

北京大学数学科学学院期中试题解答及评分标准

2003-2004 学年第 2 学期

1. 解: $t=5$ 时, 帐户 A 、 B 的累积值分别为

$$AV_A = e^{\int_0^5 \frac{t^2}{k} dt} = e^{\frac{t^3}{3k} \Big|_0^5} = e^{\frac{125}{3k}} \quad (2')$$

$$AV_B = (1-0.04)^{-10} = 1.50414 \quad (2')$$

$$\therefore AV_A = AV_B$$

$$\therefore e^{\frac{125}{3k}} = 1.50414 \quad (2') \quad \Rightarrow k = \left[3 \left(\frac{0.40822}{125} \right) \right]^{-1} = 102.07 \quad (1')$$

2. 时刻 t 基金 X 的累积值为 $AV_X = 10,000(1.05)^t$, (1')

时刻 t 基金 Y 的累积值为 $AV_Y = 10,000(1 + 0.08t)$ (1')

$$d_x = \ln(1.05) \quad d_y = \frac{0.08}{1 + 0.08t} \quad (2')$$

$$\ln(1.05) = \frac{0.08}{1 + 0.08t} \Rightarrow t = 7.99593 \quad \text{or} \quad t = 8 \quad (2')$$

$$\Rightarrow AV_Y - AV_X = 10,000(1 + 0.08t) - 10,000(1.05)^t = 1625.45 \quad (1')$$

3. $\left. \begin{array}{l} \text{第 } n \text{ 年底存款累积值为 } AV_n = 100(Is)_{\overline{n}|i} \\ \text{第 } n+1 \text{ 年底利息为 } I_{n+1} = iAV_n \end{array} \right\} \Rightarrow I_{12} \geq 500 \Rightarrow n = 1$

4. 年金 A 的现值为
$$pv_A = n^2 + 2n^4 + 3n^6 + \dots = \frac{n^2}{(1-n^2)^2} \quad (2')$$
 年金 B 的现值为

$$pv_B = kn^3 + 2kn^6 + 3kn^9 + \dots = \frac{kn^3}{(1-n^3)^2} \quad (2')$$

$$\therefore pv_A = pv_B \quad \therefore \frac{n^2}{(1-n^2)^2} = \frac{kn^3}{(1-n^3)^2} \quad (2')$$

$$\Rightarrow k = \frac{(1-n^3)^2}{n(1-n^2)^2} = \frac{(1+n+n^2)^2}{n(1+n)^2} \quad (1')$$

5. 季实际率 $i = (1.07)^{\frac{1}{4}} - 1$, (1')

十年底累积值为 $450S_{\overline{40}|i} = 25513.2$ 元 (1')

15 年底的累积值为 $450S_{\overline{40}|i}(1+i)^5 = 35783.55$ 元 (2')

$450S_{\overline{40}|i}(1+i)^5 = Y \cdot \ddot{a}_{\overline{4}|0.07}$ (2') $\Rightarrow Y = 9873.19$ (1')

6. 永久年金现值为 $\frac{X}{i}$, (1') 甲领取的年金现值为 $Xa_{\overline{n}|}$ (1')

由题意知 $\frac{Xa_{\overline{n}|}}{\frac{X}{i}} = 40\%$ (1') $\Rightarrow V^n = 0.6$ (1')

丙领取的年金现值为 $V^{2n} \cdot \frac{X}{i}$ (2'), $\frac{V^{2n} \cdot \frac{X}{i}}{\frac{X}{i}} = V^{2n} = 0.6^2 = 0.36$

\therefore 占 36% (1')

7. 第七年底, 甲的累积值为 $X = 7Z + (0.05Z)(Is)_{\overline{7}|0.06} = 8.16154Z$ (3')

第 14 年底, 乙的累积值为 $Y = 14Z + (0.025Z)(Is)_{\overline{13}|0.06} = 16.57183Z$ (3')

$\therefore \frac{Y}{X} = 2.03048$ (1')

8. 第 t 年底取出底利息为 $300it$ $t = 1, 2, 3, \dots, 20$ 用于再投资 20 年底累积值为

$300i(Is)_{\overline{20}|i/2}$ (2'), 存入的本金共为 $300 \times 20 = 6000$ (1')

