 —— 算力



计算机的发展

- **摩尔定律**：集成电路上可容纳的晶体管数目每24个月增加一倍。



二. 计算的要素 —— 算力



个人计算机

个人计算机

- 一种能独立运行，完成特定功能的设备，包括**硬件**和**软件**
- 硬件包括电源、主板、CPU、内存、硬盘等
- 软件包括操作系统和应用软件（游戏、办公软件）等
- 工作、学习和生活中随处可见，因计算机算得又快又准，故现在的**计算工作**很多时候都要用**计算机**来帮助完成



二. 计算的要素 —— 算力



超级计算机（集群）

超级计算机

- 能够执行一般个人电脑无法处理的大数据量与高速运算的电脑
- 具有很强的**计算和处理数据**的能力
- 多用于国家高科技领域和尖端技术研究，是国家科技发展水平和**综合国力**的重要标志

全球超级计算机 TOP500 (2021年11月版)

日本“富岳”排名第一，我国“神威·太湖之光”排名第四。
中、美两国全球领先，占据榜单主导地位，共占比约2/3，
其中中国173台，美国150台



**我国在超级计算机方面
已处于世界领先地位**

目录

一. 计算无处不在

二. 计算的要素

1. 数据

2. 算力

3. 算法

4. 场景

三. 计算与数学的共进

四. 展望未来

科技
创新
在北大



二. 计算的要素 —— 算法

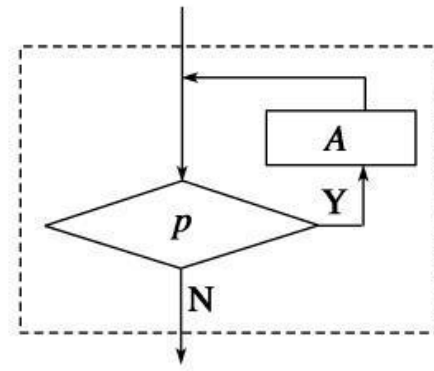


“算法”与数学

相当一部分数学家主要的工作就是研究算法

- 算法是一种有限、确定、有效的解决问题的方法
 - 一定的输入
 - 有限的时间内完成
 - 特定的输出

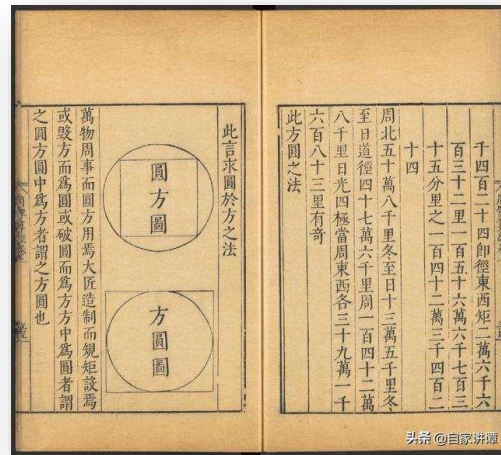
适合用计算机程序来实现



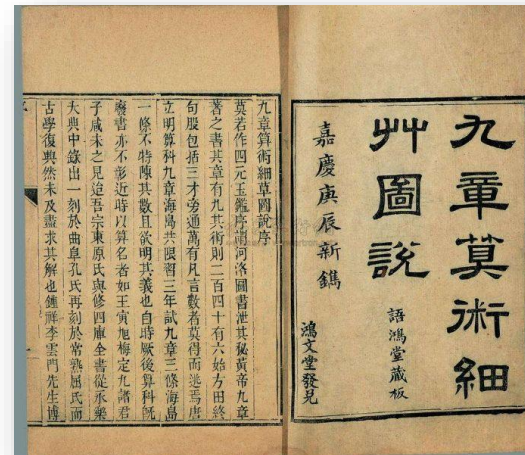
二. 计算的要素 —— 算法

古代的算法研究

- 研究算法是早期数学家主要工作内容
- 不少算法类书籍流传至今
 - 包含开方术、中国剩余定律、杨晖三角等算法



公元前1世纪
我国的《周髀算经》



公元1世纪
我国的《九章算术》

二. 计算的要素 —— 算法



现代的算法研究

- 我国当前处于国际领先水平
 - 理论研究成果颇丰（如冯康院士提出的有限元方法、动力系统的辛几何算法等）



冯康院士

世界十大算法

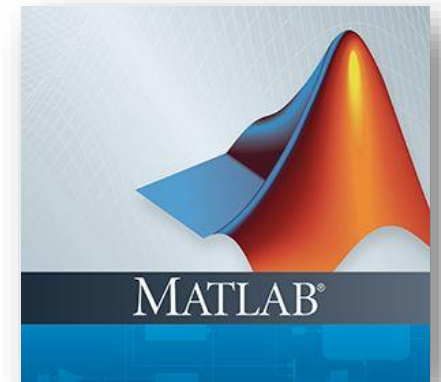
1. 归并排序、快速排序和堆积排序
2. 傅立叶变换和快速傅立叶变换
3. 最短路径Dijkstra算法
4. RSA非对称加密算法
5. 哈希算法
6. 整数质因子分解算法
7. 链接分析算法
8. 比例微积分算法
9. 数据压缩算法
10. 随机数生成算法

二. 计算的要素 —— 算法

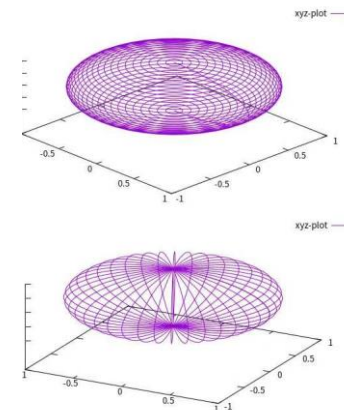
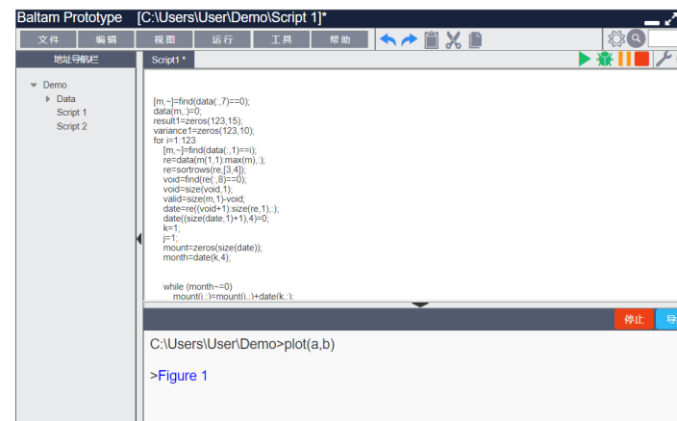


