第七章　利率风险分析

问题的提出：

前面讨论的基本假设：利率水平固定
在现实的金融市场中：利率是随时间变化的

相应的研究：

- 研究利率本身的变化规律
- 研究受利率影响的金融产品和市场的变化规律

§7.1 一般分析

各个国家在不同时期的利率水平变化很大：

在 1945 年美国的政府债券的平均收益率仅为 0.33%，而到了 1981 年同样的债券的同期收益率为 14.7%。即使在 1980 年，8 月份的优惠利率（prime rate，指大商业银行对一些资信良好的大企业短期贷款的利率，也是商业银行贷款的最低利率）亦有 11%，到 12 月份为 21.5%。

中国自 1980 年至 2000 年的二十年间利率在水平和结构上都有很大的变化。

1980-2000 年中国的储蓄利率变化情况

	3 月期	6 月期	1 年期	2 年期	3 年期	5 年期	8 年期
1980 -4 -1		4.37	5.76		6.42	6.90	7.01
1982 -4 -1		4.37	6.84		7.36	7.17	7.01
1985 -4 -1		5.47	6.84		7.36	7.17	7.01
1985 -8 -1		6.21	7.2		7.68	7.98	7.88
1988 -9 -1		6.58	8.64	8.79	8.90	9.02	9.01
1989 -2 -1	7.78	9.20	11.34	11.57	11.71	11.80	11.63
1990 -4 -15	6.45	7.89	10.08	10.44	10.70	10.99	10.95
1990 -8 -21	4.39	6.58	8.64	8.96	9.21	9.52	9.68

1991 -4 -21	3.28	5.47	7.56	7.63	7.68	7.71	7.67
1993 -5 -15	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.90	10.15
1993 -7 -11	6.83	9.20	10.98	11.09	10.99	11.10	11.38
1996 -5 -1	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.90	
1996 -8 -23	3.37	5.47	7.47	7.63	7.68	7.71	
1997 -10-23	2.91	4.18	5.67	5.77	5.86	5.92	
1998 -3 -25	2.91	4.18	5.22	5.43	5.86	5.92	
1998 -7 -1	2.82	4.00	4.77	4.75	4.72	4.75	
1998 -12 -7	2.82	3.36	3.78	3.88	3.98	4.14	
1999 -6 -10	1.99	2.17	2.25	2.40	2.63	2.73	
2002 -2 -21		1.899	1.980	2.225	2.459	2.646	

用基本的经济学原理分析：

利率水平从某种意义上讲是一种价格，应该由供求平衡来决定它的值：

——如果借款的需求很大，利率将上升

——如果借款的需求较小，利率将下降

影响利率水平的一些因素：

1) 内在“纯利率”

许多经济学者和金融理论家都认为存在一个内在的纯利率，它与长期的经济发展水平有关。

如果不考虑通货膨胀因素，这个利率将代表无风险投资的收益率。

实证研究表明：这种利率会稳定很长时间。例如：美国 20 世纪的几十年间，这个利率一直介于 2%和 3%之间。

2）通货膨胀率（见下面的讨论）

3）风险和不确定性（见下面的讨论）

4）投资期限（短期与长期的区别）

5）信息量（市场的“无效”）

6）法律的约束

有时政府会对利率水平作一些限制，在美国近几年有放松管制的趋势，所以这种因素的影响较过去已降低许多。但是，某些利率仍然受到法规的限制。

7）政府的政策

美国联邦政府通过实施货币政策和财政政策对总体的利率水平产生影响，甚至是控制。

基本的控制手段是：美联储对货币供应量的调整。

同时，政府的赤字或盈余也对信贷市场的需求产生重要影响。

8）随机波动

在实际业务中常用的表示利率变动的术语：

1）**基点**（basis point）

——计算利率变动的计量单位，一百个基点表示 1%

例：利率从 9%上涨到 9.25%，则称利率上涨了 25 个基点。

2）**利差**（spread）

——用于比较两种利率的差，在投资问题中常以国债的收益率做为比较的基础

例：如果一年期国债的收益利率为 8.25%，另外有一种金融产品的收益利率为 9.50%，则称“对一年期国债的利差为 125 个基点”。

通货膨胀与利率

通货膨胀率表示购买能力因时间的推移而造成的损失

金融市场的公布利率与通货膨胀率通常是正相关的

贷款人至少要通过利率以补偿其在资本购买力上的损失

市场中的现行利率被称为**名义利率**（nominal rate of interest），用 i 表示。市场中的现行利率扣除了通货膨胀率后的部分为**实际利率**（real rate of interest），用 i'表示

如果r表示同期的通货膨胀率，则有以下关系

$$1+i=(1+i')(1+r)$$

从而有

$$i=i'+r+i'r$$

即：名义利率等于实际利率与通货膨胀率及两者的乘积之和。

因为一般情况下利率均为较小的数值，所以可将乘积项 $i'r$ 省略，进而得到常见的结论：名义利率为实际利率与通货膨胀率之和

$$i=i'+r$$

结论：当在一定的时期内实际利率的水平变化不大时，市场上的名义利率的变化与通货膨胀率的变化是同步的。

另外，可以通过名义利率反解出实际利率i'

$$1+i' = \frac{1+i}{1+r} \quad \text{或} \quad i' = \frac{i-r}{1+r}$$

注：固定利率债券的通货膨胀风险也称为购买力风险，比如投资者购买了一种息票利率为 7%的债券，而通货膨胀率为 8%，则现金流的购买力实际上已经下降了。浮动利率债券的通货膨胀风险较低。

考虑通货膨胀情况下的利息计算：

1）现值的计算

考虑n期期末年金的现值，年金的金额随着通货膨胀率同步递增，即：

首次付款用 $R(1+r)$表示，以后每次付款为上一期的$(1+r)$倍

注：在 0 时刻的现金量应为 R

以名义利率 i 计算的现值公式为

$$R[(1+r)v+(1+r)^2v^2+\cdots+(1+r)^nv^n]$$

$$=R(1+r)\frac{1-(\frac{1+r}{1+i})^{n}}{i-r}$$

如果用i'表示上式，则应有

$$R[(1+i')^{-1}+(1+i')^{-2}+\ \cdots\ +(1+i')^{-n}]=\ Ra_{\overline{n}|i'}$$

2）终值的计算

例：某投资者以利率 i 投资 A 元，n 期，则到期时的收益为

$$A(1+i)^{n}$$

如果考虑通货膨胀因素，这笔投资在到期时的实际收益为：

$$A\frac{(1+i)^n}{(1+r)^n}= \quad A(1+i')^n$$

因此，必须区别名义投资收益和实际投资收益。

例：某保险公司在人身意外伤害保险的赔付条款中采用了年金赔付方式：首次赔付 24,000 元，余额按 10 年期末年金方式赔付，从第一次年金赔付开始赔付金额按照零售物价指数 5%逐年递增，同期市场年利率 8%，计算：年金赔付责任的现值。

解： 已知 $i=0.08$ $r=0.05$

从而有实际利率

$$i' = (0.08 - 0.05)/(1+0.05) = 0.028571$$

从而年金赔付的现值应为

$$24{,}000(1.05)\frac{1-\left(\frac{1.05}{1.08}\right)^{10}}{.08-.05}$$

$$= 24{,}000 a_{\overline{10|}\,.028571} = 206{,}226.00$$

所以该保单的合计赔付金额（现值）应为

$$24{,}000+206{,}226.00 = 230{,}226.00$$

风险、不确定性与利率

问题的提出：

在前面的所有讨论中，都假定未来的现金流的金额和时间是确定的

但是在现实情况中，通常存在发生时间和数量不确定的现金流

例如：简单的标准借贷业务，也存在以下这些风险：不能按期支付、提前支付或是对抵押贷款的再融资风险、再投资利率变化的风险和早赎的风险等。

两种影响投资的市场价值的主要风险：

- ❖ **市场风险**：金融市场的变化（表现为不同的到期收益率）引起现金流价值的变化
- ❖ **信用风险**（credit risk）：金融产品本身的风险行为

例如：考虑 A 和 B 两种溢价债券，有相同的息票收入、兑现值和到期日。A 是由政府财政部发行的国债；B 是一种高风险的企业债券。

分析：

两种债券的市场风险是相同的；

但是，从产品本身的内在风险因素考虑，B 的不确定性比 A 大，从而 B 在市场中的售价应低于 A，即 B 的到期收益率应高于 A。

注：如果在评估有风险的债券的价值时，仍然用收益率作为评估的方法，则这种收益率的计算将因为不确定性的存在比无风险情形的收益率计算复杂得多。

为了区别是否为有风险的债券，在一般的市场中都会确定或假设存在一个无风险收益率（risk-free return rate 或 default-free rate），这个收益水平是指在任何情况下都确定的投融资水平。