$300 \cdot \ddot{S}_{\overline{20}|0.08} = 6000 + 300i(Is)_{\overline{20}|i/2}$ (3') $\Rightarrow i = 0.1$ (1')

9. 第 5 年底基金价值为 5000 (1'), 第 4 年底用于再投资的利息的累积值为

$AV_4 = 100(1.06)^2 + 200(1.06) + 300 = 624.36$ (1')

第 5 年底, 利息累积值为 $AV_5 = AV_4 \times (1 + k\%) + 400$ (2')

$$\therefore 5000 + 624.36 \times (1 + k\%) + 400 = 6090 \quad (2') \Rightarrow k = 10.513 \quad (1')$$

$$10. \text{ 第 1 年的利息为 } I_1 = 3960(e^{\int_0^1 \frac{1}{8+t} dt} - 1) = 3960 \times \frac{1}{8} \quad (2')$$

$$\text{第 2 年的利息为 } I_2 = 3960(e^{\int_1^2 \frac{1}{8+t} dt} - 1) = 3960 \times \frac{1}{9} \quad (2')$$

$$\text{第 3 年的利息为 } I_3 = 3960(e^{\int_2^3 \frac{1}{8+t} dt} - 1) = 3960 \times \frac{1}{10} \quad (2')$$

$$\text{第 3 年底累积值为 } 3960 + 3960\left(\frac{1}{8} \times 1.07^2 + \frac{1}{9} \times 1.07 + \frac{1}{10}\right) = 5393.53 \quad (1')$$

11. 甲购买的年金现值为:

$$PV_{\text{甲}} = 90a_{\infty|} + 10V + 20V^2 + 30V^3 + \dots = \frac{90}{i} + 10(Ia)_{\infty|} = \frac{90}{1+i} + \frac{10}{id} \quad (3')$$

$$\text{乙购买的年金现值为 } PV_{\text{乙}} = \frac{180}{d} \quad (1') \Rightarrow \frac{90}{1+i} + \frac{10}{id} = \frac{180}{d} \Rightarrow i = 0.10171 \quad (2')$$

$$12. \text{ 甲购买的年金为 } X = \frac{30}{k\%} \quad (2')$$

乙 购 买 的 年 金 为

$$\begin{aligned} X &= 53(1+k\%)^{-1} + 53(1+k\%)(1+k\%)^{-2} + \dots + 53(1+k\%)^9(1+k\%)^{-10} \\ &= 53(1+k\%)^{-1} \times 10 \quad (2') \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{30}{k} = 53(1+k\%)^{-1} \times 10 \Rightarrow k = 6 \quad (2')$$

$$13. \text{ 乙每月的偿还额为 } P = \frac{10,000}{\left[1 - \left(\frac{1.03}{1.0075}\right)^{60}\right] / (0.0075 - 0.03)} \quad (2')$$

$$10,000(1+i)^5 = P \frac{1.005^{60} \left(1 - \left(\frac{1.03}{1.005}\right)^{60}\right)}{0.005 - 0.03} \quad (2')$$

$$\Rightarrow (1+i)^5 = 1.4797 \Rightarrow i = 8.153\% \quad (2')$$

14. 用时间加权法所得的收益率为 $g_T = \left(\frac{120}{100}\right)\left(\frac{100}{120+D}\right)\left(\frac{65}{100-40}\right) - 1 = 0$ (2')

$\Rightarrow D = 10$ (1')

资本加权法所得收益率为 $g_D = \frac{-5}{100 + \frac{2}{3} \times 10 - \frac{1}{6} \times 40} = -0.05$ (3')

15. 项目 A 的净现值为 (以 1000 元为单位):

$$NPV_A = -1500 - 2500V - 2500V^2 + 10,000V^3 = 182 \quad (2')$$

$$NPV_B = -3250 - 750\bar{a}_{\overline{1}|i} - 900V\bar{a}_{\overline{1}|i} - 1200V^2\bar{a}_{\overline{1}|i} + 10,000V^3 = 135.88 \quad (3')$$

\therefore 在 20% 的风险贴现率下项目 A 更好 (1')