计算软件是算法的集成

- 计算软件是一种产品，强调易用性高效性
- 基础工业软件涉及到“卡脖子”问题
 - 中美竞争，美国禁用Matlab
- 我们正在努力追赶
 - 数值计算软件国产化



Matlab计算软件



国产通用
数值计算软件

目录

一. 计算无处不在

二. 计算的要素

1. 数据

2. 算力

3. 算法

4. 场景

三. 计算与数学的共进

四. 展望未来

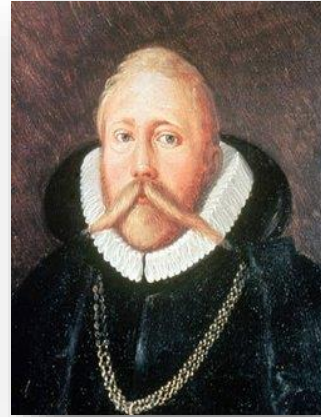


二. 计算的要素 —— 场景

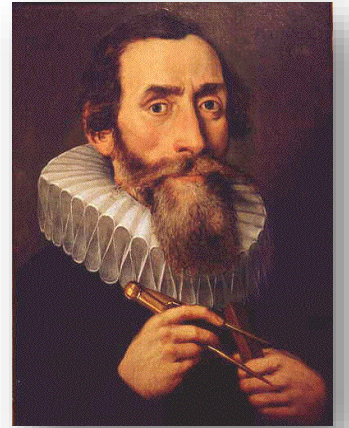


计算在古代的应用场景

- 应用场景相对不丰富
 - 天文：研究星球运动及历法
 - 军事：分析弹道
 - 航海：选择航线



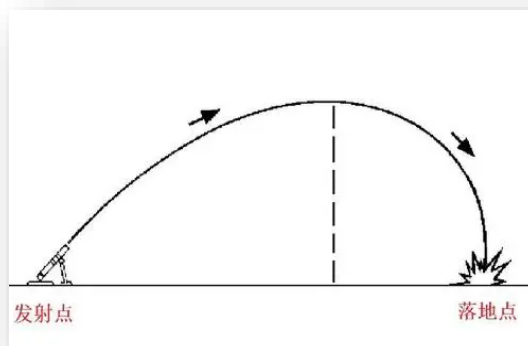
第谷观测并收集大量星球运动数据



开普勒根据数据进行计算，并试图寻找规律



研究星球运动及历法



分析弹道

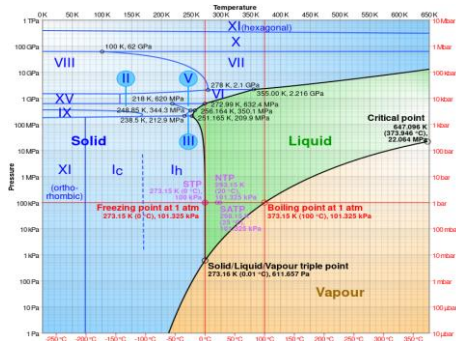


选择航线

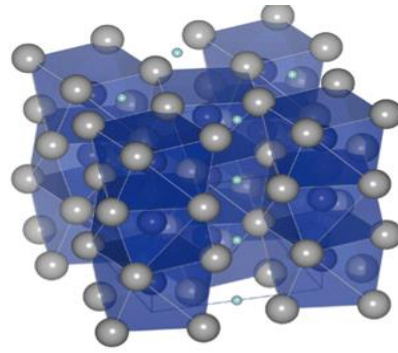
二. 计算的要素 —— 场景



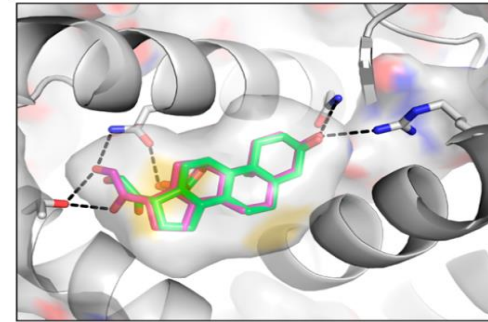
计算在现代的应用场景越来越多



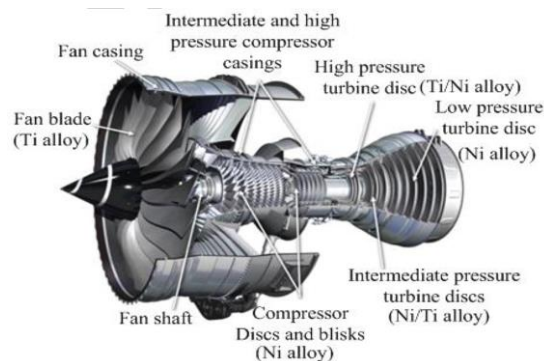
科学发现



能源材料

