

## 《利息理论与应用》第二章练习题

重点练习题：1, 2, 5, 10, 12, 20, 27, 28, 39, 40, 44, 45, 48, 49, 54, 57, 60, 66, 69, 71

### §2.1

1. 某家庭从子女出生时开始累积大学教育费用 5 万元。如果它们前十年每年底存款 1000 元，后十年每年底存款  $1000+X$  元，年利率 7%。计算  $X$ 。(651.72)
2. 价值 10,000 元的新车。购买者计划分期付款方式：每月底还 250 元，期限 4 年。月结算名利率 18%。计算首次付款金额。(1489.36)
3.  $n$  年、 $n$  元期末年金，实利率  $i=1/n$ 。计算现值。 $(n^2[1-(\frac{n}{n+1})^n])$
4. 已知： $a_{\overline{n}|} = X$ ， $a_{\overline{2n}|} = Y$ 。用  $X$  和  $Y$  表示  $d$ 。 $(1-(\frac{Y-X}{X})^{1/n})$
5. 已知： $a_{\overline{7}|} = 5.135$ ， $a_{\overline{11}|} = 7.036$ ， $a_{\overline{18}|} = 9.180$ 。计算  $i$ 。(8.3%)
6. 证明： $\frac{1}{1-v^{10}} = \frac{s_{\overline{10}|} + a_{\overline{\infty}|}}{s_{\overline{10}|}}$ 。
7. 已知：半年结算名利率 6%，计算下面年金的现值：从现在开始每半年付款 200 元，共计 4 年；然后，减为每次 100 元，共计 10 年。(2389.72)
8. 某人现年 40 岁，现在开始每年初在退休金帐号上存入 1000 元，共计 25 年。然后，从 65 岁开始每年初领取一定的退休金，共计 15 年。设前 25 年的年利率为 8%，后 15 年的年利率 7%。计算每年的退休金。(8102)
9. 已知贴现率为 10%，计算  $\ddot{a}_{\overline{8}|}$ 。(5.6953)
10. 求证：1)  $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + 1 - v^n$ ；2)  $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} - 1 + (1+i)^n$ 。并给出两式的实际解释。
11. 求证： $\frac{\ddot{s}_{\overline{2n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{2n}|}} - \frac{\ddot{s}_{\overline{3n}|}}{\ddot{s}_{\overline{2n}|}} = 1$
12. 从 1980 年 6 月 7 日开始，每季度年金 100 元，直至 1991 年 12 月 7 日，季结算名利率 6%，计算：1) 该年金在 1979 年 9 月 7 日的现值；2) 该年金在 1992 年 6 月 7 日的终值。  
(3256.88      6959.37)