例：市场的无风险投资的收益率为 8%

现有一年期面值 1000 元的债券，年息率 8%，到期按照面值兑现，现按面值出售。

另有一种债券，是一个处于成长期的企业发行的，面值 1000 元、年息率 8%，到期兑现本金是有条件的：

如果企业运行良好，则按照面值兑现，否则只支付息票，不兑现本金。

已知后一种企业债券的市场售价为 940 元。

试评估后一种债券的收益率。

注：这里 60 元的差价是考虑后一种债券存在的违约风险后对购买者的风险补偿。

解：如果按以前的方法直接计算后一种债券的年收益率，则有

$$940 = 1080(1+i)^{-1}$$

由此可得

$$i = 14.89\%$$

分析：14.89%表示一种风险投资的收益率，看上去比无风险债券的收益率高出 6.89%。但是，这种“高收益”是不确定的。

风险报酬 / 风险溢价（risk premium）

——实际收益率与无风险收益率的差

分析：例中的 6.89%为风险报酬。一般的，投资风险越大则风险报酬越高。

思考：投资该种债券真的有如此高的收益率吗？投资者是否都只投资该风险债券而不投资收益率较低的无风险债券？

分析：并不是这样的，因为上述 14.89%的收益率只是代表不违约情况下的最高收益率！

如果发生全额（本金和息票）违约，则投资者的收益率为 -100%（940 元的投资全部损失）；

如果发生部分违约（本金或息票），收益率将介于

-100%与 14.89%之间；

即使不违约，但企业运营不好的时候，收益率也只有

$$940 = 80(1+i)^{-1}$$

由此可得

$$i = -91.49\%$$

结论：可以认为 940 元的买价即包括了预期收益率的成分，也包括了对未来违约风险的估计，即：

买价是对未来收益现值的预期结果

用概率论的语言对问题的描述

设未来收益的现值用随机变量 X 表示，并且假设 X 仅有两种可能的取值：

$\mathbf{1080}(1.08)^{-1}$（不发生违约），概率为 p

$\mathbf{0}$（全部违约），概率为 $1-p$

从而 X 的数学期望为

$$p\,\mathbf{(1080)}(1.08)^{-1}$$

假设债券的买价为未来收益现值的数学期望，则有

$$\mathbf{940} = p\,\mathbf{(1080)}(1.08)^{-1}$$

由此可得概率 $p = 0.94$。

注：没有任何收益的风险概率为 6%！

在风险概率 6%下，该债券的期望收益率与市场上的无风险利率相等，即有

$$14.89\% \times 0.94 + (-100\%) \times 0.06 = 8\%$$

这表明，存在无风险利率 8%的投资条件下，投资于违约风险 6%的投资是不一定合算的

注：与投资者对风险的偏好有关

例：假设在上例中，该企业债券不存在违约的情形，试分析该企业因运营不好而不偿还本金的风险概率。

解：设未来收益的现值用随机变量X表示，则可假设X仅有两种可能的取值：

$1080(1.08)^{-1}$（偿还本金），概率为p

$80(1.08)^{-1}$（不偿还本金），概率为$1-p$

从而X的数学期望为

$$p(1080)(1.08)^{-1} + (1-p)(80)(1.08)^{-1}$$

假设债券的买价为未来收益现值的数学期望，则有

$$940 = p(1080)(1.08)^{-1} + (1-p)(80)(1.08)^{-1}$$

由此可得：$p=0.9352$

从而该企业不偿还本金的风险概率为 $1-p=0.0648$

更一般情形的讨论：

设在时刻 1, 2,…, n 预计收益现金流为 R_1，R_2, …,R_n

实际（随机）现金流为 X_1,X_2,…, X_n（不是现值），并且假设 X_t 的取值仅为 R_t 或 0

能够正常得到这些收益的概率（互相独立）分别为：p_1，p_2,…,p_n，其中 p_t 表示可以得到收益 R_t 的

$$p_t = \Pr(X_t = R_t) = 1 - \Pr(X_t = 0)，\quad t = 1, 2, \ldots, n$$

如果市场的无风险利率为i，则这组收益的现值的数学期望为

$$\mathbf{EPV} = \sum_1^n R_t (1+i)^{-t} p_t$$

对应的风险投资收益率为满足下面方程的解 i_p

$$\sum_1^n R_t (1+i)^{-t} p_t = \sum_1^n R_t (1+i_p)^{-t}$$

注：显然有 $i_p > i$

结论：如果概率 $p_t = p^t (t=1,2,...,n)$，则有

$$\text{EPV}=\sum_1^n R_t(\frac{p}{1+i})^t = \sum_1^n R_t(v_{p,i})^t$$

其中 $v_{p,i}$ 为经过某种修正后的新的贴现因子：

$$v_{p,i} = \frac{p}{(1+i)} < v = \frac{1}{(1+i)}$$

结论：在概率 $p_t = p^t (t=1,2,...,n)$ 条件下，对应的风险溢价为

$$\frac{1-p}{p}(1+i)$$

证明：将$v_{p,i}$看作是贴现因子，则对应的新的收益率为

$$i^p=\frac{1}{v_{p,i}}-1=\frac{1+i}{p}-1=\frac{i}{p}+\frac{1-p}{p}>i$$

从而可得风险溢价为

$$i^p-i=\frac{i}{p}+\frac{1-p}{p}-i=\frac{1-p}{p}(1+i)$$

注：在无风险利率水平固定时，风险溢价水平随风险程度的下降（p上升）而下降，直至为零。

给定风险溢价水平，由上述公式可以反解出单位时间的风险不发生概率为

$$p = \frac{1+i}{\text{溢价}+(1+i)}$$

例：已知两年期无风险年实利率为 2.40%

1）现有如下两年期的公司债券：第一年底息票收入不发生违约的概率为 95%；无论第一年是否违约，第二年底息票与本金收入不发生违约的概率为 90.25%。计算该公司债券的风险溢价。

2）若已知上述产品的风险溢价为 8%，第一年底息票收入不发生违约的概率为 p；无论第一年是否违约，第二年底息票与本金收入不发生违约的概率为 p^2，计算 p。

解：

1）由风险溢价公式可得

$$\text{风险溢价} = \frac{1-95\%}{95\%}(1+2.40\%) = 5.39\%$$

所以该公司债券的风险收益率为

$$2.40\% + 5.39\% = 7.79\%$$

2）由风险不发生概率公式可得

$$p = \frac{1+2.4\%}{8\% + (1+2.40\%)} = 92.75\%$$

$$p^2 = 86.03\%$$

即

若该公司债券按照 10.40%的风险收益率出售，则意味着：

第一年底息票收入不发生违约的概率为 97.25%

第二年底息票与本金收入不发生违约的概率为 86.03%

§7.2 利率期限结构

利率的期限结构（**term structure of interest rates**）——因投资期限的不同而造成的投资到期收益率的变化结构

研究背景：

- ❖ 在金融市场中，不同的投资期限对应不同的收益水平
- ❖ 在每个交易时期都会存在一组市场利率，表示不同投资期限对应的利率
- ❖ 一般情况下，这些利率具有随投资期限增加而逐渐上升的趋势

大多数债券市场发达的资本市场是以国债或信用等级最高的债券的收益率作为市场无风险利率（或简称利率）的代表。

国内通常选用国债的收益率来研究利率期限结构。

注☞ 下面以国内银行的储蓄利率数据来分析利率期限结构

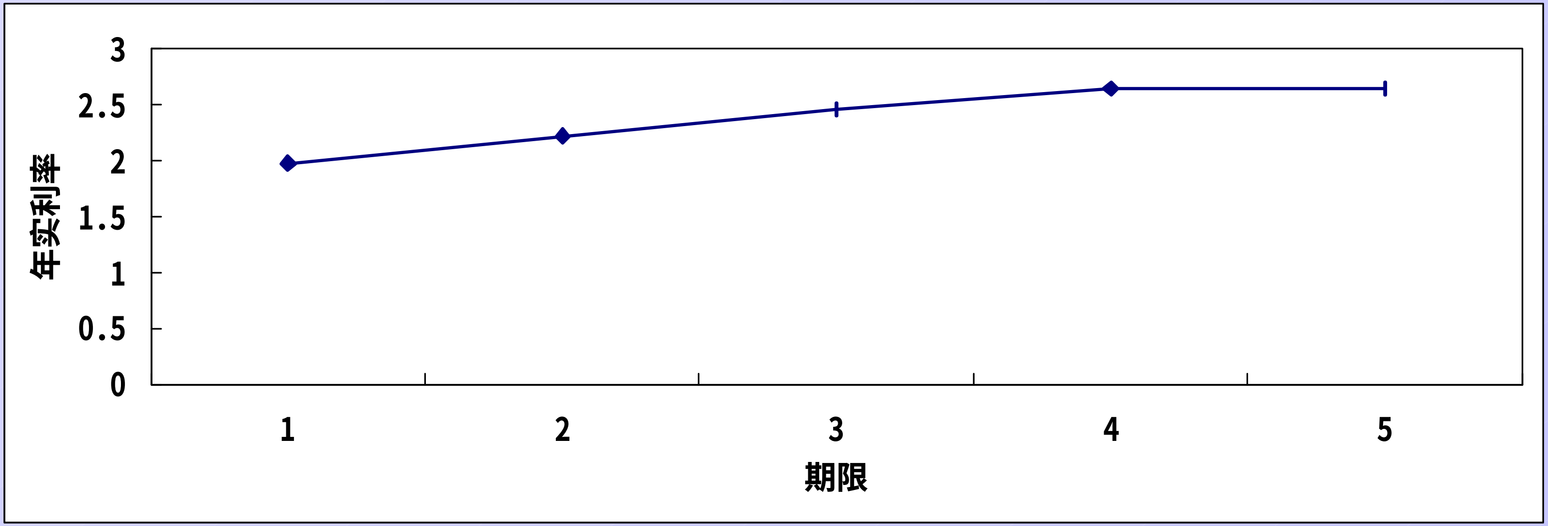
1）在固定时点的利率模型

表 7.1 为中国人民银行公布的定期储蓄利率表。

在每次公布的利率表中，不同的存款期限有不同的年利率，即年利率水平与投资期限有关。

表 7.1　人民币存款整存整取年利率表
(2002 年 2 月 21 日起执行)

期限（年）	0.5	1	2	3	5
公布年利率（%）	1.89	1.98	2.25	2.52	2.79
年实利率（%）	1.899	1.980	2.225	2.459	2.646



2）利率的整体期限结构

不同时期公布的利率表在整体上具有一种结构或趋势，表 7.2 为 1980-2000 年中国的储蓄利率变化情况。

表 7.2　1980-2002 年实际年利率表

	3 月期	6 月期	1 年期	2 年期	3 年期	5 年期	8 年期
1980 -4 -1		4.37	5.76		6.42	6.90	7.01
1982 -4 -1		4.37	6.84		7.36	7.17	7.01
1985 -4 -1		5.47	6.84		7.36	7.17	7.01
1985 -8 -1		6.21	7.2		7.68	7.98	7.88

1988 -9 -1		6.58	8.64	8.79	8.90	9.02	9.01
1989 -2 -1	7.78	9.20	11.34	11.57	11.71	11.80	11.63
1990 -4 -15	6.45	7.89	10.08	10.44	10.70	10.99	10.95
1990 -8 -21	4.39	6.58	8.64	8.96	9.21	9.52	9.68
1991 -4 -21	3.28	5.47	7.56	7.63	7.68	7.71	7.67
1993 -5 -15	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.90	10.15
1993 -7 -11	6.83	9.20	10.98	11.09	10.99	11.10	11.38
1996 -5 -1	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.90	
1996 -8 -23	3.37	5.47	7.47	7.63	7.68	7.71	
1997 -10-23	2.91	4.18	5.67	5.77	5.86	5.92	