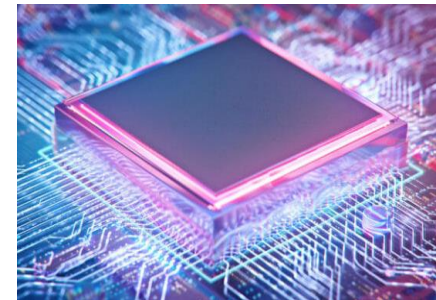


药物设计



航空发动机材料

科学研究



半导体设计制造

二. 计算的要素 —— 场景



计算在现代的应用场景越来越多



数字图书馆



电子商务



航班预测

日常生活



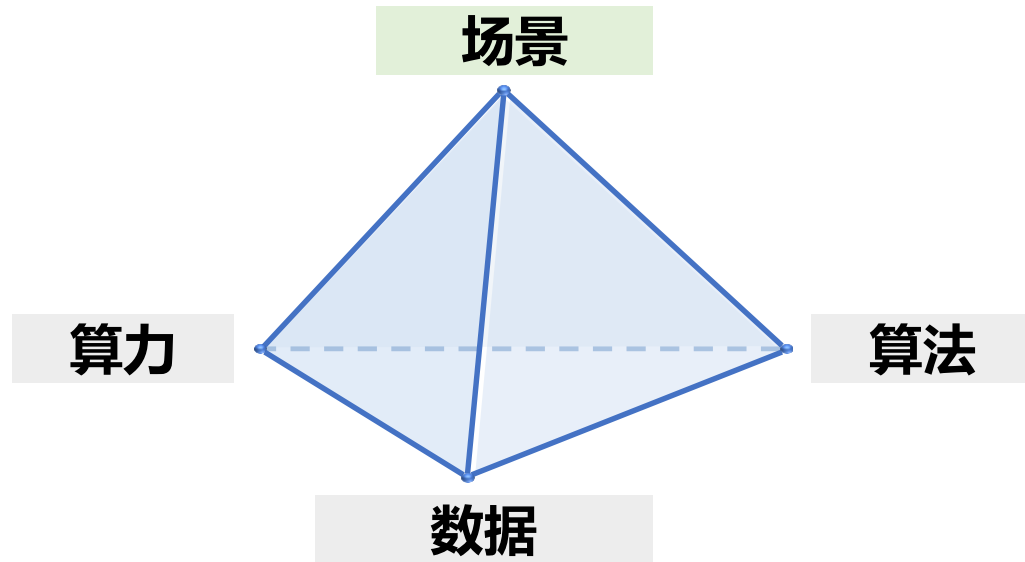
计算广告学

二. 计算的要素

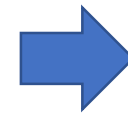


数学为计算的发展起到了非常关键的作用

计算四面体



数的扩充与运算
算力的每一次飞跃
算法的设计与证明
场景的不断增加



离不开
数学

二. 计算的要素

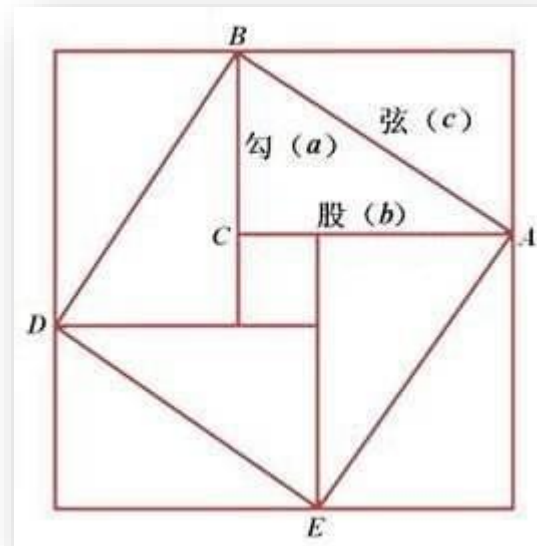


计算过程中发现了新问题，促进数学发展

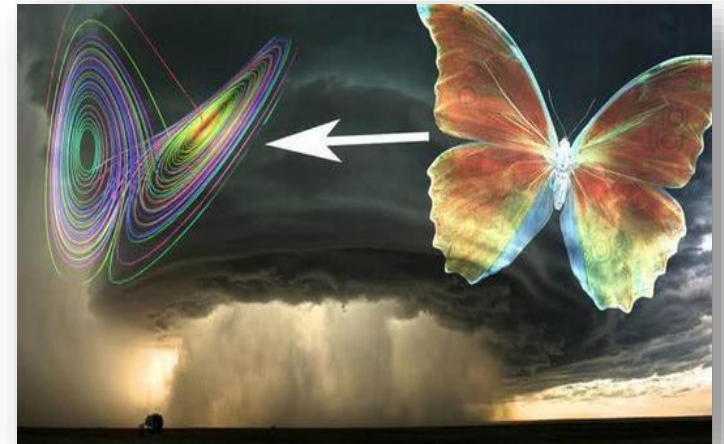
- 例如无理数的产生、勾股定律、混沌等



希帕索斯因发现无理数而被淹死



计算过程中发现三角形的边总是存在平方和关系，进而发现勾股定律



混沌：蝴蝶振动翅膀可能引发风暴

目录

- 一. 计算无处不在
- 二. 计算的要素
- 三. 计算与数学的共进**
- 四. 展望未来

科技
创新
在北大



三. 计算与数学的共进



人类学习数学和数学发展史的对比

人类学习数学

小学：数学学习加减乘除，此时数学就是计算，计算就是数学

中学：数学学习以计算为主，逐渐出现定律证明和几何问题