13. 现有价值相等的两种期末年金 A 和 B。年金 A 在第 1—10 年和第 21—30 年中每年 1 元，在第 11—20 年中每年 2 元；年金 B 在第 1—10 年和第 21—30 年中每年  $Y$  元，在第 11—20 年中没有。已知： $v^{10}=1/2$ ，计算  $Y$ 。(1.8)
14. 已知年金满足：2 元的  $2n$  期期末年金与 3 元的  $n$  期期末年金的现值之和为 36，另外，递延  $n$  年的 2 元  $n$  期期末年金的现值为 6。计算  $i$ 。(7%)
15. 已知： $\frac{a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{11}|}} = \frac{a_{\overline{3}|} + s_{\overline{X}|}}{a_{\overline{Y}|} + s_{\overline{Z}|}}$ ，求  $X$ ， $Y$  和  $Z$ 。(  $X=4$ ,  $Y=7$ ,  $Z=4$  )
16. 化简： $a_{\overline{15}|} [1 + v^{15} + v^{30}]$ 。(  $a_{\overline{45}|}$  )
17. 计算下面年金在年初的现值：首次在下半年的 4 月 1 日，然后每半年一次 2000 元，半年结算名利率 9%。(16,178)
18. 某递延永久年金的买价为  $P$ ，实利率  $i$ ，写出递延时间的表达式。 $(1 - \frac{\ln(iP)}{d})$
19. 从现在开始每年初存入 1000 元，一直进行 20 年。从第三十年底开始每年领取一定的金额  $X$ ，直至永远。计算  $X$ 。(  $1000[(1+i)^{30} - (1+i)^{10}]$  )
20. 某人将遗产以永久年金的方式留给后代 A、B、C、和 D：前  $n$  年，A、B 和 C 三人平分每年的年金， $n$  年后所有年金由 D 一人继承。如果四人的遗产份额的现值相同。计算  $(1+i)^n$ 。(4)
21. 永久期末年金有 A、B、C、和 D 四人分摊，A 接受第一个  $n$  年，B 接受第二个  $n$  年，C 接受第三个  $n$  年，D 为所有剩余的。已知：C 与 A 的份额之比为 0.49，求 B 与 D 的份额之比。(30/49)
- §2.2
22. 1000 元年利率 4.5% 的贷款从第五年底开始每年还贷 100 元，直至还清，如果最后一次的还款大于 100 元。计算最后一次还款的数量和时间。(146.07 21)
23. 36 年的期末年金每次 4 元，另有 18 年的期末年金每次 5 元；两者现值相等。如果以同样的年利率计算货币的价值在  $n$  年内将增加一倍，计算  $n$ 。(9)
24. 某借款人可以选择以下两种还贷方式：每月底还 100 元，5 年还清； $K$  个月后一次还 6000 元。已知月结算名利率为 12%，计算  $K$ 。(29)
25. 已知： $a_{\overline{2}|} = 1.75$ ，求  $i$ 。(  $\frac{4\sqrt{2}-5}{7}$  )

26. 某人得到一万元人寿保险赔付。如果购买 10 年期末年金可以每年得到 1538 元，20 年的期末年金为每年 1072 元。计算年利率。(8.7%)

27. 某人在银行中存入一万元 10 年定期存款，年利率 4%，如果前 5 年半内提前支取，银行将收取余额的 5% 作为惩罚。已知：在第 4、5、6 和 7 年底分别取出  $K$  元，且第十年底的余额为一万元，计算  $K$ 。(980)

28. 贷款  $P$  从第六个月开始分十年逐年还清。第一次的还款额为后面还款的一半，前四年半的年利率为  $i$ ，后面的利率为  $j$ 。计算首次付款金额  $X$  的表达式。

$$\left( X = \frac{P(1+i)^{1/2}}{2a_{4|i} + 2(1+i)^{-4} a_{6|j} - 1} \right)$$

29. 计算下面年金在首次付款 18 年后的终值：每两年付款 2000 元，共计 8 次。已知半年名利率为 7%。(35, 824)

30. 计算下面十年年金的现值：前 5 年每季度初支付 400 元，然后增为 600 元。已知年利率为 12%。(11, 466)

31. 已知半年结算的名贴现率为 9%，计算每半年付款 600 元的十年期初年金的现值表达式。

$$\left( 600 \frac{1 - (1 - 4.5\%)^{20}}{4.5\%} \right)$$

32. 给出下面年金的现值：在第 7、11、15、19、23 和 27 年底支付一个货币单位。

$$\left( \frac{a_{28|} - a_{4|}}{s_{3|} + a_{1|}} \right)$$

33. 750 元的永久年金和每 10 年付款 750 元的永久年金可以用每次  $R$  元的 30 年期末年金代替，半年结算名利率

$$4\%, R \text{ 的表达式。} \left( R = 37500 \left[ \frac{1}{s_{2|}} + \frac{v^{40}}{a_{40|}} \right] \frac{s_{2|}}{a_{60|}} \right)$$

34. 已知每三年付款一元的永久年金的现值为  $125/91$ ，计算年利率。(20%)

35. 已知：1 元永久期初年金的现值为 20，它等价于每两年付款  $R$  元的永久期初年金，计算  $R$ 。(1.95)

