§4 条件概率与乘法公式

先看两个例子。

例 4.1 四个人打桥牌，记

$$A = \text{东家拿到 6 张黑桃,}$$
$$B = \text{西家拿到 3 张黑桃。}$$

对于 $P(A)$, $P(B)$, 这些都是很熟悉的。但是在叫牌的过程中，东家拿到 6 张黑桃后，最关心的是同伴西家手中有几张黑桃。因此，计算一下在 A 发生的前提下，B 发生的概率，更有实际意义。这时西家拿到三张黑桃的概率是

$$C_7^3 C_{32}^{10}/C_{39}^{13}.$$

将它记为 $P(B|A)$, 称为 A 发生的条件下，B 的条件概率。

例 4.2 某家庭有两个小孩，每一个小孩是男孩或女孩的概率相同，则可知

$$P\text{（该家有一男一女）} = 1/2$$

$$P\text{（该家有一男一女|至少有一个女孩）} = 2/3$$

在古典概型中，有下面的基本关系式（设 $P(A) \neq 0$）：

$$P(B|A) = P(AB)/P(A).$$

设 A 发生的有利场合为 $m(A)$, A 发生 B 也发生的有利场合为 $m(AB)$, 则可知

$$P(B|A) = m(AB)/m(B) = P(AB)/P(A).$$

条件概率也是概率，它满足：

(1)$P(\Omega|A) = 1$;

(2)$P(B|A) \geqslant 0$;

(3)B_i 互不相交，i =1，2，$\cdots$，n, 则 $P(\sum_{i=1}^n B_i) = P(A)$;

由条件概率公式变形可以得到下面的乘法公式：

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

由归纳法可以得到下面的更一般的乘法公式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

§5全概公式与逆概公式

1. 全概公式

假设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是样本空间 Ω 的一个分割，即 A_i 两两不相容，$P(A_i)>0$，且 $\sum_{i=1}^n A_i=\Omega$，则对任意的 B，有 $B=\sum_{i=1}^n BA_i$，

$$P(B)=\sum_{i=1}^n P(BA_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

例 5.1 （赌徒破产模型）赌徒参加赌博，一开始他有 x 元赌本，而庄家有 $a-x$ 元赌本，假设每局赌徒赢的概率都为 p，双方开始赌博直到其中一方输光为止，求赌徒最后输光的概率。

解 记

$$A_i=\{\text{赌徒开始有 } i \text{ 元最后输光}\},$$

$$B=\{\text{第一局赌徒赢}\},$$

则由全概公式

$$\begin{aligned} P(A_i) &= P(A_i|B)P(B)+P(A_i|B^c)P(B^c) \\ &= pP(A_{i+1})+qP(A_{i-1}) \end{aligned}$$

其中，$q=1-p$，记 $p_i=P(A_i)$，则有

$$p_i=pp_{i+1}+qp_{i-1},$$

联合 $p_0=1$，$p_a=0$ 可以解得

$$p_x=\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^x-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}, & p\neq\frac{1}{2}; \\ 1-\dfrac{x}{a}, & p=\frac{1}{2} \end{cases}$$

当 $a\gg x$ 时，就算赌局是公平的，即 $p=1/2$，$p_x=1-x/a\approx 1$，赌徒最后也几乎必然要输光。

2. 逆概公式

利用全概公式，我们可以得到下面的逆概公式。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割, 则对任一事件 B, $P(B) > 0$, 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)},\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

艾滋病是一种令人恐惧的病症，而目前为止都是通过医学检查来确定是否感染了艾滋病。但是，医学检查的准确率有多高呢？看看下面的例子。

例 5.2 通过医学检查，艾滋病毒携带者试验结果呈阳性的概率是 0.99，而未携带艾滋病毒的人试验结果呈阳性的概率是 0.01。如果人口总数的 0.001 为艾滋病毒携带者，求一个人在试验结果呈阳性的情况下，实际上是艾滋病携带者的概率。

解 记

$$A = \{艾滋病毒携带者\},$$

$$T = \{试验结果呈阳性\},$$

有 $P(A) = 0.001$，$P(T|A) = 0.99$，$P(T|A^c) = 0.01$。由逆概公式

$$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|A^c)P(A^c)} = 0.09.$$

也就是说，在测试结果为阳性的人当中，只有不到十分之一的人是真正的艾滋病毒携带者。而真正决定检查准确率的，是人群中携带艾滋病毒人数所占的比例，和未携带艾滋病毒的人测试结果为阳性的概率。

§6 独立性

定义 称两个事件 A, B 是相互独立的，如果

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

称为独立, 是因为如果 A, B 相互独立, 就有 $P(B|A) = P(AB)/P(A) = P(B)$，就是说，$A$ 的发生并不影响 B 发生的可能性的大小。

容易看出，Ω, $\emptyset$ 与任何事件都独立。如果 A 与 B 独立，A 与 B^c, A^c 与 B, A^c 与 B^c 都是独立的。

定义 称 A, B, C 是相互独立的，如果有

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(CA) = P(C)P(A), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

类似的，可以定义 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的独立性：

定义 称 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是相互独立的，如果对于任意的自然数 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 以及满足 $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant n$ 的 k 个自然数 i_1，i_2，$\cdots$，i_n 都有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

例 6.2 某型号的高炮命中率为 0.6。现在用若干门炮同时发射（每炮射一发），问要以 0.99 以上的把握击中一架敌机，至少配备几门高炮？

解 设需要 n 门高炮，并记

$$A_i = \text{第 } i \text{ 门高炮击中敌机}，i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$B = \text{敌机被击中。}$$

注意到

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$B^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c,$$

故 n 应满足

$$P(B^c) = P(A_1^cA_2^c\cdots A_n^c) \leqslant 0.01.$$

由于 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是相互独立的，故 A_1^c，A_2^c，$\cdots$，A_n^c 也是相互独立的。所以

$$P(B^c) = P(A_1^cA_2^c\cdots A_n^c) = (1-0.6)^n = 0.4^n \leqslant 0.01,$$

可知 $n \geqslant 5.027$，即至少需要 6 门高炮。

这里要特别指出，两两独立并不能推出相互独立。就三个事件相互独立来说，$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 是不可缺少的，下面就是一个例子。

例 6.1 将一个正方形分为四块，现随机取其中一块，A，B，C 分别表示所取得一块落在左半部分，上半部分，左上和右下，见下图。

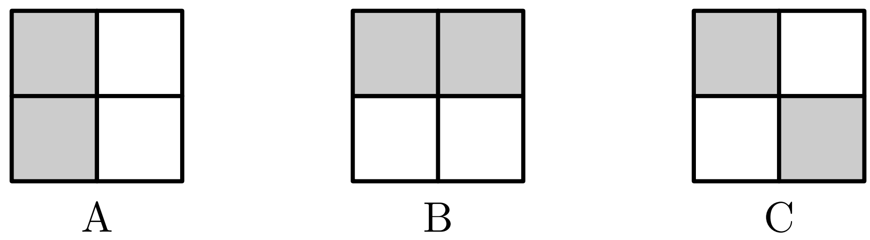

图 1.4

易知

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2,$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = 1/4,$$

但是

$$P(ABC) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8,$$

这说明 A，B，C 是两两独立的，但不是相互独立的。