

《利息理论与应用》第四章练习题

重点练习题：2, 7, 12, 17, 21, 24, 27, 29, 31, 39, 41, 45, 47, 50, 56, 57

§4.1

1. 1000 元贷款计划在五年内按季度偿还。已知季换算名利率 6%，计算第二年底的未结贷款余额。(635.32 元)
2. 10,000 元贷款，每年底还款 2000 元，已知年利率 12%，计算借款人的还款总额等于原贷款额时的未结贷款余额。(4918 元)
3. 某贷款在每季度末偿还 1500 元，季换算名利率 10%，如果已知第一年底的未结贷款余额为 12,000 元，计算最初的贷款额。(16,514 元)
4. 某贷款将在 15 年内分期偿还。前五年每年底还 4000 元，第二个五年每年底还 3000 元，最后五年每年底还 2000 元。计算第二年底的未结贷款余额的表达式。

$$1000[2a_{\overline{8}|} + a_{\overline{3}|}], 1000[(2a_{\overline{15}|} + a_{\overline{10}|} + a_{\overline{5}|})(1+i)^7 - (4s_{\overline{7}|} - s_{\overline{2}|})]$$

5. 某贷款将以半年一次的年金方式在 3 年半内偿还，半年名利率 8%。如果已知第四次还款后的未结贷款余额为 5000 元，计算原始贷款金额。(10,814 元)
6. 某 20,000 元贷款将在 12 年内分期偿还。若： $(1+i)^4=2$ ，计算第四次还款后的未结贷款余额。(17,143)
7. 20,000 元抵押贷款将在 20 年内每年分期偿还，在第五次还款后，因资金短缺，随后的两年内未进行正常还贷。若借款人从第八年底重新开始还贷，为了在 20 年内还清。计算调整后的每次还款金额。

$$(20,000(1+i)^2 \frac{a_{\overline{15}|}}{a_{\overline{20}|} a_{\overline{13}|}})$$

8. 某贷款 L 原计划在 25 年内分年度等额还清。实际方式为：从第 6 次到第十次的还款中

每次多付 K 元，结果提前五年还清贷款。试证明：
$$K = \frac{a_{\overline{20}|} - a_{\overline{15}|}}{a_{\overline{25}|} a_{\overline{5}|}} L$$

9. 设 B_t 表示未结贷款余额，证明：1) $[B_t - B_{t+1}][B_{t+2} - B_{t+3}] = (B_{t+1} - B_{t+2})^2$;

2) $B_t + B_{t+3} < B_{t+1} + B_{t+2}$

10. 某贷款按季度分期偿还。每次 1000 元，还期五年，季换算名利率 12%。计算第六次还

款中的本金量。(641.86)