1998 -3 -25	2.91	4.18	5.22	5.43	5.86	5.92	
1998 -7 -1	2.82	4.00	4.77	4.75	4.72	4.75	
1998 -12 -7	2.82	3.36	3.78	3.88	3.98	4.14	
1999 -6 -10	1.99	2.17	2.25	2.40	2.63	2.73	
2002 -2 -21		1.899	1.980	2.225	2.459	2.646	

注☞ 在相同的投资期限条件下，不同年份的利率水平也有变化。

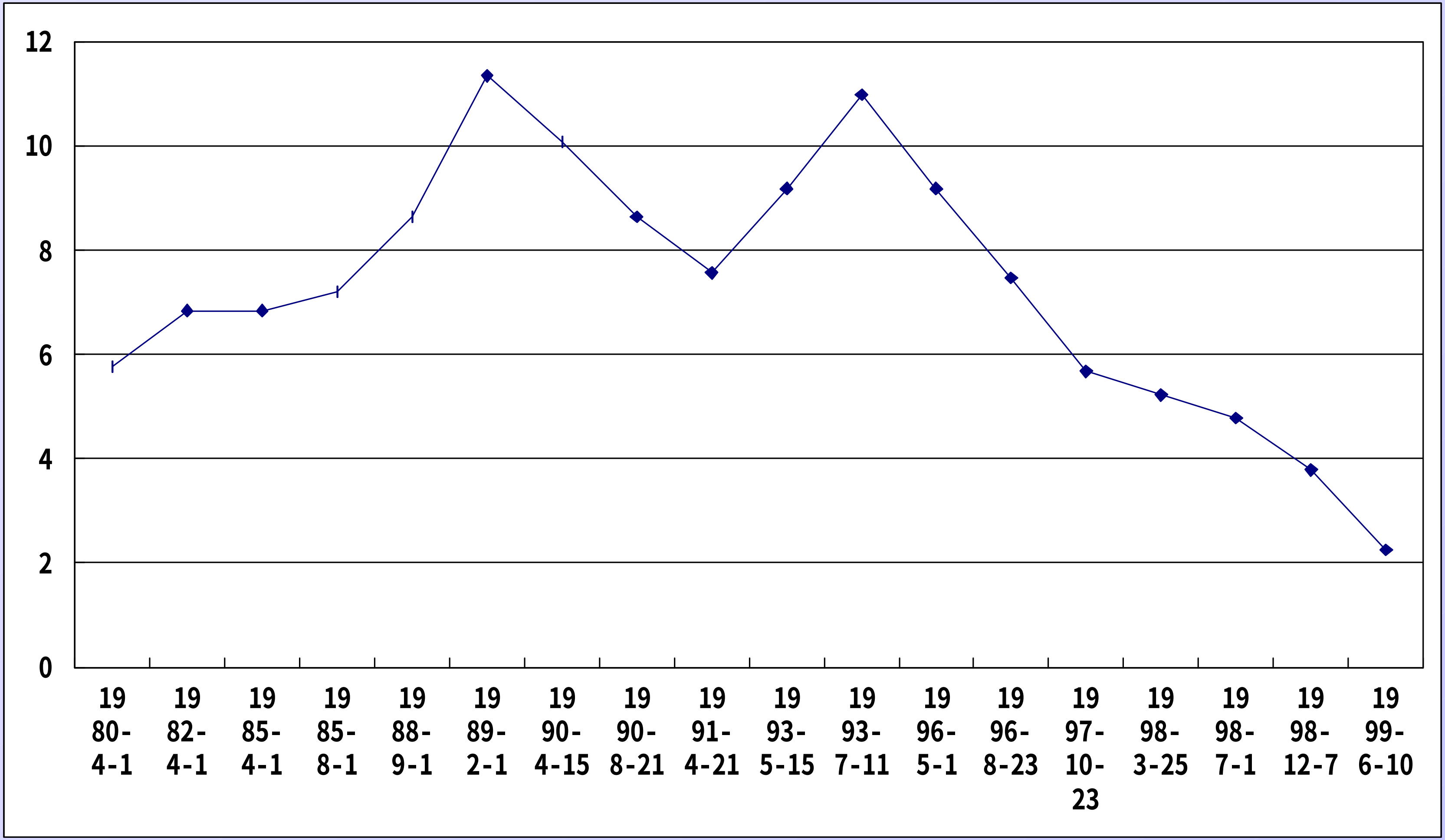


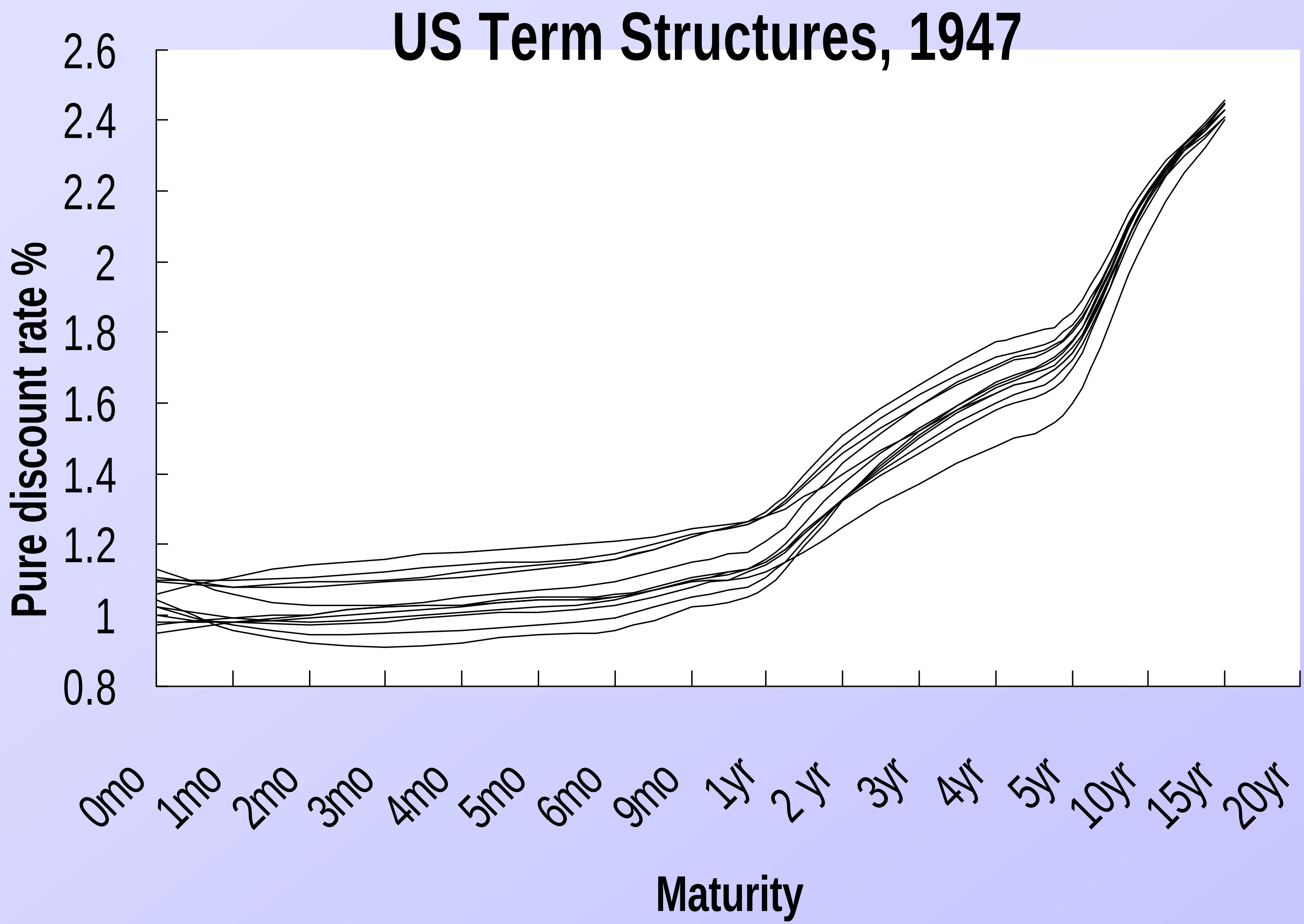
图 7.2 为各个年份的 1 年期储蓄的利率水平的变化趋

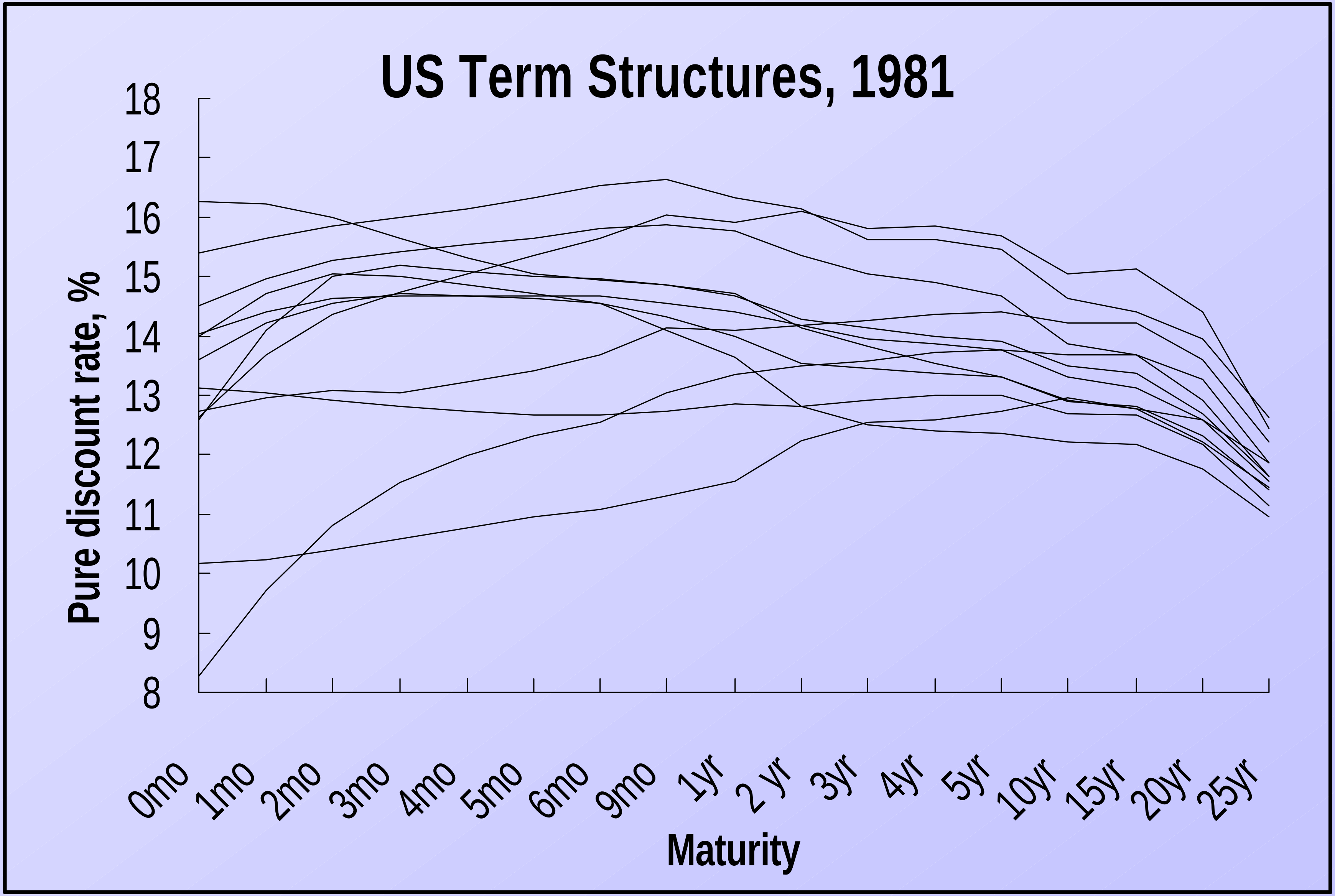
收益率曲线（yield curves）——将利率用投资期限表示的曲线

在自由竞争的市场中也会出现短期利率超过长期利率的情形，称为“颠倒的利率曲线”（inverted）。如美国在八十年代初期的利率曲线就是颠倒的。

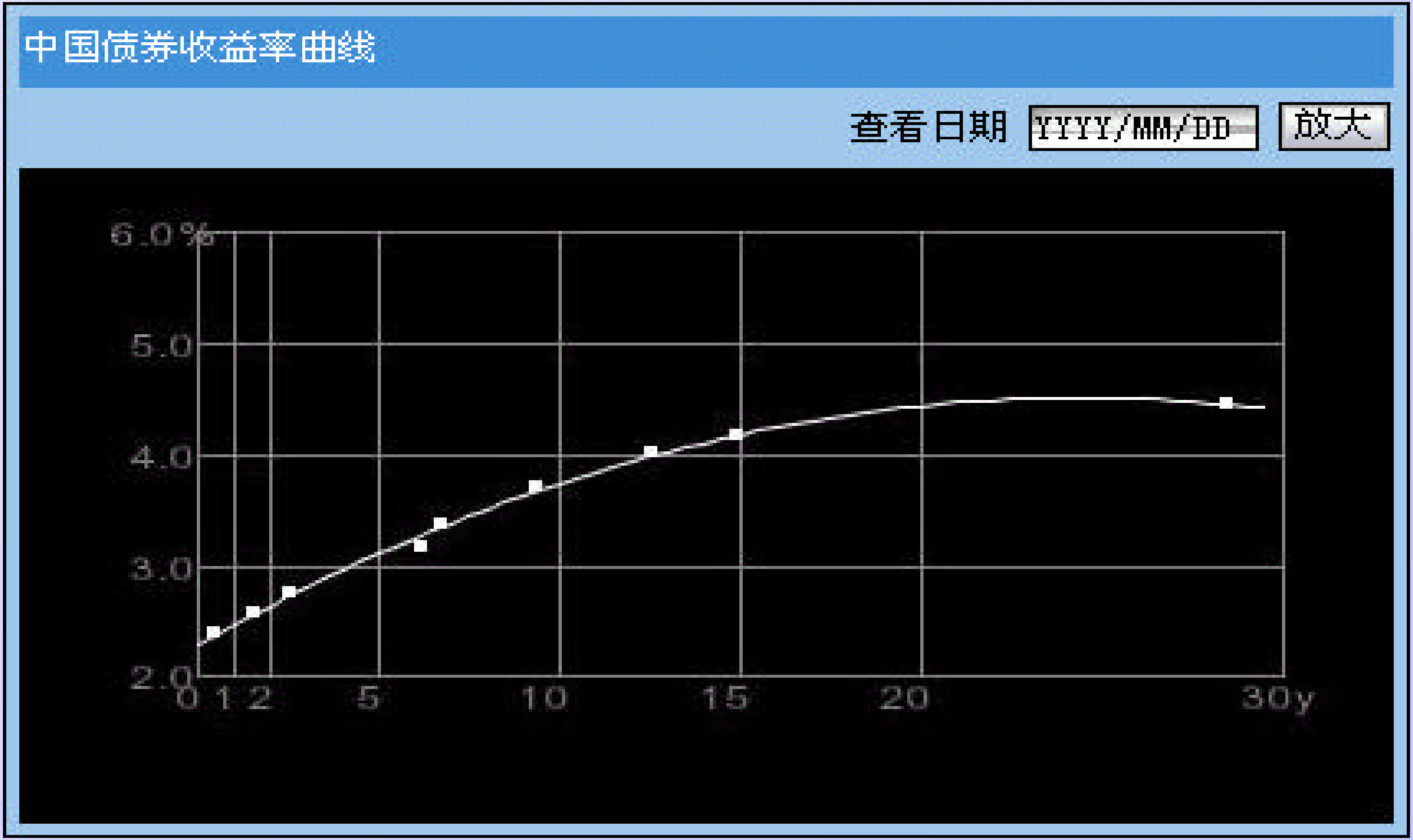