大学：数学学习以问题证明为主，少数微积分等问题仍需计算

数学的发展历史

早期数学与计算不分

因为工作重心不同而逐渐分离

数学更理论，计算更工程
但计算仍是数学的重要手段

计算为数学提供了实验验证的手段支撑，是数学的实验场

三. 计算与数学的共进

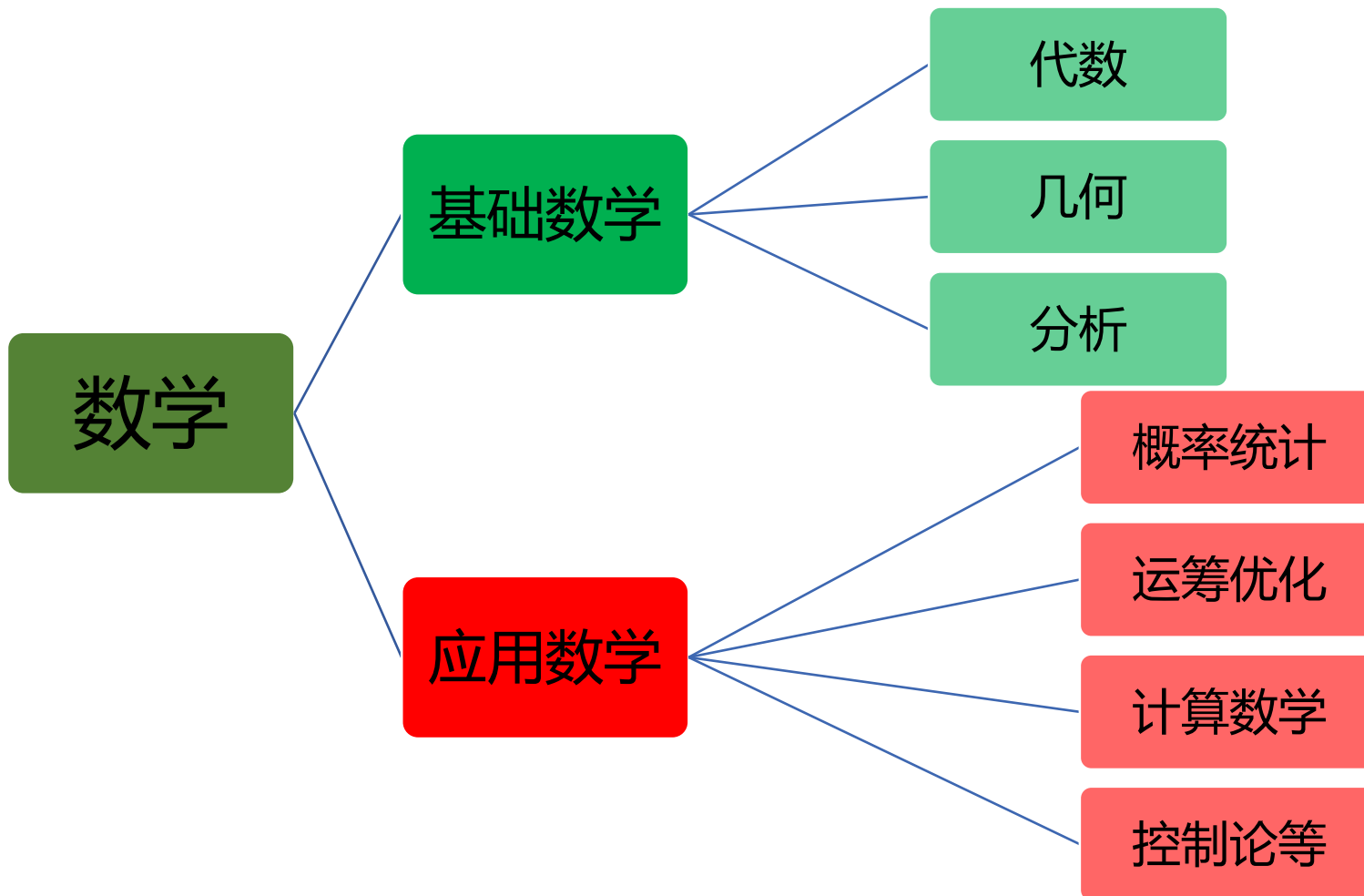


数学的研究方向

顶天



立地



**计算是应用数学
最重要的手段**

三. 计算与数学的共进



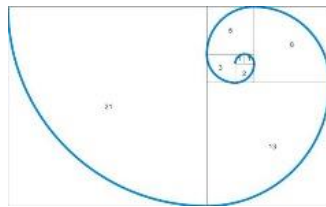
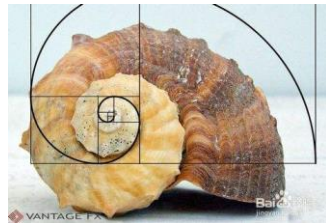
基础数学的价值观

- 数学的内在逻辑
- 简洁与美

驱动力来自于人类对于未知的探索和美的追求

素数表 (100以内的数)

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89	97		



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

三. 计算与数学的共进



应用数学的价值观

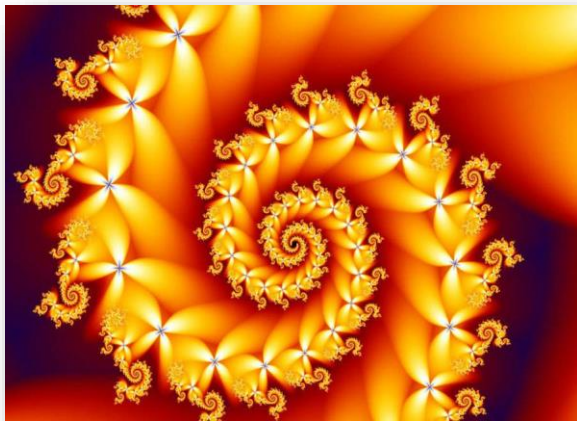
- 简洁与美 (理论)
- 科学意义 (交叉)
- 经济与社会价值 (落地)



与基础数学一样



计算的不同场景



三. 计算与数学的共进

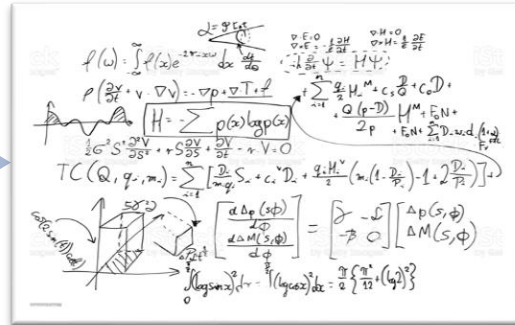


科研与创新的不同范式 (手段)