11. n 年期贷款，每年还款 1 元。试导出支付利息的总现值之和。 $(a_{\overline{n}|} - nv^{n+1})$
12. 10,000 元贷款 20 年还清，年利率 10%，证明第 11 次中的利息为： $\frac{10,000}{1+v^{10}}$ 。
13. 20 次分期还贷，年利率 9%。问：第几次还款中的本金量与利息量差额最小。(13)
14. 5 年期贷款分季度偿还。已知第三次还款中的本金为 100 元，季换算的名利率 10%。计算最后五次还款中的本金量之和。(724.59)
15. 现准备用 20 年时间分期偿还一笔贷款，已知前十年的年利率 i ，后十年的年利率 j 。计算：1)第五次偿还中的利息量；2)第 15 次偿还中的本金量。 $(i[a_{\overline{6}|i} + v_i^6 a_{\overline{10}|j}], v_j^6)$
16. 原始本金 A 的抵押贷款计划在尽可能长的时间内每年偿还 K 。最后一次将不足部分一次还清。计算：1)第 t 次偿还的本金量；2)摊还表中的本金部分是否为等比数列？
 $((K - iA)(1+i)^{t-1})$
17. 20 年的抵押贷款分年度偿还，每次 1 元。如果在第七次正常还款的同时，额外偿还原摊还表中第八次的本金，而且今后的还款仍然正常进行。证明还贷期间节约的利息为： $1 - v^{13}$ 。
18. 总量为 L 的贷款分 10 年偿还，已知： $v^5 = 2/3$ ，计算：1)前 5 次偿还中的本金之和；2)如果最后五次还款因故取消，计算第 10 年底的未结贷款余额。 $(.4L, .9L)$
19. 35 年贷款按年度偿还。已知第 8 次还款中的利息为 135 元，第 22 次还款中的利息为 108 元，计算第 29 次还款中的利息量。(72)
20. 某贷款分 n 次等额偿还，实利率 i ，已知第 K 次还款前的未结贷款余额首次低于原始贷款额的一半，计算 K 。
21. 年利率 2.5% 的 15,000 元贷款，每年偿还 1000 元，计算本金部分最接近利息部分的时刻。
(11)
22. 某贷款在每年的 2 月 1 日等额还贷。已知：1989 年 2 月 1 日的还款中利息为 103.00 元；1990 年 2 月 1 日的还款中利息为 98.00 元；年利率 8%。计算：1) 1990 年还款中的本金部份；2) 最后一次不足额还款的日期和金额。(67.50, 12.7 和 109.54)
23. 某贷款通过 $2n$ 次偿还。在第 n 次偿还后，借款人发现其负债为原始贷款额的 $3/4$ ，问：下一次还款中利息部份的比例。(2/3)
24. 银行提供月利率 1% 的抵押贷款。如果借款人提前将贷款余额一次付清，只需对当时余

额多付出 $K\%$ 。如果某人在第 5 年底找到另一家银行提供月利率 0.75% 的 10 年贷款，对这个借款人来说 K 的最大可接受值为多少？ (.1326)

§4.2

25. 现有 10,000 元贷款利率 10%。借款人以 8% 累积偿债基金。已知第 10 年底的偿债基金余额为 5000 元，第 11 年的还款金额为 1500 元。计算：1) 1500 元中的利息量；2) 1500 元中的偿债基金存款；3) 1500 元中偿还当年利息的部份；4) 1500 元中的本金量；5) 11 年底的偿债基金余额。(1000,500,600,900,5900)

26. 证明：
$$a_{\overline{n}|i \& j} = \frac{s_{\overline{n}|j}}{1 + is_{\overline{n}|j}}$$

27. 利率为 9% 的 10,000 元贷款每年底还利息。同时允许借款人每年初向利率为 7% 的偿债基金存款 K 元，在第 10 年底偿债基金的余额恰足以偿还贷款。计算 K 。(676.43)

28. 10 年期贷款年利率 5%，每年底还贷 1000 元。贷款的一半按摊还方式进行；另一半额外提供 4% 年利率的偿债基金方式。计算贷款额。(7610)

29. 为期 10 年的 12,000 元贷款，每半年还款 1000 元。前 5 年以 $i^{(2)} = 12\%$ 计息，后 5 年以 $i^{(2)} = 10\%$ 计息。每次还款除利息外存入利率 $i^{(2)} = 8\%$ 的偿债基金。计算第 10 年底偿债基金与贷款之间的差额。(2221)

30. 为期 10 年的 3,000 元贷款，以 $i^{(2)} = 8\%$ 计息。借款人将贷款的 1/3 通过存入利率 $i^{(2)} = 5\%$ 的偿债基金偿还；剩余的 2/3 通过存入利率 $i^{(2)} = 7\%$ 的偿债基金偿还。计算每年的还款总额。(229.87)

31. 为期 31 年的 400,000 元贷款，每年底还款 36,000 元，若以年利率 3% 建立偿债基金。计算贷款方实际的年收益率。(7%)

32. 某 20 年期末年金，以前 10 年利率 8% 后 10 年利率 7% 计算的现值为 10,000 元。某投资者以年利率 9% 买得该年金，并允许以累积偿债基金的方式收回这笔资金，偿债基金前 10 年利率为 6%，后 10 年利率为 5%。计算偿债基金的存款额。

$$\left(\frac{10,000}{[a_{\overline{10}|.08} + (1.08)^{-10} a_{\overline{10}|.07}] [1 + .09(s_{\overline{10}|.05} + (1.05)^{10} s_{\overline{10}|.06})]} \right)$$