对这种现象的一种解释是：短期利率过高通常归于政府紧缩的货币政策或通货膨胀率较高，而长期利率则更侧重对正常收益的期望。

另一种常见的模式是“无息利率曲线”（flat yield curve），从图形上看是一条与时间轴平行的直线，表明在这段时间内投资者不希望投资市场或通货膨胀率在今后一段时间内出现戏剧性的变化。


US Term Structures, 1947
Pure discount rate %
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0mo
1mo
2mo
3mo
4mo
5mo
6mo
9mo
1yr
2 yr
3yr
4yr
5yr
10yr
15yr
20yr
Maturity


US Term Structures, 1981
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
Pure discount rate, %
0mo
1mo
2mo
3mo
4mo
5mo
6mo
9mo
1yr
2 yr
3yr
4yr
5yr
10yr
15yr
20yr
25yr
Maturity

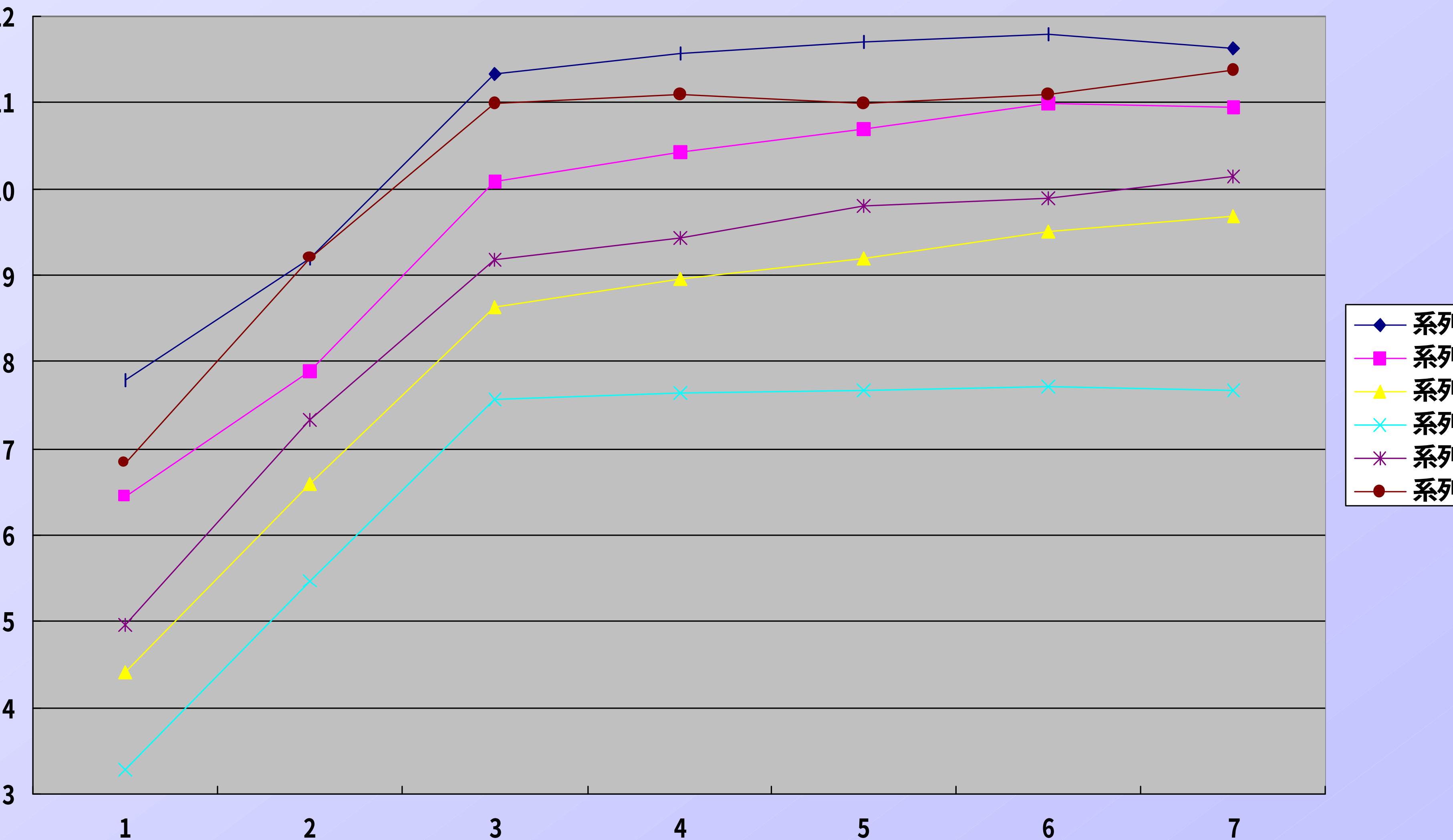
中国债券收益率曲线(2003-11-21)