第一范式: 实验



第二范式: 理论

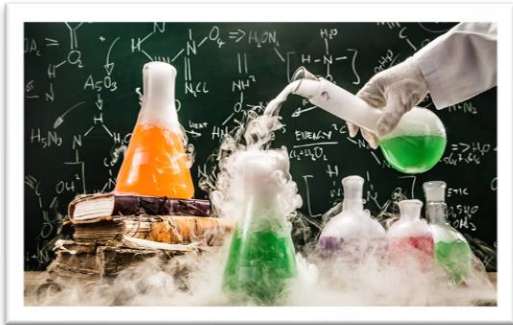


三. 计算与数学的共进

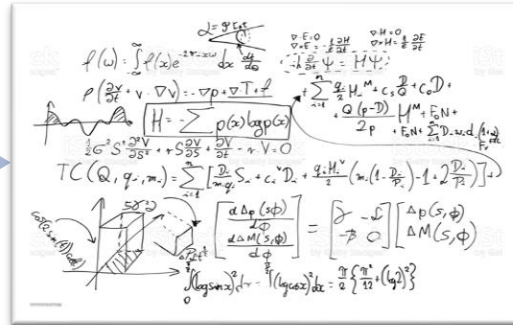


计算已变成**所有**科研和创新的有力手段

第一范式：实验



第二范式：理论

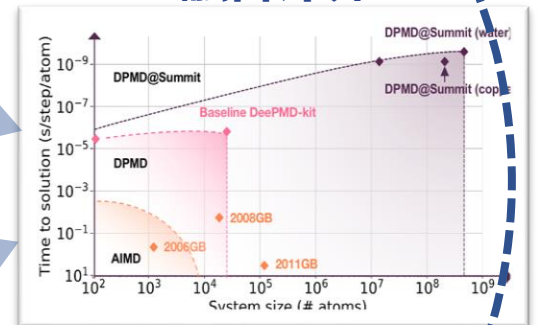


科学计算



计算

机理与数据的融合计算

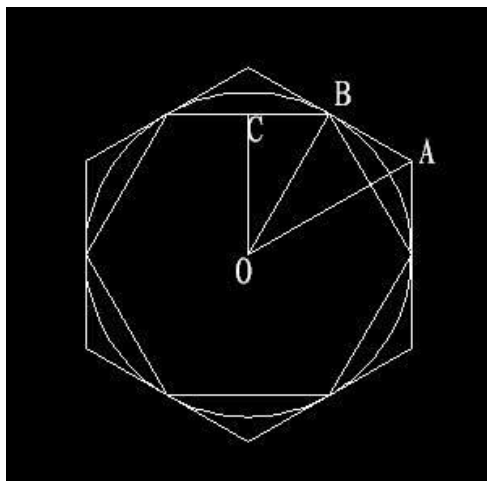


数据



计算与数学的共进 — 案例1: π 的计算

- π 是什么?
 - π 是圆周长和直径的比值, 又叫做圆周率
 - 古人发现圆周率似乎是一个确定值, 那么, **圆周率到底是多少?**



阿基米德从单位圆出发

先用内接正六边形求出圆周率的下界为3

再用外接正六边形并借助勾股定理求出圆周率的上界小于4

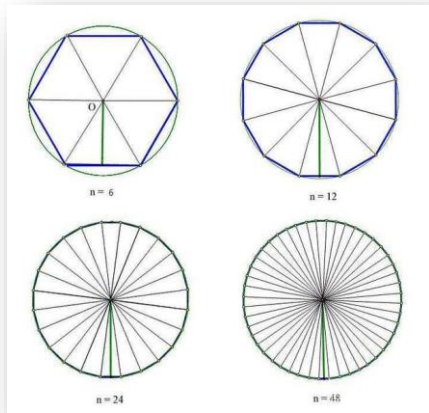
可知 $3 < \pi < 4$

三. 计算与数学的共进



计算与数学的共进 — 案例1: π 的计算

- **计算上**一直在尝试如何准确地计算或逼近 π
- **数学上**证明了 π 是某个确定值, 而且是无理数



南北朝时期的数学家祖冲之计算出圆周率 π 的值
在3.1415926和3.1415927之间



$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 \dots$$

18世纪, 使用泰勒级数
展开来计算 π 的值

可以用几何和分析的不同方法来计算 π
分析的方法明显更快

三. 计算与数学的共进



计算与数学的共进 — 案例1: π 的计算

- **数学上**证明了 π 是超越数
- **计算机**出现之后, π 的计算速度越来越快, 位数越来越多, 计算方法也层出不穷
 - 最近已算到小数点后62.8万亿位

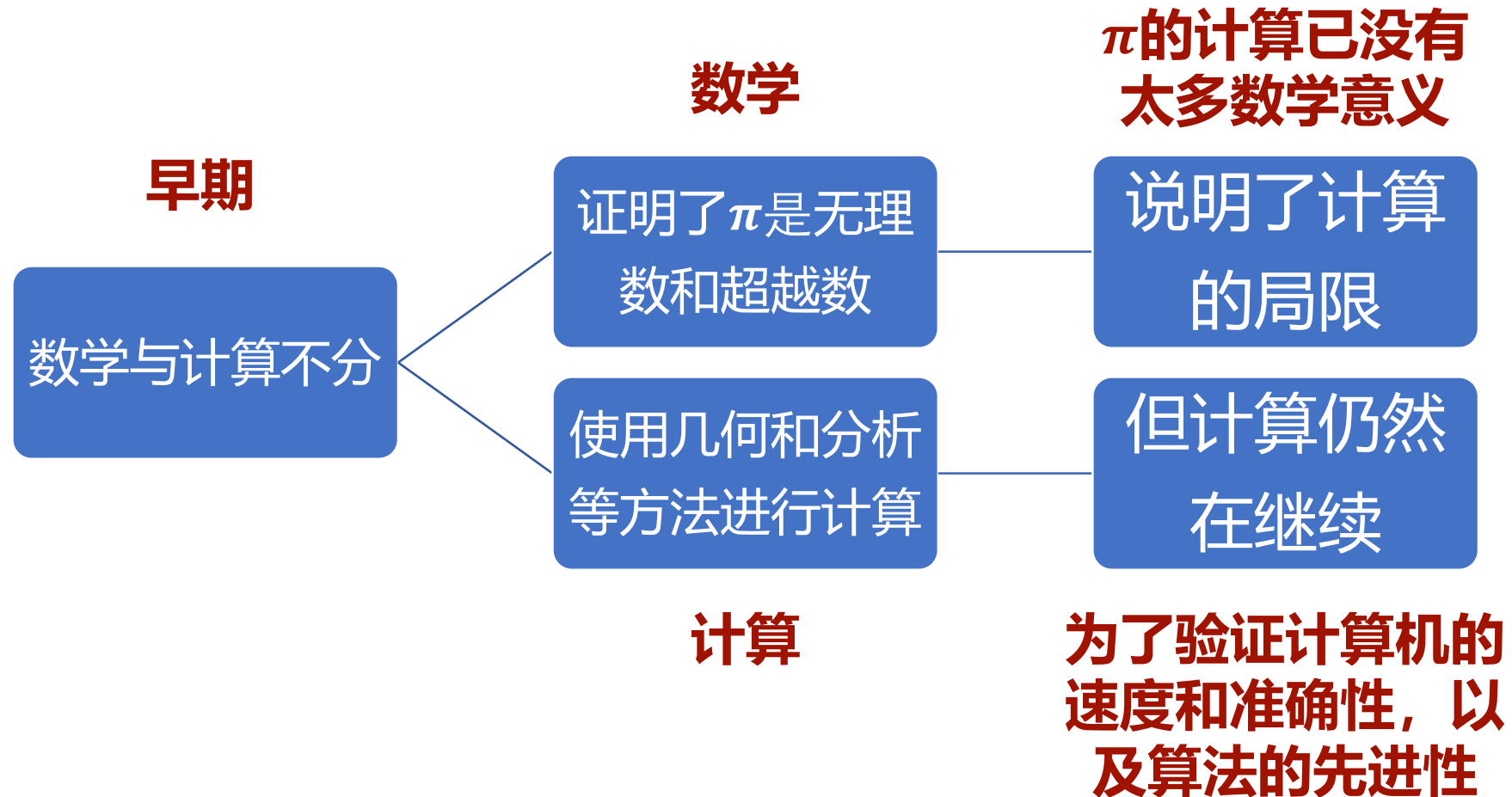
$\pi = 3.1415926535897932$
9502884197169399375105
0781640628620899862803
0821480865132823066470
0821725359408128481117
0821725359408128481117
0821725359408128481117
0821725359408128481117

A large, stylized Greek letter π is shown on the left, followed by an equals sign and the beginning of its decimal expansion. The digits are arranged in a slightly curved, overlapping manner, suggesting a long sequence of numbers.