33. 某 n 年期利率为 i 的贷款，以利率 j 建立偿债基金。试给出以下各问的表达式 ($1 \leq t \leq n$)

n): 1) 贷方每年得到的利息; 2) 偿债基金每年的存款额; 3) 第 t 年偿债基金所得利息; 4) 偿债基金在第 t 年底的余额; 5) 第 t 年底的净贷款余额; 6) 第 t 年支付的净利息; 7) 第 t 年支付的本金。

34. 为期 10 年的 100,000 元贷款, 贷款利率 12%, 同时以年利率 8% 建立偿债基金。已知前 5 年还款为 K ; 后 5 年还款为 $2K$ 。计算 K 。(13,454.36)

35. 某 10,000 元贷款以利率 $i^{(12)}=15\%$ 按月偿还利息, 同时以利率 $i^{(12)}=9\%$ 每月存款 100 元累积偿债基金, 一旦偿债基金的余额达到 10,000 元, 则结束还贷。问: 借款人总的还款额。(16,856.67)

36. 为期 25 年的 100,000 元贷款, 贷款利率 12%。如果贷款人从每年的还款中以年利率 i 提取利息, 同时将剩余部份以利率 j 累积偿债基金。分别对 $j=8\%, 12\%$ 和 16% 三种情况计算 i 。(11.38%)

§4.3

37. 十年期贷款按月偿还, $i^{(12)}=12\%$ 。首次为 600 元, 然后每次增加 5 元。计算原始贷款金额; 证明: $P_t = P_1 (1.01)^{t-1} + 5 s_{\overline{t-1}|0.01}$ 。(58,490.89)

38. 某帐户现有 1000 元存款, 每月实利率 1%, 月月结算。如果每次恰好在利息结算的下一个瞬间取出 100 元。问: 最多可以提取几次? 同时给出该帐户每月结余和利息的列表。(10)

39. 某贷款每半年偿还 K 元。已知三次连续还贷后的贷款余额为: 5190.72, 5084.68 和 4973.66。计算 K 。(349.81)

40. 利率为 i 的贷款 L , 每次偿还 K , 直至最后的不足额还款。证明:

$$B_t = \frac{K}{i} - \left[\frac{K}{i} - L \right] (1+i)^t$$

41. 一百万遗产年投资收益 5%。由 A, B 和 C 三人继承。A 每年从本金中得到 125,000 元, 累计 5 年; B 每年从本金中得到 75,000 元, 累计 5 年; C 每年得到利息。计算三人的遗产继承份额。(541,184.58; 324,710.75; 134,104.67)

42. 某 10 年期年金, 每季度 500 元, 年利率 8%。计算 10 年间所有的利息收入。(6184)

43. 五年期 10,000 元贷款, 半年名利率 12%, 除偿还利息外, 借款人每年年底以年利率 8% 的存款累积贷款本金。计算 5 年内的还贷总额。(14,523)

44. 某贷款以每年年底还 3,000 元偿还, 季换算名利率 10%。若第三次还款中的利息量为

2,000 元，计算第六次还款中的本金量。(1344.89)

45. 十年期 5,000 元贷款，季换算名利率 10%。借款人在第 10 年底一次性偿还所有累计利息和本金。为此，以半年换算名利率 7% 累计偿债基金。计算偿债基金的每次存款额。

(966.08)

46. 3,000 元贷款分季度 20 次摊还。第 11 次和 12 次因故取消。经协商，摊还从第 13 次重新开始，且每次金额为 N ，但是第 14, 16, 18 和 20 次的还款都比正常还款逐次增加 40 元。已知半年换算名利率 8%，计算 N 以保证按原计划如期还贷。(156)