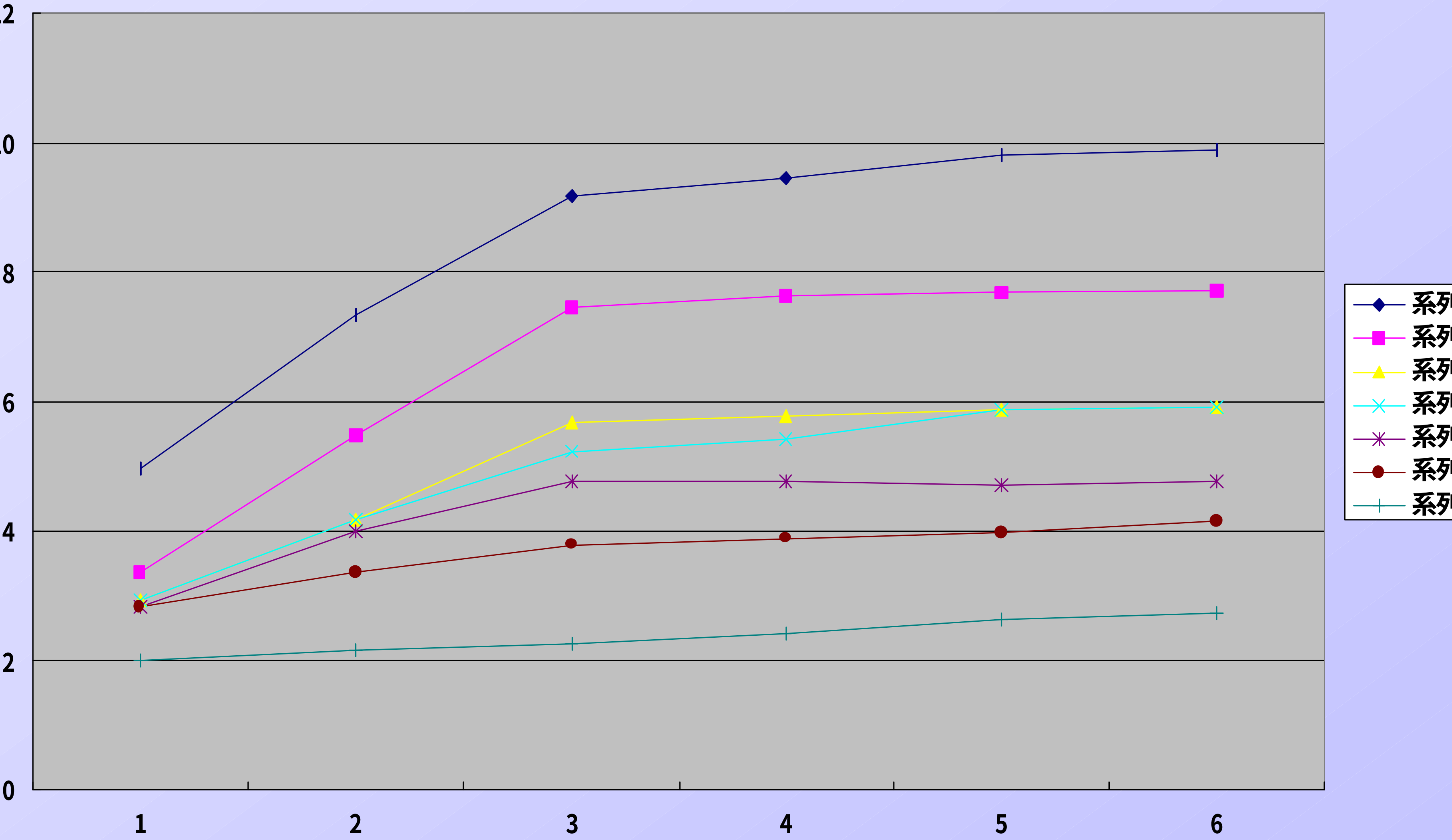
1980——2002银行储蓄年实利率表

	3月期	6月期	1年期	2年期	3年期	5年期	8年期
1980-4-1		4.37	5.76		6.42	6.9	7.01
1982-4-1		4.37	6.84		7.36	7.17	7.01
1985-4-1		5.47	6.84		7.36	7.17	7.01
1985-8-1		6.21	7.2		7.68	7.98	7.88
1988-9-1		6.58	8.64	8.79	8.9	9.02	9.01
1989-2-1	7.78	9.2	11.34	11.57	11.71	11.8	11.63
1990-4-15	6.45	7.89	10.08	10.44	10.7	10.99	10.95
1990-8-21	4.39	6.58	8.64	8.96	9.21	9.52	9.68
1991-4-21	3.28	5.47	7.56	7.63	7.68	7.71	7.67
1993-5-15	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.9	10.15
1993-7-11	6.83	9.2	10.98	11.09	10.99	11.1	11.38
1996-5-1	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.9	
1996-8-23	3.37	5.47	7.47	7.63	7.68	7.71	
1997-10-23	2.91	4.18	5.67	5.77	5.86	5.92	
1998-3-25	2.91	4.18	5.22	5.43	5.86	5.92	
1998-7-1	2.82	4	4.77	4.75	4.72	4.75	
1998-12-7	2.82	3.36	3.78	3.88	3.98	4.14	
1999-6-10	1.99	2.17	2.25	2.4	2.63	2.73	
2002-2-21		1.899	1.98	2.225	2.459	2.646	

1989—1993 China Term Structure



1996—1999 China Term Structure



3）短期利率、即期利率与远期利率

短期利率(short rate)——1 年以下给定期限的利率

即期利率(spot rate)——在当前时刻的（利率表）收益曲线上给出的利率，只用一个时间坐标表示

远期利率(forward rate)——现在时刻对未来某个时刻的某期限的短期利率的预测，用两个时间坐标表示（利率的观测时刻和利率对应的投资期限）

注☞ 利率期限结构可以指即期利率在投资期限上的结构，如图 7.1 中的曲线；也可以指远期利率的结构，如表 7.3 给出的不同时间的远期利率水平。

远期利率的计算

设i_t表示期限为 t 的即期利率， f_s表示今后时刻s期限为 1 年的远期利率，则有如下的关系式：

$$(1+i_t)^t = \prod_{s=1}^{t}(1+f_s)$$

注☞ f_t是由一组即期利率i_t构造的，由（债券）市场上公布的即期收益率可以导出这种远期收益率。

注☞ 远期利率是对未来短期利率的预测

表 7.3　1998-1999 银行储蓄年实利率和（预期）远期利率表

期限	1999-6-10		1998-12-7		1998-7-10		1998-3-25	
	年实利率	远期利率	年实利率	远期利率	年实利率	远期利率	年实利率	远期利率
1 年	2.25		3.78		4.77		5.22	
2 年	2.40	2.55	3.88	3.98	4.75	4.73	5.43	5.64
3 年	2.63	3.00	3.94	4.06	4.68	4.54	5.80	6.54
5 年	2.73	2.93	4.14	4.44	4.75	4.86	5.92	6.10

注☞ **以 1999-6-10 为例，计算过程如下：**

$$f_1 = 2.25\%$$

$$f_2 = (1+2.40\%)^2/(1+2.25\%) - 1 = 2.55\%$$

$$f_3 = (1+2.63\%)^3/(1+2.25\%)(1+2.55\%) - 1 = 3.00\%$$

假设 $f_4 = f_5$，**则有**

$$f_5 = [(1+2.73\%)^5/(1+2.25\%)(1+2.55\%)(1+3.00\%)]^{1/2} - 1$$
$$= 2.93\%$$

考虑利率期限结构下投资收益的计算

例如，以贴现现金流方法计算 IRR，如果用即期利率进行计算，则净现值公式为：

$$\text{NPV}=\sum_{1}^{n}R_t(1+i_t)^{-t}$$

其中i_t表示期限为 t 的即期利率。

注☞ 大多数情况下，用这种变化利率分析的结果要优于用一个固定利率分析的结果。

示范利率

投资期限	即期年利率
1	7.00%
2	8.00%
3	8.75%
4	9.25%
5	9.50%

例：两种 5 年期的债券 A 和 B，其中 A 的年息率为 5%；B 的年息率为 10%。

分析 A 和 B 两种债券的定价。

解：

1）如果用相同的年收益率 7%定价，则有

$$P_A = 1 + (0.05 - 0.07)a_{\overline{5}|0.07} = 0.917996$$

$$P_B = 1 + (0.10 - 0.07)a_{\overline{5}|0.07} = 1.123006$$

2）如果用即期利率进行定价，则有

$$P_A = 0.05[(1.07)^{-1} + (1.08)^{-2} + (1.0875)^{-3} + (1.0925)^{-4} + (1.095)^{-5}] + (1.095)^{-5}$$
$$= 0.830559$$

$$P_B = 0.1[(1.07)^{-1} + (1.08)^{-2} + (1.0875)^{-3} + (1.0925)^{-4} + (1.095)^{-5}] + (1.095)^{-5}$$

$$= 1.025891$$

结论：定价 2）比定价 1）更合理。

例：某企业需要一笔大额借款，期限两年。该企业有两种选择：

1）以当前的两年期贷款利率 8%借款两年；

2）先借款一年，利率 7%，一年后再以当时的一年即期利率借款一年。

分析在什么情况选择第一种方式，在什么情况下选择第二种方式。

解：如果用 f 表示第二年的一年期远期利率，则有

$$(1.08)^2 = (1.07)(1+f)$$

由此可得：$f = 9.01\%$

所以，如果企业认为一年后的一年期即期利率将超过 9.01%的话，则选择第一种方式；

不然则选择第二种方式。

注☞ 远期利率 9.01%是对未来短期利率的预期。

注☞ 在远期利率的描述上，必须指明递延的时间和利率的期限。例如：今后第 3 年到第 8 年间的远期利率表示递延 3 年的 5 年远期利率。

例：利用示范利率表中的即期利率计算每年底 1000 元，共计 5 年的年金的现值。其等价的年收益率为多少？

解：该年金的现值为

$$1000[(1.07)^{-1}+(1.08)^{-2}+(1.0875)^{-3}+(1.0925)^{-4}+(1.095)^{-5}]$$
$$= 3906.63$$

