§3 马尔可夫链及转移概率

定义 设 $X_n(n=0,1,2,\cdots)$ 的值域至多可数（记值域为 I，称为状态空间），如果对任意的 $i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},i,j\in I$，都有

$$P(X_{n+1}|X_n=i,X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})=P(X_{n+1}=j|X_n=i),$$

则称随机序列 $\{X_n;n\geqslant 0\}$ 为一马尔可夫链（简称马氏链）。如果进一步，对任意的 n 都有

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_1=j|X_0=i),$$

则称该马氏链是时齐的。在这里我们只考虑时齐马氏链。

对马氏链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$，定义（一步）转移概率为

$$p_{ij}=P(X_1=j|X_0=i).$$

相应的，$(p_{ij})_{n\times n}$ 称为转移概率阵。

此时，考虑 $\{X_n\}$ 的有限维联合分布

$$\begin{aligned}
&P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)\\
=\ &P(X_0=i_0)P(X_1=i_1|X_0=i_0)P(X_2=i_2|X_1=i_1,X_0=i_0)\\
&\cdots P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0)\\
=\ &P(X_0=i_0)p_{i_0i_1}p_{i_1i_2}\cdots p(i_{n-1}i_n).
\end{aligned}$$

于是，在知道了 $P(X_0=i_0)$ 之后，联合分布就唯一确定了。称 $P(X_0=i_0)$ 为马氏链的初分布。

对转移概率，显然有

(1) $\forall i,j\in I$，$p_{ij}\geqslant 0$;

(2) $\forall i\in I$，$\sum\limits_{j\in I}p_{ij}=1$.

对于马氏连 $\{X_n;n\geqslant\}$，称

$$p_n(ij)=P(X_n=j|X_0=i)$$

为 n 步转移概率，相应的，称 $(p_n(ij))_{n\times n}$ 为 n 步转移阵。

对 n 步转移概率，有下面的 K-C 方程：

$$p_n(ij)=\sum_{k\in I}p_m(ik)p_{n-m}(kj),\quad \forall 1\leqslant m\leqslant n-1.$$

证 对 X_m 的状态进行分解

$$\begin{aligned}
p_n(ij) &= P(X_n=j|X_0=i)\\
&= \sum_{k\in I}P(X_n=j,X_m=k|X_0=i)\\
&= \sum_{k\in I}P(X_m=k|X_0=i)P(X_n=j|X_m=k,X_0=i)\\
&= \sum_{k\in I}P(X_m=k|X_0=i)P(X_n=j|X_m=k)\\
&= \sum_{k\in I}p_m(ik)p_{n-m}(kj).
\end{aligned}$$

容易证明，n 步转移概率也是时齐的。由上面的 K-C 方程可知

$$(p_n(ij))=(p_{ij})^n.$$

下面给出几个马氏链的例子。

例 3.1 $I=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ 是全体整数集合，转移概率

$$p_{ij}=\begin{cases}p, & j=i+1,\\ q, & j=i-1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

这就是直线上的无限制随机游动，其转移阵为

$$P=\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&q&0&p&0&0&\cdots\\ \cdots&0&q&0&p&0&\cdots\\ \cdots&0&0&q&0&p&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}.$$

例 3.2 $I=\{0,1,\cdots,c\}$，$c\geqslant 2$。对 $1\leqslant i\leqslant c-1$，$p_{ij}$ 与上例中相同，而

$$p_{00}=p_{cc}=1.$$

这是具有两个吸收壁 0 和 c 的随机游动，其转移阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3.3 将上例中 $p_{00}=p_{cc}=1$ 换成 $p_{01}=p_{c(c-1)}=1$，得到的是有两个反射壁的随机游动。当质点走到区间 $[0,c]$ 两端的时候，下一步一定被反射回来。其转移阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 3.4 $Ehrenfest$ 模型。设 $\{X_n;n\geqslant 0\}$ 是一马氏链，$I=\{0,1,\cdots\}$，而对 $i\in I$，有

$$p_{i(i+1)}=\frac{c-i}{c},\quad p_{i(i-1)}=\frac{i}{c}.$$

它可以用一个摸球的模型来实现：一个密封容器中装有 c 个球（白色的或者黑色的），随机的从中取一个球，并换成另一种颜色的球放回。则容器中的白球数就是上面的 X_n。

对于 n 步转移概率阵 $P(n)$，一般通过将 P 转化为 $Jordan$ 标准型来求。

§4 平稳分布

对于马氏链 $\{X_n;n\geqslant 0\}$，设其转移概率阵为 $P=(p_{ij})_{n\times n}$，在给定初始分布即 X_0 的分布后，X_n 的分布也就确定了。具体地说，由全概公式，记 X_n

的分布列向量为 μ_n，则

$$\mu_{n+1}^{'} = \mu_n^{'} P,$$

于是就有

$$\mu_n^{'} = \mu_0^{'} P^n.$$

定义 称分布列 $\mu = (p_i)_{i\in I}$ 为马氏链 $\{X_n; n \geqslant 0\}$ 的不变分布列，如果以它为初始分布时，$X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 同分布。

容易看出，μ 为不变分布列的充要条件是它满足下面的方程：

$$\mu^{'} = \mu^{'} P.$$

对于一般的马氏链，直接利用转移阵就可以解出它的不变分布。下面介绍一种特殊的马氏链，可逆马氏链。

定义 一个马氏链 $\{X_n; n \geqslant 0\}$ 称为可逆的，如果存在分布 $\pi = \{\pi_i\}_{i\in I}$，使得

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad \forall i, j \in I.$$

此时，称分布 π 为该马氏链的可逆分布。

容易求出，可逆分布是平稳分布。

对于可逆马氏链，可以如下求出可逆分布，也就是平稳分布：

适当给状态标号，使得 $p_{n(n+1)} > 0$（这一般是可以做到的）。取 $\mu_0 = 1$，然后如下递归：

$$\mu_{n+1} = \mu_n \frac{p_{n(n+1)}}{p_{(n+1)n}},$$

记 $\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu_n$，则可逆分布为

$$\pi_n = \frac{\mu_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu_n} = \frac{\mu_n}{\mu}.$$

例 4.1 考虑有两个反射壁的对称随机游动（参见上节例 3.3），此时有 $p = q = 1/2$。

取 $\mu_0 = 1$，则

$$\mu_1 = \mu_0 \frac{p_{01}}{p_{10}} = 2\mu_0 = 2, \quad \mu_n = \mu_{n-1} \frac{p_{(n-1)n}}{p_{n(n-1)}} = \frac{1}{2}\mu_{n-1}.$$

而当 $1 \leqslant i < n-1$ 时，有

$$\mu_{i+1} = \mu_i \frac{p_{i(i+1)}}{p_{(i+1)i}} = \mu_i = \mu_1 = 2.$$

于是有 $\mu_n = \dfrac{1}{2}\mu_{n-1} = 1$，$\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = 2n$。
故 $\pi_0 = \pi_n = \dfrac{1}{2n}$，$\pi_i = \dfrac{1}{n}$，$i = 1, \cdots, i-1$。
可以验证，$\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n)$ 是马氏链的可逆分布。