47. 十年期贷款。首次还款全部用于还利息，第二次还款为第一次的两倍，第三次还款为第一次的三倍，依次类推。证明： $(Ia)_{\overline{10}|} = a_{\overline{\infty}|}$ 。

48. 贷款分十次偿还。第一次为 10 元，第二次为 9 元，依次类推。证明：第六次还款中的利息为： $5 - a_{\overline{5}|}$ 。

49. 某贷款的偿还方式为：第一年底 200 元，以后每年递增 50 元，直至 1000 元。问：如果年利率 4%，第四次还款中的本金量。(78.20)

50. 某 1,000 元贷款，每半年一次分十次等额偿还本金；同时按照半年换算名利率 6% 偿还利息。为了保证半年换算名利率 10% 的收益率，计算该贷款的出让价格。(908.87)

51. 8,000 元 20 年期抵押贷款，每半年偿还 100 元再加上贷款余额的利息（利率 5%）。在恰好得到第 15 次还款后，贷款人转卖了这个贷款，价格为年利率 6% 偿债基金利率 4%。假定以上所有利率均为半年换算名利率。证明：1) 如果每半年的净回报相等，贷款转

让价格为： $\frac{75s_{\overline{25}|.02} + 6250}{1 + .03s_{\overline{25}|.02}} = 4412$ ；2) 如果每半年的偿债基金的存款额相同，则转让

价格为： $\frac{s_{\overline{25}|.02} a_{\overline{25}|.03} + 125}{.03a_{\overline{25}|.03} + 1 + .03s_{\overline{25}|.02}} = 4453$ 。

52. 利率 10% 的 2000 元贷款，还贷方式：第一年底 400 元，然后按 4% 的比例递增，最后一次将少量余额付清。1) 计算第三年底的未结贷款余额；2) 计算第三次偿还中的本金量。(1287.76, 276.24)

53. 两笔 30 年等额贷款都以 4% 利率偿还。甲每年等额偿还；乙每年的还款中的本利相同。计算甲的还款额首次超过乙的时刻。(13)

54. 甲以实利率 i 投资。第一年底取出利息收入的 162.5%，第二年底取出利息收入的 325%，依次类推。已知在第 16 年底原始投资资金全部收回。计算 i 。(4%)

55. 贷款额为 $a_{\overline{25}|}$ 的贷款以连续年金方式偿还, 连续偿还函数为 1, 期限 25 年。如果: $i=.05$, 计算第六年到第十年间的偿还利息总额。(2.8659)

56. 证明并解释含义: $(1+i)^t - \frac{s_{\overline{t}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{a_{\overline{n-t}|}}{a_{\overline{n}|}}$ 。

57. 连续方式偿还的 n 年期贷款, 时刻 t 的偿还额为 t 。给出未结贷款余额的计算式。

58. 连续方式偿还的 10 年期贷款, 已知贷款余额呈线性变化。已知连续利率为 10%。计算: 1) 前 5 年偿还的本金总额; 2) 前 5 年偿还的利息总额。(1.5, .375)

59. 已知某保险赔偿方式为: 截至索赔发生后 t 时刻的未赔偿额为 $a e^{-bt}$ 。计算: 1) 连续赔偿函数 $P(t)$; 2) 索赔发生时的未赔偿额; 3) 如果连续利率为 d , 计算所有未赔偿额在时刻 t 的现值。($a b e^{-bt}$, a , $\frac{ab}{b+d} e^{-bt}$)

§4.4

60. 2000 元贷款是通过每季度偿还 P 元进行还贷。贷款方要求对未结贷款余额中低于 500 元的部分利率 $i^{(4)}=16\%$, 对超过 500 元的部分利率 $i^{(4)}=14\%$, 如果已知第一年底的余额为 1000 元, 计算 P 。(310)