等价收益率满足

$$a_{\overline{5}|i} = 3.90663$$

由此可得 i =8.83%

期限结构的理论与模型简介

- **理性预期理论（expectations theory）**

  1896 年首次提出。

  长期债券的平均年收益率（y）是预期短期利率（远期利率）（f_t）的几何平均，即

$$(1+y)^n=(1+f_1)(1+f_2)\cdots(1+f_n)=\prod_1^n(1+f_t)$$

从而有

$$y=\sqrt[1/n]{\prod_{t=1}^{n}(1+f_t)}$$

如果用S_n（$S_0=1$）表示n期单位零息票债券的到期总收益，则远期利率可以表示为

$$f_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

例：假设在上例中，后三年的远期利率都比上例中的远期利率水平高 1%，计算年金在 0 时刻的现值及等价收益率，并与上例的结果进行比较。

解：首先计算上例中在后三年的远期利率水平以及提高后的远期利率水平。

第三年：

$$f = \frac{(1+8.75\%)^3}{(1+8.00\%)^2} - 1 = 10.26\%$$

从而提高后应为 11.26%

第四年：

$$f = \frac{(1+9.25\%)^4}{(1+8.75\%)^3} - 1 = 10.76\%$$

从而提高后应为 11.76%

第五年：

$$f=\frac{(1+9.5\%)^{5}}{(1+9.25\%)^{4}}-1=10.51\%$$

从而提高后应为 11.51%

计算后三年新的即期利率：

三年期提高后为

$$\sqrt[3]{(1+8.00\%)^{2}(1+0.1126)}-1=9.08\%$$

四年期提高后为

$$\sqrt[4]{(1+8.75\%)^{3}(1+0.1176)}-1=9.50\%$$

五年期提高后为

$$\sqrt[5]{(1+9.25\%)^4(1+0.1151)}-1=9.70\%$$

从而年金的现值

$$1000[(1.07)^{-1}+(1.08)^{-2}+(1.0908)^{-3}+(1.095)^{-4}+(1.097)^{-5}]$$
$$= 3887.66$$

等价收益率满足：

$$a_{\overline{5|}i} = 3.88766$$

由此得到 $i = 9.02\%$

❖ 流动性偏好理论(liquidity preference theory)

J.R.Hicks(1939)和 J.M.Culbertson(1957)对纯预期理论进行了修正，提出了流动性偏好假设。

长期利率是对预期短期利率与流动性偿之和。

流动性补偿——大多数投资者偏好持有短期债券，为了吸引投资者持有期限较长的债券，必须给他们一定的补偿。

现实生活中，个人和企业都更偏好于短期投资，以便能尽快收回他们的资金，保持资金的“流动性”。因此，长期投资应该以较高的利率吸引投资者。

❖ **通货膨胀风险报酬理论(inflation premium theory)**

投资者对未来的通胀情况的不确定性有所担忧，因此，需要提高利率来弥补这种风险。

利率风险的度量

问题的提出：

❖ 由于利率期限结构的作用，未来现金流的时间性在利率敏感分析中起着重要的作用；

❖ 现金流发生的时间越远，对利率变化越敏感；

❖ 如果是一组现金流，就需要用一个量表示这一组现金流的时间性质。

注☞ 金融产品**时效性**的一个基本指标是到期期限(term to maturity)，但仅凭此不能完全区别不同金融产品的时间性。

等时间法（method of equated time）

基本思想：将现金流的发生时刻以流量为权数进行加权平均，得到一个等价时间

设 $R_1, R_2,\ldots, R_n$ 为时刻 1, 2,…, n 的一组同方向的现金流，则

$$\bar{t} = \frac{\sum_{1}^{n} tR_t}{\sum_{1}^{n} R_t}$$

注☞ 如果只有唯一流量则 $\bar{t} = t$

例：对前面考虑的两种 5 年期债券：

A：年息率为 5%

B：年息率为 10%

求等价时间。

解：

债券 A 年息率 5%，所以

$$\bar{t}_A = \frac{\sum_{t=1}^{5} 5t + 5\times 100}{5\times 5+100} = \mathbf{4.60}$$

债券 B 年息率 10%，所以

$$\overline{t_B} = \frac{\sum_{t=1}^{5} 10t + 5\times 100}{5\times 10 + 100} = \mathbf{4.33}$$

即：

债券 A 的平均回收期为 4.6 年；

债券 B 的平均回收期为 4.3 年。

注☞ 无论什么收益率环境，5%息率的债券比 10%息率的债券的平均回收期都要长。

期度 / 期限 / 久期（duration）

Macaulay **期度**，记作 $\bar{d}$：

$$\bar{d}(i)=\frac{\sum_{t=1}^{n} tR_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t},\quad v=(1+i)^{-1}$$

注☞ $\bar{d}(i)$ 实际上是将现金流的发生时刻以流量的现值为权数进行加权平均，得到一个等价时间。

结论：等价时间、$\bar{d}(i)$ 越小则对利率风险越不敏感。

结论：

1）若$i=0$，则有 $\bar{d}(i)=\bar{t}$，$\bar{d}(i)$退化为等价时间

2）一般有 $0<\bar{d}(i)\le n$

上式等号成立当且仅当现金流只有一次发生，即

$R_k=0,\quad 0<k<n$。

注☞ 此时等价时间$=\bar{d}(i)=n$

3）$\bar{d}(i)$是利率i的递减函数，并且

$$\frac{\partial \bar{d}}{\partial i}=-v\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 R_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t}-\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} t R_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t}\right)^2\right]=-vs_i^2$$

注☞ s_i^2延用概率统计中方差的概念，即：

假设取值于$\{1,\cdots,t,\cdots,n\}$上的随机变量X^i（i表示对应的收益率）满足 $\Pr(X^i=t)=\dfrac{R_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t}$，$1\le t\le n$，则

$$E[X^i]=\bar{d}(i),\quad \mathrm{var}(X^i)=s_i^2$$

注☞ 推导如下

$$s_i^2=\mathrm{var}(X^i)=E[X^i-E[X^i]]^2=E[(X^i)^2]-E[X^i]^2$$

$$=\sum_{t=1}^{n} t^2\frac{R_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t}-\Big(\sum_{t=1}^{n} t\frac{R_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t}\Big)^2$$

例：

1）零息票债券： $\bar{d}(i)=n$

2）息票债券： $$\bar{d}(i)=\frac{g(Ia)_{\overline{n|}i}+nv^n}{ga_{\overline{n|}i}+v^n}$$

3）固定年金： $$\bar{d}(i)=\frac{(Ia)_{\overline{n|}i}}{a_{\overline{n|}i}}$$

4）永久年金： $$\bar{d}(i)=\frac{(Ia)_{\overline{\infty|}i}}{a_{\overline{\infty|}i}}=\frac{\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}>1$$

注☞ 推导如下

1）对于零息票债券，当$1 \le t < n$**时，**$R_t = 0$**；当**$t = n$**时，**$R_t = C$，**从而有** $\bar{d}(i) = n$

2）设$C = 1$，**有** $R_t = g, \quad 1 \le t \le n-1, \quad R_n = g + 1$

$$\sum_{t=1}^{n} t R_t v^t = g(Ia)_{\overline{n}|i} + n v^n$$

从而有

$$\bar{d}(i) = \frac{g(Ia)_{\overline{n}|i} + n v^n}{g a_{\overline{n}|i} + v^n}$$

3）对固定年金，有 $1 \le t \le n, \quad R_t = R$

4）由 3）令$n \to \infty$既可得结论

例：假设实利率 8%，计算以下现金流的投资期限：

A—10 年期无息票债券；

B—年息率 8%的 10 年期债券；

C—10 年期抵押贷款的固定偿还；

D—红利固定的优先股票。

解：

A：显然有 $\bar{d}$=10

B：以单位兑现值计算有

$$\bar{d} = \frac{0.08(Ia)_{\overline{10|}} + 10v^{10}}{0.08a_{\overline{10|}} + v^{10}} = 7.25$$

C：以单位固定收入计算有

$$\bar{d} = \frac{(Ia)_{\overline{10|}}}{a_{\overline{10|}}} = 4.87$$

D：以单位红利计算有

$$\bar{d} = \frac{(Ia)_{\overline{\infty|}}}{a_{\overline{\infty|}}} = 13.5$$

结论：抵押贷款的收回是所有投资中投资期限最短的（风险最小）；而优先股票是所有投资中期限最长的。

$\bar{d}(i)$的近似计算

将$\bar{d}(i)$在$i=0$点作一阶展开有

$$\bar{d}(i) \approx \bar{d}(0) + \bar{d}'(0)i$$

其中

$$\bar{d}(0)=\frac{\sum_{t=1}^{n} tR_t}{\sum_{t=1}^{n} R_t}$$ （等价时间）

$$\bar{d}'(0)=-[(\frac{\sum_{t=1}^{n} t^2R_t}{\sum_{t=1}^{n} R_t})-(\frac{\sum_{t=1}^{n} tR_t}{\sum_{t=1}^{n} R_t})^2]\triangleq -s_0^2<0$$

则有

$$\bar{d}(i)\approx\bar{d}(0)-is_0^2$$

投资组合的期度（与组合中各种资产期度的关系）

设有m种资产的投资组合，$\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$表示各种资产的投资单位数，第$k$（$1 \le k \le m$）种资产单位投资的回报现金流为$\{R_1^k, R_2^k, \cdots, R_n^k\}$。

注☞ 允许$R_t^k, 1 \le t \le n$为零

如果所有资产均以利率 i 贴现，则第k（$1 \le k \le m$）种资产的期度为：

$$\bar{d}_k(i) = \frac{\sum_1^n t R_t^k v^t}{\sum_1^n R_t^k v^t}, \quad v = (1+i)^{-1}$$

