第七章　　利率风险分析

到本章为止的讨论，都是在利率（或收益率）水平固定（静态）的环境中进行的。而现实的金融市场中，利率经常是随时间变化的。这种变化是通过所处环境的时间起点和时间期限来体现的。考虑到现实金融市场中利率环境的这种特点，一般可以将研究的问题分为两个大的方面：一是研究利率本身的变化规律；一是研究受利率影响的金融产品和市场的变化规律。进而分析影响利率水平的因素，以及在进行具体的现金流计算时，应该选取什么利率水平。

§7.1 一般分析

从历史上看，各个国家在不同时期的利率水平发生了很大的变化。在 1945 年美国的政府债券的平均收益率仅为 0.33%，而到了 1981 年同样的债券的同期收益率为 14.7%。即使在 1980 年，8 月份的优惠利率（prime rate，指大商业银行对一些资信良好的大企业短期贷款的利率，也是商业银行贷款的最低利率）亦有 11%，到 12 月份为 21.5%。中国自 1980 年至 2000 年的二十年间利率在水平和结构上都有很大的变化，

用基本的经济学原理分析：利率水平从某种意义上讲是一种价格，应该由供求平衡来决定它的值。如果借款的需求很大，利率将上升；反之，如果这种需求不是很强，利率将下降。这一点直观看很简单，但是，实际经济生活中的利率水平是多种因素综合作用的结果。下面列出了一些影响利率水平的因素：

1)　内在“纯”利率（pure）

许多经济学者和金融理论家都认为存在一个内在的纯利率，它与长期的经济发展水平有关。如果不考虑通货膨胀因素，这个利率将代表无风险投资的收益率。可以证明这种利率会稳定很长时间，例如：美国 20 世纪的几十年间，这个利率一直介于 2%和 3%之间。

2）　通货膨胀率

3）　风险和不确定性

4）　投资期限

5）　信息的质量

在金融理论中认为，一个“有效”（efficient）的金融市场中，买卖双方应该拥有相同容量的市场信息，而利率正是在此基础上形成的。但实际上，即使有现代化的通讯和数据处理设备和工具，仍然有一些市场中的死角将影响利率的水平。

6）　法律的约束

有时政府会对利率水平作一些限制，在美国近几年有放松管制的趋势，所以这种因素的影响较过去已降低许多。但是，某些利率仍然受到法规的限制。

7）　政府的政策

美国联邦政府通过实施货币政策和财政政策对总体的利率水平产生影响，甚至是控制。基本的控制手段是：美联储（Federal Reserve Board）对货币供应量的调整。同时，政府的赤字或盈余也对信贷市场的需求产生重要影响。

8） 随机波动

在实际业务中常有一些表示利率变动的术语：1）基点（basis point），计算利率变动的计量单位。一百个基点表示 1%。例如：利率从 9%涨到 9.25%，就可以称利率上涨了 25 个基点。2）利差（spread），用于比较两种利率的差。在投资问题中常以国债的收益率做为比较的基础，如果一年期国债的收益利率为 8.25%，另外有一种金融产品的收益利率为 9.50%，一般表述为："一年期国债的利差为 125 个基点"。

在以上列出的诸多因素中，只对其中的通货膨胀和随机波动两个因素做进一步的分析。

7.1.1 通货膨胀与利率

利率与通货膨胀率的关系也是随着时间而变化的。从世界范围看，第二次世界大战之前，这两者的关系并不明了。事实上，从 19 世纪年代到第二次世界大战之前，都很难说通货膨胀的预期对利率有系统的影响。从第二次世界大战结束后，两者开始显现一种关系，利率对通货膨胀有着正面的积极的影响。

显然易见，金融市场的公布利率与通货膨胀率一般是正相关的，即这两个量随着时间的推移将沿着相同的方向变化。这一点从表面上看似乎是合理的，因为通货膨胀率表示购买能力因时间的推移而造成的损失，而贷款人至少要通过利率以补偿其在资本购买力上的损失。实际上，必须将这种直观的感觉做进一步的分析。可以发现以上所谓的正相关关系只对同样时期的利率和通胀率成立。所以，如果要考虑通货膨胀率因素，那么同一时期的利率应高于通货膨胀率，这样才能保证实质上的利息收入。

一般情况下，称利率扣除了通货膨胀率后的部分为实际利率（real rate of interest），用 i' 表示。市场中的现行利率被称为"名义利率"（nominal rate of interest），用 i 表示。如果 r 表示同期的通货膨胀率，自然有以下关系：

$$1+i = (1+i')(1+r) \tag{7.1.1}$$

进而有：

$$i = i' + r + i'r \tag{7.1.2}$$

即：名义利率等于实际利率与通货膨胀率及两者的乘积之和。

因为一般情况下利率均为较小的数值，所以，有时将式(7.1.2)中的乘积项 $i'r$ 省略。进而得到常见的结论：名义利率为实际利率与通货膨胀率之和。也就是著名的"Fisher 效应"：

$$i = i' + r \tag{7.1.3}$$

自然，如果在一定的时期内实际利率的水平变化不大，则市场上的名义利率的变化与通货膨胀率的

变化是同步的。

当然，也可以通过定义反解出实际利率 i'：

$$i' = \frac{i-r}{1+r} \qquad \text{或} \qquad 1+i' = \frac{1+i}{1+r} \tag{7.1.4}$$