三. 计算与数学的共进



计算与数学的共进 — 案例1: π 的计算



计算与数学的共进 — 案例2：人工智能的前世今生

- **计算**含义的回顾：1) 谋划考虑；2) 算计
 - 依靠“人脑”这一算力完成上述计算过程，以实现智能
- **人工智能**是什么？
 - 是研究、开发用于模拟、延伸和扩展**人的智能**的理论、方法、技术及应用系统的一门新的**技术科学**

人工智能应用广泛：包括机器人，自动驾驶，指纹识别，专家系统，定理证明，智能控制，博弈，语言和图像理解，遗传编程等



计算与数学的共进 — 案例2：人工智能的前世今生

● 早期的人工智能 (1956-1970)

- 1956年的达特茅斯会议，标志着现代人工智能的兴起
- 主要是**数学家**在研究，采用**数理逻辑**、**规则推导**等手段
- 在机器学习、定理证明、模式识别、问题求解等领域取得突破



达特茅斯会议



达特茅斯七侠

达特茅斯七侠

多数是**数学家**或有**数学**背景：香农、麦卡锡、明斯基、司马贺、罗切斯特、赛弗里奇、
纽厄尔

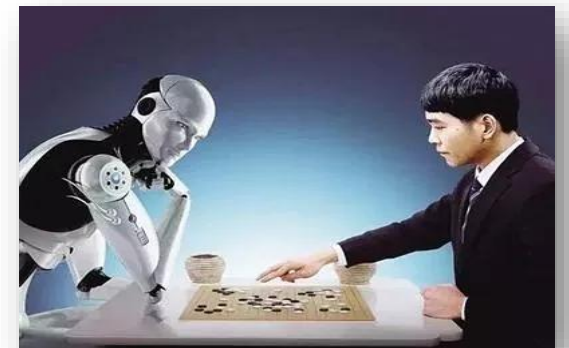
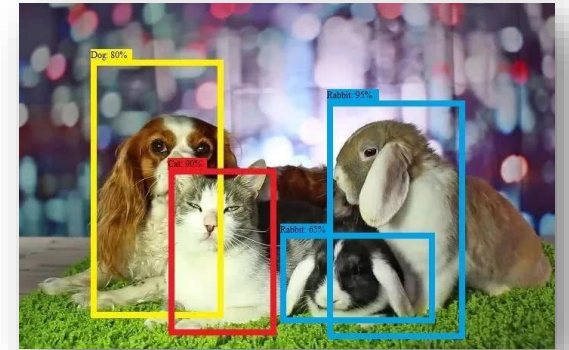
计算与数学的共进 — 案例2：人工智能的前世今生

● 人工智能的低谷 (1970-1990)

- 由于前期手段效果不再，人工智能陷入低谷
- 更多由计算机专家参与，少有**数学家**继续研究

● 人工智能的复兴 (1990-2015)

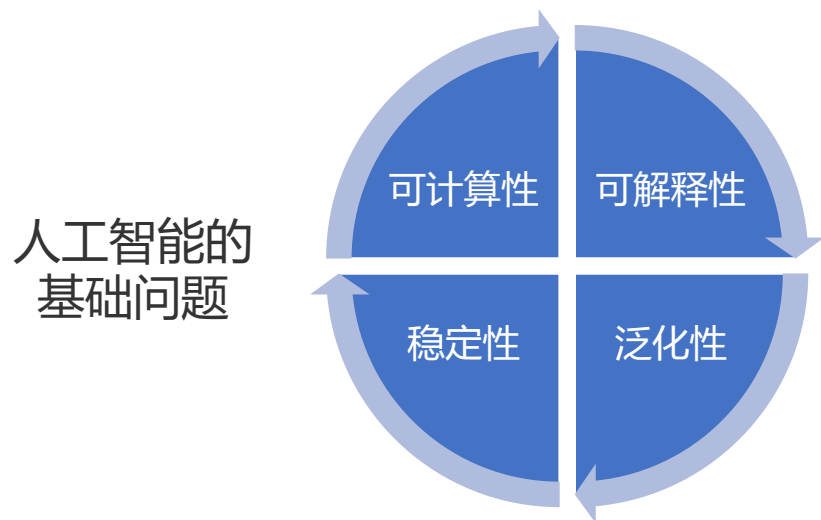
- 随着计算机、互联网技术的发展，人工智能开始复兴
- **统计学家**逐渐加入，深度学习 (**计算**技术) 广泛应用
- 在图像和语音识别、人机对弈、无人驾驶等取得有效突破



计算与数学的共进 — 案例2：人工智能的前世今生

● 人工智能新发展（2015-至今）

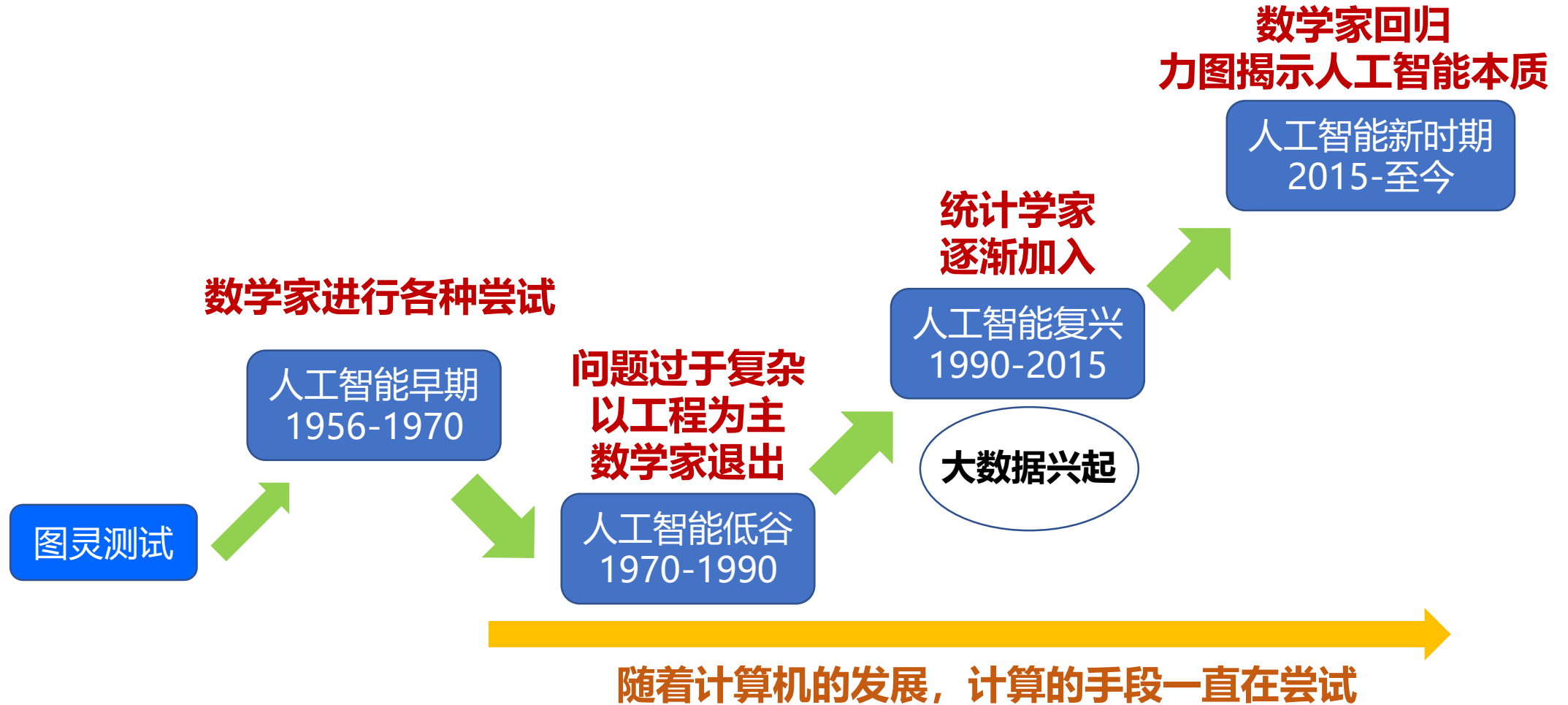
- 尽管人工智能实际效果显著，但内核处于黑盒状态
- 缺乏**数理基础**，难以取得更大进步
- 更多**数学家**进入人工智能领域