投资组合的现金流为$R_t=\sum_{k=1}^{m} w_k R_t^k, 1\le t\le n$，从而投资组合的期度为

$$\bar{d}(i)=\frac{\sum_{t=1}^{n} tR_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t}=\frac{\sum_{t=1}^{n} t(\sum_{k=1}^{m} w_k R_t^k)v^t}{\sum_{t=1}^{n}(\sum_{k=1}^{m} w_k R_t^k)v^t}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{m} w_k \sum_{t=1}^{n} tR_t^k v^t}{\sum_{k=1}^{m} w_k \sum_{t=1}^{n} R_t^k v^t}=\frac{\sum_{k=1}^{m} w_k \bar{d}_k(i)\sum_{t=1}^{n} R_t^k v^t}{\sum_{k=1}^{m} w_k \sum_{t=1}^{n} R_t^k v^t},\quad v=(1+i)^{-1}$$

记：$\tilde{w}_k = w_k \sum_{t=1}^{n} R_t^k v^t, \quad 1 \le k \le m$

如果所有资产都是以利率i 定价的，则 $\tilde{w}_k$ 就是第k（$1 \le k \le m$）种资产的初始投资额，$\dfrac{\tilde{w}_k}{\sum_{t=1}^{n} \tilde{w}_k}$即为第$k$（$1 \le k \le m$）种资产的投资额在投资组合总投资额中的比例。

上面的计算表明：

$$\bar{d}(i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\tilde{w}_k}{\sum_{k=1}^{m} \tilde{w}_k} \bar{d}_k(i)$$

即：投资组合的期度为组合中各种资产期度的加权平均，权重为各种资产的（现值）投资比例。

净现值“波动率”（volatility）

观察利率变化对净现值的影响。引入净现值“波动率”的概念，用$\overline{v}$表示：

$$\overline{v} = -\frac{P'(i)}{P(i)}$$

因为$P'(i)$是对利率变化造成的净现值变化的度量，而

$\frac{P'(i)}{P(i)}$则将这个度量单位化使之独立于净现值本身的取值大小。

通过适当的公式推导，有以下关系：

$$\bar{v} = \frac{\bar{d}}{1+i}$$

也称波动率为**修正期限**（modified duration）。

结论：修正期限也具有期限的性质，如关于利率是单调下降的。

注☞ Macaulay duration 和 modified duration 都是利率风险管理中的重要工具。

注☞ 推导如下

$$d^* = \frac{\bar{d}}{1+i} = \frac{\sum_{t=1}^{n} tR_t v^t}{(1+i)\sum_{t=1}^{n} R_t v^t} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t(1+i)^{-t-1} R_t}{\sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t} R_t}$$

$$= -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}\sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t} R_t}{\sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t} R_t} = -\frac{P'(i)}{P(i)} = \bar{v}$$

有效期限（effective duration）

有效期限——修正期限的一种近似计算

计算公式为：

$$有效期限 = \frac{P_- - P_+}{2P_0(\Delta i)}$$

其中

Δi——表示收益率的变化量（非负）

P_0——表示初始价格

P_+——表示收益率增加Δi后的价格

P_-——表示收益率减少Δi后的价格

注☞ 公式来源于近似计算

$$P'(i) \approx \frac{P(i+\Delta i) - P(i-\Delta i)}{2(\Delta i)}$$

例：20 年期息率 9%的美式债券，以收益率 6%计算的价格为 134.6722，如果考虑收益率变化 20 个基点，即：收益率升至 6.2%或降至 5.8%，价格分别变化为 131.8439 和 137.5888。

计算该债券的有效期限。

解：该债券的有效期限应为

$$\frac{P_{-}-P_{+}}{2P_0(\Delta i)}=\frac{137.5888-131.8439}{2\times 134.6722\times 0.1\%}=21.3292 \quad (\textbf{半年})$$

从而该债券的有效期限为 10.66 年，即：该债券的平均收回期为 10 年。

修正期度可用于表述债券价格变化的百分比（在一定变化范围内），即：如果不考虑价格上升和下降两个方向的区别，则有

$$\text{价格变化百分比} = -\text{修正期度} \times \Delta i \times 100$$

例：在上例中，如果收益率变化 100 个基点，债券价格将变化（上升与下降同等对待）10.66%。

§7.3 资产负债管理

问题的提出：

对于金融机构而言，存在着对资产和负债两方面进行综合管理的问题

- 商业银行的资产大多是以贷款合约体现的，负债则是以储蓄合约代表的
- 基金管理的资产是它的投资，负债为它对基金投资人承诺的资本赎回和收益
- 养老金管理中，资产为养老金投入和投资，负债为养老金的领取

❖资产负债管理的目标：

保证资产能够及时准确地匹配对机构的负债要求

❖资产负债管理的具体过程：

从资产和负债两个方面进行调整，大多数情况的负债现金流模式是事先给定的，或者不容易进行调整，所以资产负债管理更多的是落实在对资产的管理上。

净现金流——资产现金流和负债现金流的差

正的净现金流表明资产现金流超过负债现金流，从而产生需要进行再投资的溢额现金。

再投资风险

　如果在净现金流为正的情形利率下降，则不得不以比初始利率低的水平进行再投资。

　负的净现金流表明匹配负债责任所需的现金不足，需要变现资产或者从外部借款。

抽回投资风险（价格风险）

　如果在净现金流为负的情形利率上升，则对债券及其它固定收入证券的变现将导致资本损失，因为利率上升使得这些证券的价值下降了。

现金流$A_1, A_2, \ldots, A_n$——表示时刻 1,2,…, n 发生的资产流

现金流$L_1, L_2, \ldots, L_n$——表示时刻 1,2,…, n 发生的负债流

资产负债管理的**核心问题**：

如何在这两组现金流之间达到均衡（equilibrium），或者保持余额（资产与负债的差）在安全的范围内。

例：某金融机构准备连续发行一种一年期的金融产品（如短期债券、定期存单），利率固定。

该机构在对这些融资资金进行投资时，面临以下风险：无论是选择长期投资还是短期投资，当金融市场利率变化时，该机构本身都存在投资收益率损失的风险。

分析：

1）将资金进行长期投资，平均投资期 2 年，$\bar{d}$ =2。

当市场利率上升时，原产品的认购者会在一年后要求收回资金。该机构不得不转卖（以较低的价格）其资产以支付这些合同，从而造成资产价值的损失。

在市场利率上升时期，对短期负债选择资产的长期投资，将有利率损失的风险。

2）将资金进行短期投资，平均投资期不到一年 $\bar{d}<0$。

这时的风险为利率市场利率下调，因为如果市场利率下调，由于所选择的投资要在年内进行再投资，所以利息收入将相对有所下降。这将导致出现也许不足以偿还原金融产品的应付利息。

注☞ 以上两种情况，都出现了资产的收益不能保证负债的问题。下面介绍在资产负债管理中常用的两种方法——免疫技术、资产和负债的匹配

2）将资金进行短期投资，平均投资期不到一年，$\bar{d}<0$。

这时的风险为利率市场利率下调，因为如果市场利率下调，由于所选择的投资要在年内进行再投资，所以利息收入将相对有所下降。这将导致出现也许不足以偿还原金融产品的应付利息。

以上两种情况，都出现了资产的收益不能保证负债的问题。本节主要介绍目前在资产负债管理中常用的两种计算方法——免疫技术、资产和负债的匹配

免疫技术(immunization)

注☞ 免疫一词由英国保诚保险公司的首席精算师Frank M. Redington于1952年在一篇名为“寿险公司评估原则回顾”的文章中提出的。

主要思想：

为了使一组业务的盈余价值对利率波动“免疫”，应该使资产的平均期限与负债相等，同时使资产的现金流比负债更分散。

免疫技术的核心：

在给定预期投资收益率的条件下，选择资产满足：无论市场利率在预期收益率附近如何波动（上升或下降），最终的总体盈余（资产与负债的差）都不会下降。

注☞ 免疫技术方法是一种数学优化中的规划方法。

数学表达：

用$R_t(t=1,2,...,n)$表示时刻 t 的净收入（**net receipt**）

$$R_t = A_t - L_t \qquad t = 1, 2, \ldots, n$$

记i_0为以下方程

$$P(i)=\sum_{t=1}^{n} R_t v^t =0$$

的解，即投资的预期收益率。

当实际收益率 i 在 i_0附近波动时，即 $i=i_0+e$，其中e为绝对值充分小的实数，利用 Taylor 展开，有

$$P(i_0+e)=P(i_0)+eP'(i_0)+\frac{e^2}{2}P''(i_0+x),0<|x|<|e|$$

如果 i_0满足：$P'(i_0)=0$且$P''(i_0)>0$，则 i_0为$P(i)$的局部最小值点，即：$\exists e>0$，使得$P(i)\geq P(i_0),|i-i_0|<e$。

如果定义净现值的二阶导数（标准化之后）为“**凸值**”（convexity），记作 $\bar{c}$：

$$\bar{c} = \frac{P''(i)}{P(i)}$$

则免疫方法可以表述为：

条件 1：净收入的(修正)期限 $= 0$

条件 2：净收入的凸值 > 0

注☞ 在现实问题中，负债的情况在很大程度上是由企业的外部环境决定的，因此免疫技术从定义上虽然是对资产和负债两方面的调整，而实际的操作目标是调整资产的结构。

免疫技术的基本原则

适当调整资产结构，使得：

1）资产收益现金流的净现值不小于负债流出现金流的净现值；

2）资产的修正投资期限（期度）与负债的修正投资期限（期度）相等；

3）在资产收益现金流的净现值等于负债流出现金流的净现值的条件下，资产的凸值应该大于负债的凸值。

例：甲承诺在一年后付给乙 1100 元。

甲现在以 1000 元进行投资选择：短期资金市场的隔日变动的当前利率为 10%，另有 10%收益率的两年期无息票债券。

基于免疫技术给出一种较优的投资策略。假定所有计算的年利率为 10%。

注☞ 如果恰好有 10%收益率的一年期无息票债券可供投资，则甲应选择全部投资该一年期债券。在没有正好的投资项目时，需要考虑组合投资，需要考虑免疫的问题。

解：设 X 表示投资短期资金市场的金额，Y 表示投资债券的金额，则有：

$$P(i) = X + 1.21 \times Y \times (1+i)^{-2} - 1100 \times (1+i)^{-1}$$

$$P'(i) = -2.42 \times Y \times (1+i)^{-3} + 1100 \times (1+i)^{-2}$$

$$P''(i) = 7.26 \times Y \times (1+i)^{-4} - 2200 \times (1+i)^{-3}$$

设 X 和 Y 满足

$$P(10\%) = X + 1.21 \times Y \times (1+10\%)^{-2} - 1100 \times (1+10\%)^{-1}$$
$$= 0$$

$$P'(10\%) = -2.42 \times Y \times (1+10\%)^{-3} + 1100 \times (1+10\%)^{-2}$$
$$= 0$$