36. (期初) 递延年金：每半年 500 元，价格为 10,000 元。用贴现率表示递延时间。

$$\left( \frac{\ln[20(1 - \sqrt{1-d})]}{\ln(1-d)} \right)$$

37. 如果:  $3a_{\overline{n}|}^{(2)} = 2a_{\overline{2n}|}^{(2)} = 45s_{\overline{1}|}^{(2)}$ , 计算  $i$ 。(1/30)
38. 计算年金的现值: 现在开始每四个月 1 元, 共 12 年,  $i^{(4)} = 16\%$ 。
39. 已知:  $d_t = \frac{1}{1+t}$ , 求  $\bar{a}_{\overline{n}|}$  的表达式。(  $\ln(n+1)$  )
40. 已知一年内的连续年金函数为常数 1, 计算时刻  $t$ , 使得只要在该时刻一次性支付一个货币单位, 则两种年金的现值相等。(  $1 - \frac{1}{d} \ln(\frac{i}{d})$  )
41. 已知:  $\delta = .08$ , 计算从现在开始每个季度存入 100 元的年金的现值。
42. 现有金额为 40,000 元的基金以 4% 的速度连续累积。同时每年以 2400 元的固定速连续地从基金中取钱, 该基金可以维持多少时间? (27.47 年)

### §2.3

43. 已知某永久期末年金的金额为: 1, 3, 5, ...。另外, 第六次和第七次付款的现值相等, 计算该永久年金的现值。(66)
44. 给出现值表达式  $Aa_{\overline{n}|} + B(Da)_{\overline{n}|}$  所代表的年金序列。用这种表达式给出如下 25 年递减年金的现值: 首次 100 元, 然后每次减少 3 元。
45. 某期末年金 (半年一次) 为: 800, 750, 700, ... 350。已知半年结算名利率为 16%。若记:  $A = a_{\overline{10}|.08}$ , 试用  $A$  表示这个年金的现值。(6250 - 325A)
46. 年利率 8% 的十年储蓄: 前 5 年每年初存入 1000 元, 然后每年递增 5%。计算第十年底的余额。(16,607)
47. 已知永久年金的方式为: 第 5、6 年底各 100 元; 第 7、8 年底各 200 元, 第 9、10 年底各 300 元, 依此类推。证明其现值为:  $100 \frac{v^4}{i - vd}$
48. 十年期年金: 每年的 1 月 1 日 100 元; 4 月 1 日 200 元; 7 月 1 日 300 元; 10 月 1 日 400 元。证明其现值为:  $1600\ddot{a}_{\overline{10}|} (I^{(4)}\ddot{a})_{\overline{1}|}^{(4)}$
49. 从现在开始永久年金: 首次一元, 然后每半年一次, 每次增加 3%, 年利率 8%, 计算现值。(112.59)
50. 某人为其子女提供如下的大学费用: 每年的前 9 个月每月初 500 元, 共计 4 年。证明当前的准备金为:  $6000\ddot{a}_{\overline{4}|} \ddot{a}_{\overline{9}|}^{(12)}$ 。
51. 现有如下的永久年金: 第一个  $K$  年每年底还  $R$ ; 第二个  $K$  年每年底还  $2R$ ; 第三个  $K$

年每年底还  $3R$ ；依此类推。给出现值表达式。 ( $R \frac{\ddot{a}_{k|}}{(ia_{k|})^2}$ )

52.  $X$  表示首次付款从第二年底开始的标准永久年金的现值， $20X$  表示首次付款从第三年底开始的永久年金：1, 2, 3, ... 的现值。计算贴现率。(1/21)

53. 四年一次的永久年金：首次 1 元，每次增加 5 元， $v^4=0.75$ ，计算现值。(48)

54. 永久连续年金的年金函数为： $(1+k)^t$ ，年利率  $i$ ，如果： $0 < k < i$ ，计算现值。 ( $\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_k}$ )

55. 递延一年的 13 年连续年金的年金函数为： $t^2 - 1$ ，利息力为： $(1+t)^{-1}$ ，计算现值。(84.5)