三. 计算与数学的共进



计算与数学的共进 — 案例2：人工智能的前世今生



目录

- 一. 计算无处不在
- 二. 计算的要素
- 三. 计算与数学的共进
- 四. 展望未来**

科技
创新
在北大



新的时期更需要数学

- 数字化时代
 - 中美博弈、科技创新
 - 大数据人工智能技术的发展
 - 数字经济、数字政府、数字社会
- 原创性研究愈发受到重视
 - 新一代信息技术中的原创性高度依靠于数学
 - 众多高科技企业（如华为），已发展到这一阶段



数学的地位由此得到极大提升

数学的春天已经到来

- 数学得到了社会各界的空前重视
 - 国务院印发《关于全面加强基础科学研究的若干意见》（2018）
 - 四部委联合发文《关于加强数学科学研究工作方案》（2019）
 - 华为依靠数学研发2G、3G、4G，数学家走上了红地毯
 - 越来越多的学子报考数学相关专业

科技部办公厅 教育部办公厅 中科院办公厅 自然科学基金委办公室印发《关于加强数学科学研究工作方案》的通知

国科办基〔2019〕61号

各有关单位：

为落实《关于全面加强基础科学研究的若干意见》（国发〔2018〕4号）要求，切实加强我国数学科学研究，科技部、教育部、中科院、自然科学基金委联合制定了《关于加强数学科学研究工作方案》。现印发给你们，请结合本单位实际认真落实。

科技部办公厅 教育部办公厅 中科院办公厅

自然科学基金委办公室

2019年7月12日

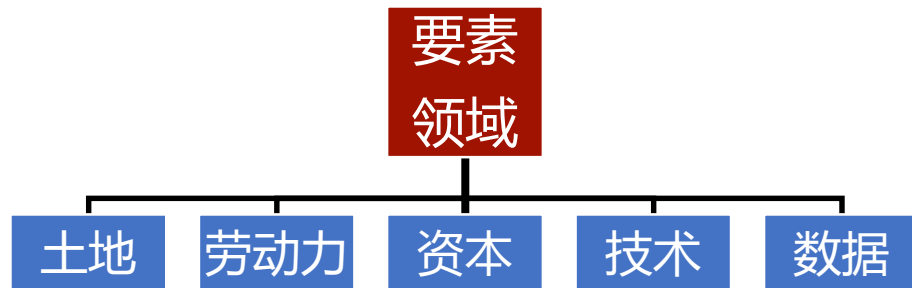
（此件主动公开）



计算要素的变化 — 数据

- 数据已成为重要的生产要素

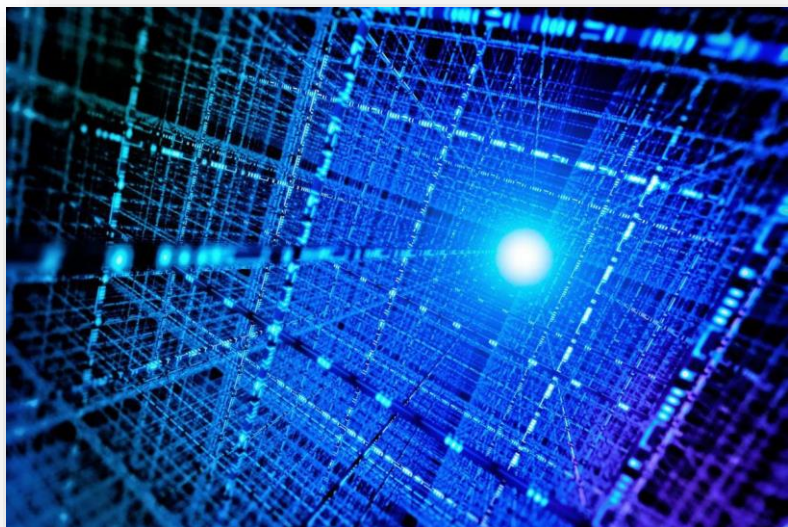
中共中央、国务院
关于构建更加完善的要素市场化配置体制机制的意见
(2020年3月30日)