61. 按季度分期偿还的 1000 元贷款, 每次尽可能还款 100 元, 不足部分的余额最后一次付清。贷款方要求对未结贷款余额中低于 500 元的部分利率 $i^{(4)}=12\%$, 对超过 500 元的部分利率 $i^{(4)}=8\%$ 。计算: 1) 第四次还款中的本金; 2) 证明: 在未结贷款余额达到 500 元之前, 每次的本金加上一个常数后形成等比数列, 即:

$$\frac{P_{t+1} + K}{P_t + K} = 1 + j, \quad t=1, 2, \dots, n-1. \text{ 计算: } K \text{ 和 } j. (79.59, 15, 12/3\%)$$

62. 某 3000 元贷款要求在一年内逐月分期偿还。对未结贷款余额在 1000 元以下的部分以月利率 1.5% 计息; 对未结贷款余额在 1000 元到 2000 元之间的部分以月利率 1.25% 计息; 对未结贷款余额在 2000 元到 3000 元之间的部分以月利率 1% 计息。计算每次的还款金额。(272.42)

63. 证明并给出文字解释: $a_{\overline{n}|} + i \sum a_{\overline{n-t}|} = n$ 。

64. 某遗产恰好可以以年利率 3.5% 每年得到 10,000 元, 累计十年。已知在过去的五年中按计划实施, 但是实际的年收益率为 5%。问: 第五年底遗产本身多收入多少利息。(5736)

65. 某人在银行存入十年定期存款，计划十年底连本带利取出 10,000 元，年利率 5% 在第 5 年底银行下调利率为 4%。分别计算前 5 年和后 5 年每年的存款额。

(757.19, 826.40)

66. 某企业当前产品的月产量为 9,000 个单位，单位售价为 85 元。现有一种新产品开发计划：初始贷款 1,500,000 元（每月付利息 1.5%，本金 40 个月后一次还清），然后每月成本为 15,816 元，新产品的月产量为 12,000 个单位。如果该企业有能力以月利率 1% 累计偿债基金。企业希望新产品月利润超过老产品 30,000 元，且单位价格下降 X ，计算 X 。(72.00)

67. 年利率 8% 的 20 年期贷款，因故未能在第 6, 7 和 8 年底进行正常还贷。作为补偿，要求在第 9 和 20 年底多还 X 元。计算这种情况与正常还贷的利息差。

$$\left(X \left[12 \frac{s_{\overline{3}|}}{a_{\overline{12}|}} - 3 \right] \right)$$

68. 利率为 i 的贷款 L ，通过 n 次还款 K_1, K_2, \dots, K_n 偿还。在每次偿还中需要以税率 r 付利息税。试说明：贷款人得到的税后还款的现值相当于以利率 $i(1-r)$ 提供的贷款。

69. 某人准备以二十万元出售住房，购房者首次只能付十万元，余款由银行月利率 1.25% 贷款偿还。这时售房者可以提供月利率 1% 的 25 年贷款，条件是三年后购房者必须自融资当时的贷款余额。双方达成协议后，售房者以三年的月收益率 1.25% 将贷款转卖给中介人。问：售房者的实际售房收入。(192,858)

70. 十年期 1000 元贷款，利率 5%。如果借方加快还贷，每次还款中超过原计划的部分必须收 2% 的附加利息。如果借款人第一年底还款 300 元，第二年底还款 250 元，计算第三年还款未进行之前的未结贷款余额。(571)

71. 7000 元贷款月结算名利率 8% 的还贷计划如下：从第一个月底开始 60 次还清。另外一个还款方式：直至第 15 个月底开始按月还贷，月还款额不变，然后在第 60 次还款时，将余额一次还清。计算第 60 次还款的金额。(1037)

72. 某公司可提供以下方式的贷款：借款人每年连续地付利息 500 元，此外，在第 3、4 或 5 年底一次性偿还 10,000 元。如果你认为可接受的贷款年利率为 10%，问：年最多可以从该公司得到多少贷款？(7774.07)

73. 年实利率 5% 的贷款可以选择以下两种还贷方式：方式一，每年等额还贷 20 次还清；方式二，每年的还款中本金量相同，利息量为未结贷款余额的应计利息。问：第几次还款

时方式一的年还款额首次超过方式二的年还款额。(9)