56. 给出  $\sum_1^n (Ia)_{\overline{n}|i}$  和  $\sum_1^n (Da)_{\overline{n}|i}$  的表达式。 ( $\frac{n(1+i) - 2\ddot{a}_{n|} + nv^n}{i^2}$ ;  $\frac{i}{2} \frac{n(1+n) - n + a_{n|}}{i^2}$ )

#### §2.4

57. 现有两种永久年金：A—金额为  $p$  的固定期末年金；B—金额为： $2q, 3q, \dots$  的递增期末

年金。分别对两种年金的现值之差为 0 和得到极大两种情况计算年利率。 ( $\frac{q}{p-q}$ ;  $\frac{2q}{p-q}$ )

58. 某零件的使用寿命为 9 年，单位售价为 2 元；另一种产品，使用寿命 15 年，单价增加  $X$ 。如果某人需要 35 年的使用期，假定在此期间两种产品的价格均以年增 4% 的幅度增加，

要使两种产品无差异的  $X$  为多少？ ( $2[\frac{a_{\overline{36}|}}{a_{\overline{9}|}} \frac{a_{\overline{15}|}}{a_{\overline{45}|}} - 1] = 1.2$ )

59. 计算  $m+n$  年的标准期末年金的终值。已知：前  $m$  年年利率 7%，后  $n$  年年利率 11%，

$s_{\overline{m}|.07} = 34$ ， $s_{\overline{n}|.11} = 128$ 。(640.72)

60. 甲持有 A 股票 100 股，乙持有 B 股票 100 股，两种股票都是每股 10 元。A 股票每年底得到红利 0.40 元，共计 10 年，在第 10 次分红后，甲以每股 2 元的价格将所有的股票出售，而且，甲以年利率 6% 的收益率将红利收入和股票出售的收入进行投资。B 股票在前 10 年没有红利收入，从第 11 年底开始每年得到红利 0.80 元，如果乙也是以年利率 6% 进行投资，并且在  $n$  年后出售其股票。为了使甲乙在乙的股票出售时刻的累积收入相同，分别对  $n=15, 20$  和  $25$  三种情况计算乙的股票出售价格。(5.2, 2.5, 不可能)

61. 某奖学金从 1990 年元旦开始以十万元启动，每年的 6 月 30 日和 12 月 31 日用半年结算名利率 8% 结算利息。另外，从 1991 年元旦开始每年初可以固定地收到捐款 5000 元。

每年的 7 月 1 日要提供总额为一万二千元的奖金。计算在 2000 年元旦的 5000 元捐款后基金的余额。(约为十七万五千元)