- 数据已等同于土地、劳动力等其他重要的生产要素

计算要素的变化 — 算力

- 未来是否有更新的计算模式？



量子计算机

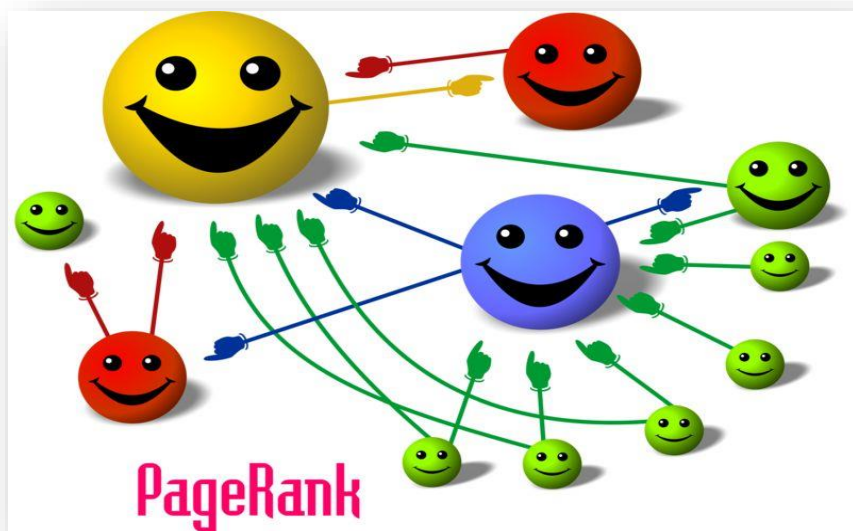


类脑计算机

计算要素的变化 — 算法

- 算法的价值越来越大
- 算法合规性问题得到重视

国家网信办发布《互联网信息服务算法推荐管理规定》（2022年1月4日）



PageRank与Google



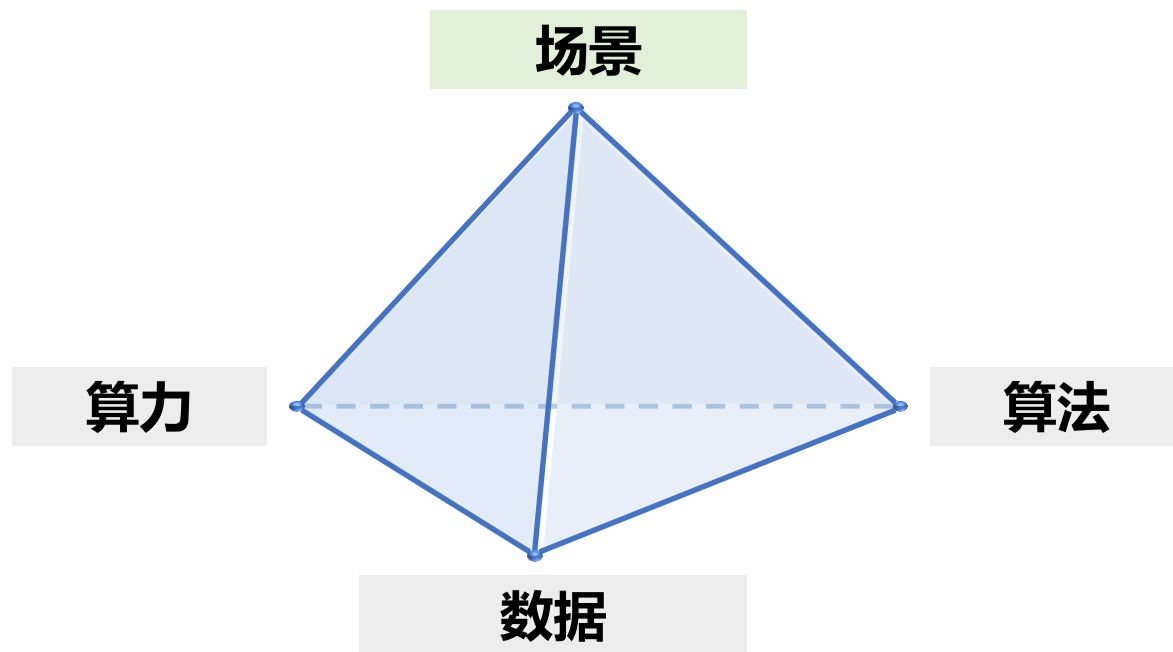
算法中的外卖员

四. 展望未来



计算各要素相互作用增强，形成有机整体

计算四面体



不同要素间相互作用

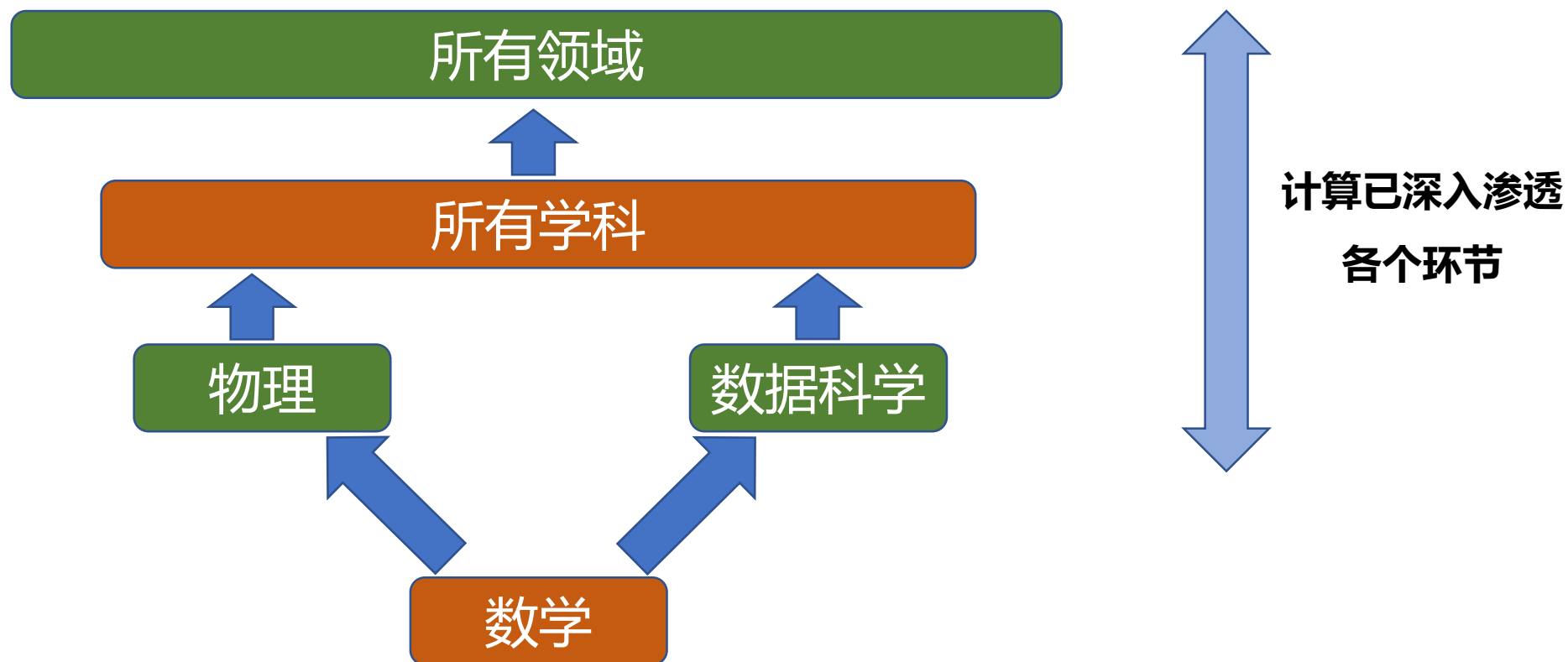
- 算法与算力
- 数据与场景
- 数据与算力
- 算法与数据
- ...

四. 展望未来

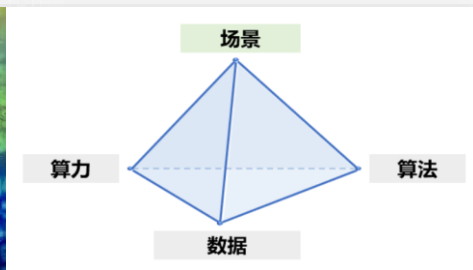


未来：数学为底座，计算为手段

- 计算与数学相互促进，共同发展



- 万物皆数，人类进入数字化时代
- 计算无处不在
- 计算的四大要素融为一体
- 计算与数学共同发展、相互促进
- 数学的春天来了





谢谢各位!