解方程可得： $X = Y = \mathbf{500}$

$$P''(10\%) = 7.26 \times 500 \times (1+10\%)^{-4} - 2200 \times (1+10\%)^{-3}$$
$$= 826.45 > 0$$

可以验证：当利率有小的变化时，净现值将保持大于零

$$P(\mathbf{11\%}) = \mathbf{0.0406 > 0}$$

$$P(\mathbf{9\%}) = \mathbf{0.0421 > 0}$$

下面计算与该投资策略相关的修正投资期限和凸值：（$i = 10\%$）

关于修正投资期限，可以利用资产部分的表达式得：

$$P(i) = X + 1.21 \times Y \times (1+i)^{-2} = 1000$$

$$P'(i) = -2.42 \times Y \times (1+i)^{-3} = -909.09$$

$$\overline{v} = -\frac{P'(i)}{P(i)} = \mathbf{0.90909}$$

也可以分别对短期资金市场和债券计算：

$$\overline{v} = \mathbf{0}\ ; \quad \overline{v} = \frac{2}{1.1}$$

加权平均后，有：

$$\overline{v} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{1.1} = 0.90909$$

关于凸值，有：

$$P''(i)=7.26\times Y\times(1+i)^{-4}=2479.34$$

从而

$$\overline{c}=\frac{P''(i)}{P(i)}=\frac{2479.34}{1000}=2.47934$$

例：30 年期住房抵押贷款，月换算名利率 10.2%，按月偿还。计算：

1）还贷现金流的修正投资期限；

2）还贷现金流的凸值。

解：

1）月实际利率为 $\frac{0.102}{12} = 0.0085$，将还款金额单位化后可得现金流的修正投资期限为

$$\bar{v} = \frac{(Ia)_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}} = 99.85$$

其中 $n=360$, $i=0.0085$

所以，修正的投资期限近似为 100 个月，而实际还款期为 360 个月。

2）计算二阶导数：

$$P''(i)=\sum_{t=1}^{n}t(t+1)(1+i)^{-t-2}=v^2\sum_{t=1}^{n}(t^2+t)v^t$$

$$\sum_{t=1}^{n}t^2v^t=\frac{1}{i}[\{1+\frac{3}{i}+\frac{2}{i^2}\}-v^n\{(n+1)^2+\frac{2n+3}{i}+\frac{2}{i^2}\}]$$

由此可得

$$\overline{c}=\frac{P''(i)}{P(i)}=\frac{v^2[\sum_{t=1}^{n}t^2v^t+(Ia)_{n|}]}{a_{n|}}$$

$$=\frac{1,940,079+11,283.80}{(1.0085)^2(112.0591)}=17,121$$

资产负债匹配(matching of assets and liabilities)

两种资产负债匹配方法：

1）**绝对匹配**(absolute matching)

基本思想：构造一种资产组合使其收入的现金流在每个时期均与负债的现金流相匹配。

例如：养老基金将为退休人员以固定的方式和金额发放退休金，为此，养老基金一般选择等级较高的无早赎债券的投资组合，例如一系列零息票债券，使其收益现金流与养老金的发放完全匹配。

这种投资常被称为“专门的债券组合”（dedicated bond portfolio）。一旦达到了这种匹配，就不需要进一步的分析和计算了。

注☞ 在现实情形中，很难或根本无法做到这种匹配。

例：现有如下的资产负债数据：

	期度	预测的现金流				
		第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	4.2	210	69	445	180	1980
资产	4.3	194	254	41	200	2200

可选的投资资产有：

- ❖1 年期零息政府债券
- ❖2 年期息率 5%的政府债券
- ❖3 年期息率 6%的政府债券
- ❖5 年期息率 10%的政府债券

从资产负债现金流匹配的角度决定需要进行的资产交易。

注☞ 假设政府债券每年兑现一次息票

解：为了达到现金流的匹配，每项负债现金流都必须有充分匹配的资产。

为了做到这一点，首先从期限最长的负债开始，然后逐步后退回来。

第五年：现有的资产>负债，所以需要出售一些 5 年期的资产。由于

资产－负债

=5 年期债券的息票收入+5 年期债券的到期本金

=面值（1+息率）

从而

5 年期债券的出售量

$$=\frac{A_5-L_5}{1+\text{息率}}=\frac{2200-1980}{1+10\%}=200$$

在出售了 200 元面值的 5 年期债券之后，资产负债的现金流模式变为：

	现金流				
	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	210	69	445	180	1980
原资产	194	254	41	200	2200
售出的资产	-20	-20	-20	-20	-220
调整后的资产	174	234	21	180	1980

<u>第四年</u>：资产负债的现金流已经匹配。

<u>第三年</u>：现有的负债>资产，所以需要购入一些 3 年期的资产。

$$3\text{ 年期债券的购入量}=\frac{L_3-A_3}{1+\text{息率}}=\frac{445-21}{1+6\%}=400$$

在购入了 400 元面值的 3 年期债券之后，资产负债的现金流模式变为：

	现金流				
	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	210	69	445	180	1980
原资产	174	234	21	180	1980
售出的资产	+24	+24	+424	0	0
调整后的资产	198	258	445	180	1980

第二年：现有的资产>负债，所以需要出售一些 2 年期的资产。

$$2\text{ 年期债券的出售量}=\frac{A_2-L_2}{1+\text{息率}}=\frac{258-69}{1+5\%}=180$$

在出售了 180 元面值的 2 年期债券之后，资产负债的现金流模式变为：

	现金流				
	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	210	69	445	180	1980
原资产	198	258	445	180	1980
售出的资产	-9	-189	0	0	0
调整后的资产	189	69	445	180	1980

<u>第一年</u>：现有的负债>资产，可以购入 21 元的 1 年期零息政府债券。

2）资产负债匹配

注☞ 由 J.A.Tilley 在 1980 年首次提出

基本思想是：

在如下条件已知（或事先给定）时：

（1）负债在各个年度的现金流模式

（2）利率在投资期间的变化模式，包括新利率的情况

（3）可选的资产类，以及各个资产类在未来的利息收入和本金收回模式

（4）再投资项目在随后年份的模式

求解下面的决策问题：

找到可行的组合策略（各种资产类的投资比例），使得在任何的已知利率变化模式下，都可以保证最终的资产价值非负。

注☞ 该方法更多的是给出了一种分析和决策理念

例：某银行为储户提供年利率 8%的两年储蓄。提前支取利率不变。

银行可能的投资工具为：

A—年利率 8%的一年期国债；

B—年利率 8.5%的两年期国债。

问题：假设储户的提前支取行为简化为只在第一年底发生，银行该如何进行投资？

解：设s_1和s_2分别表示储户在第一、二年底的支取金额比例。如果考虑单位储蓄，则有：

$$1=(1.08)^{-1}s_1+(1.08)^{-2}s_2$$

或

$$s_2=(1.08)^2-(1.08)s_1$$

设p_1和p_2分别表示银行投资于两种债券的比例，则有

$$p_1+p_2=1$$

令 f 表示一年后的一年短期利率，A_2表示银行在第二年底的余额，则有

$$A_2=[p_1(1.08)-s_1](1+f)+[p_2(1.08)^2-s_2]$$
$$=[(1.08)(1+f)-(1.085)^2]p_1+s_1(0.08-f)$$
$$+(1.085)^2-(1.08)^2$$

目标：适当选取 p_1，使得无论 f 如何变化，都有 $A_2>0$

问题：s_1、s_2和 f 都是未知的，如何选择p_1，使得f 在一定的范围内波动时 A_2都是非负的？

关键：决策必须在一定的假设条件下进行情景分析

情景 1：假设再投资利率下降，f =7%

在这种情况下，存单持有人一般会倾向于将原存款继续在银行存下去，从而第一年末的时候提前支取的可能性不是很大，取款率不会太高。

假设 s_1=10%，则有

$$A_2 = -0.021625p_1 + 0.011825$$

为了使 A_2>0，必须要求 p_1<0.5468。

情景 2：假设再投资利率上升，f =9.5%

　此时会刺激短期投资。

　债权人会考虑提前收回资金，以通过再投资的方式获取更多的收益。

　金融公司必须相应地售出部分资产以还债，不但有可能蒙受由于利率上升所导致的资产贬值还要蒙受丧失在下一阶段的以更高利率投资的机会，损失是双重的。

注☞ 比如，银行用储户的资金购买了债券，可是利率上升将导致债券价格的下降，此时被迫出售债券自然要蒙受损失。

所以，现在需要假设在第一年末的时候提前支取的可能性是比较大，取款率会比较高。

假设 s_1=90%。则有

$$A_2 = 0.005375p_1 - 0.002675$$

为了使A_2>0，必须要求p_1>0.4977。

综上所述，因为现在不能肯定再投资利率是上升还是下降，所以最好的策略是两方兼顾。

结论：p_1的选择范围是：$0.4977<p_1<0.5468$，相应地可以得到p_2的范围。

结论：使用情景分析方法要求投资管理者对未来作出某些关键性的假设，

- ❖ 要设定利率升高或下降的情况下可能的再投资利率
- ❖ 要设定在利率升高和下降的两种情况下债券人的取款率

两个关键假设的微小变化都会导致投资分配的很大改变，即最后的决策对于假设是敏感的。

实践证明 Tilley 提出的情景分析方法具有很强的实用价值。