62. 已知贷款  $L$  经过  $N$  (偶数) 次、每次  $K$  元还清, 利率  $i$ 。如果将贷款额减少一半, 记每次的还款为  $K_1$ , 试比较  $K_1$  与  $2K$  的大小。
63. 已知贷款  $L$  经过  $N$  次、每次  $K$  元还清, 利率  $i$ 。如果将每次的还款额增加一倍, 比较新的还款次数与  $N/2$  的大小。
64. 从 1990 年的元旦开始在每年的 1 月和 7 月的第一天存款 500 元, 年利率 6%, 问: 什么时刻, 余额首次超过一万元、十万元。(8, 33)
65. 帐户 A 从 1985 年元旦开始每年初存款 1000 元, 共计 10 年; 帐户 B 从 1985 年元旦开始每年初存款 500 元; 两帐户年利率均为 5%。问: 何时帐户 B 的余额首次超过帐户 A。(2015 年元旦)
66. 已知:  $A = s_{\overline{n}|i}$ ,  $B = s_{\overline{n+1}|i}$ 。用  $A$  和  $B$  给出  $n$  和  $i$  的表达式。
67. 已知: 1)  $A = a_{\overline{n}|i}$ ,  $B = s_{\overline{n+1}|i}$ ; 2)  $A = a_{\overline{n}|i}$ ,  $B = a_{\overline{2n}|i}$ ; 3)  $A = a_{\overline{n}|i}$ ,  $B = s_{\overline{2n}|i}$ 。分别对以上三种情况给出  $i$  的表达式。
68. 对于固定的  $n$  和  $L$ , 且  $L > n$ , 证明:  $L = a_{\overline{n}|i}$  在  $-1 < i < 1$  上有唯一解。
69. 证明:  $(Ia)_{\overline{n}|i} + (Da)_{\overline{n}|i} = (n+1)a_{\overline{n}|i}$ ;  $s_{\overline{n+1}|i} = i(Is)_{\overline{n}|i} + (n+1)$ 。并给出实际背景解释。
70. 当  $i > 0$ ,  $n > 1$  时, 证明:  $(Ia)_{\overline{n}|i} < [(n+1)/2]a_{\overline{n}|i} < (Da)_{\overline{n}|i}$ 。
71. 某雇员在退休前的第 37 年参加企业养老金计划。年收入为 18,000 元, 然后每年以 4% 的速度增加, 假定提薪恰好在每年的年中进行。计算: 分别对以下两种退休金方式计算年退休金占退休前一年年薪的比例: 如果年退休金为工作期间年平均工资的 70%; 年退休金为年平均工资的 2.5%再乘以工作年限。2) 如果企业和个人分别将年工资的 3%存入年利率 6%的养老基金, 试对以上两种退休金方式计算退休金的领取年限。(37.7%, 49.8%, 11.53, 7.94,)
72. 已知永久期初年金为: 首次 1 元; 第二年初  $1+2=3$  元; 第三年初  $1+2+3$  元; 依此类推; 第  $n$  年初  $1+2+\dots+n$  元。证明该年金的现值为:  $\ddot{a}_{\infty|} (I\ddot{a})_{\infty|}$
73. 已知连续年金函数为  $f(t)$ , 0 时刻的年金为  $F_0$ , 利息力  $\delta$ , 如果用  $F_t$  表示时刻  $t$  的

金终值，证明： $\frac{dF_t}{dt} = dF_t + f(t)$ 。

74. A 从 B 处借得 10,000 元，年利率 4%，计划分 40 次按季度等额偿还。在第 6 年底，B 希望立即收回所有借款，因此将今后接受还款的权利转卖给 C，转卖价格使 C 今后几年的年收益率将达到 6%，计算转卖价格。(4147)
75. 现有两种年收益率相同的投资选择：A—第 5 年底收益 800 元，第 10 年底收益 100 元；B—10 年间每年年底收益 100 元。如果投资 A 的成本为 425 元，计算投资 B 的成本。(505)
76. 已知： $a_{\overline{5}|} = 3.982$ ， $a_{\overline{10}|} = 6.680$ ， $a_{\overline{15}|} = 8.507$ ，计算利率  $i$ 。(0.081)
77. 某人有 3700 元的借款，今后在每月初还款 325 元，问：在一年内还清借款的可接受年利率为多少？(12.31%)
78. 永久年金 A 有如下的年金方式：1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...；永久年金 B 有如下的年金方式： $K, K, 2K, 2K, 3K, 3K, \dots$ 。如果两个年金的现值相等，计算  $K$ 。  
$$\left( \frac{a_{\overline{2}|}}{a_{\overline{3}|}} \right)$$
79. 永久年金的年金方式为：1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 4, ... 每年底支付，假定年实利率 5%，计算现值。(66.59)
80. 在 5 年中每年初存入 100 元，已知第 5 年底的余额为 620 元，计算单利率。(8%)
81. 实利率  $i$  满足以下条件：即期年金: 1, 2, 3, 4, 5, ...,  $n-1, n$  的现值为  $A$ ； $n$  年底的單位支付的现值为  $iP$ 。试给出  $a_{\overline{n}|}$  的表达式。
82. \$10,000 存入年利率 6% 的帐户。从第三年底开始连续每年底提取 \$1000。一旦帐户余额低于 \$1000，则将余额一次提取。计算正常提取的次数？
83. 已知： $d_t = \ln(1+2k)$  和  $a_{\overline{4}|} = 3.17$ 。计算  $K$ 。
84. 期末年金 X 每年一万元，期限 20 年；期末年金 Y 每年一万五千元，期限 10 年。在相同的年实利率条件下，两个年金的现值相同，计算年实利率？