在考虑通货膨胀率的情况下，利息计算会有一些变化。下面具体分析。

1） 现值计算。

考虑 n 期期末年金的现值，如果年金的金额随着通货膨胀率同步递增（这也是保值常用的一种方式，或者称之为扣除通货膨胀的影响），首次付款用 $R(1+r)$ 表示，以名义利率计算的现值公式为：

$$R[(1+r)v+(1+r)^2v^2+\cdots+(1+r)^nv^n]=R(1+r)\frac{1-(\frac{1+r}{1+i})^n}{i-r} \tag{7.1.5}$$

如果用 i' 表示上式，则有：

$$R[(1+i')^{-1}+(1+i')^{-2}+\cdots+(1+i')^{-n}]=R\,a_{\overline{n}|i'} \tag{7.1.6}$$

2）终值计算。

例如某投资者以利率 i 投资 A 元，n 期。到期时的收益为：$A(1+i)^n$。但是，如果考虑通货膨胀因素，这笔投资在到期时的实际收益为：$A\frac{(1+i)^n}{(1+r)^n} = A(1+i')^n$。因此，必须区别名义投资收益和实际投资收益。

例 7.1 某保险公司在人身意外伤害保险的赔付条款中采用了年金赔付方式：首次赔付 24,000 元，余额按 10 年期末年金方式赔付，从第一次年金赔付开始赔付金额按照零售物价指数 5%逐年递增，同期市场年利率 8%，计算：年金赔付责任的现值。

解 已知：$i=.08$ $r=.05$

由公式(7.1.4)，有：

$$i' = (.08-.05)/(1+.05) = .028571$$

由公式(7.1.5)和(7.1.6)，年金赔付的现值为：

$$24{,}000(1.05)\frac{1-(\frac{1.05}{1.08})^{10}}{.08-.05} = 24{,}000\,a_{\overline{10}|.028571} = 206{,}226.00$$

所以，该保单的合计赔付金额（现值）为 24,000+206,226.00，近似为二十三万元。

7.1.2 风险、不确定性与利率

在前面的所有讨论中，都假定未来的现金流的金额和时间是确定的，但是在现实情况中肯定存在发生时间和数量不确定的现金流。例如简单的标准借贷业务，也存在以下这些风险：不能按期支

付、提前支付或是对抵押贷款的再融资风险、再投资利率变化的风险和早赎的风险等。

一般情况下，有两种影响投资的市场价值的主要风险：一是市场风险：金融市场的变化（表现为不同的到期收益率）引起现金流价值的变化；二是信用风险（credit risk）：金融产品本身的风险行为。例如：考虑 A 和 B 两种溢价债券，有相同的息票收入、兑现值和到期日。A 是由政府财政部发行的国债；B 是一种高风险的企业债券。显然，这两种债券的市场风险是相同的。但是，从产品本身的内在风险因素考虑，B 在市场中的售价应低于 A，即 B 的到期收益率应高于 A。

如果在评估有风险的债券的价值时，仍然用收益率作为评估的方法，这种收益率计算将比无风险情形的收益率计算复杂得多。下面用一个例子说明这种情况下问题的复杂之处，请读者仔细体会这种收益率的真正意义。

为了区别是否为有风险的债券，在一般的市场中都会确定或假设一个无风险收益率（risk-free return rate 或 default-free rate），这个收益水平是指在任何情况下都确定的投融资水平。

例 7.2 现有一年期面值 1000 元的债券，年息率 8%，到期按照面值兑现。如果目前市场的无风险投资的收益率为 8%，则按面值出售；另有一种债券，是一个处于成长期的企业发行的，面值 1000 元、年息率 8%，到期兑现本金是有条件的：如果企业运行良好，则按照面值兑现，否则只支付息票，不兑现本金，当然这种债券的市场售价应该低于前一种证券，这里为 940 元，60 元的差价是考虑后一种债券存在的违约风险后对购买者的风险补偿。试评估后一种债券的收益率。

解 如果按以前的方法直接计算后一种债券的年收益率，则有：

$$940 = 1080(1+i)^{-1}$$

解得：$i = 14.89\%$，它表示一种风险投资的收益率。看上去比无风险债券的收益率高出 6.89%。但是，直观上可以发现这种“高收益”是不确定的。解毕。

定义 7.1 实际收益率与无风险收益率的差称为“风险报酬”或“风险溢价”（risk premium）。

由定义知例 7.2 中的 6.89%为风险报酬。显然，应该是投资风险越大风险报酬越高。但这种计算造成了一种高收益的假象，可能会对投资者产生误导。因为上述 14.89%的收益率代表不违约情况的收益率，一旦发生全额（本金和息票）违约，投资者的收益率为-100%（940 元的投资全部损失），如果发生部分违约，收益率将介于-100%与 14.89%之间。这里，可以认为 940 的买价即包括预期收益率的成分也包括对未来违约风险的估计。换句话说，现在的买价是对未来收益现值的“预期”（EPV, Expectation of Present Value）结果。用概率论的语言可以将这个投资问题描述为：

未来收益的现值用随机变量 X 表示，考虑它有两种可能的取值：$1080(1.08)^{-1}$（不发生违约）和 0（全部违约），两种取值的概率分别为 p 和 $1-p$，因此，X 的数学期望为：$p(1080)(1.08)^{-1}$。如果假定买价为未来收益现值的数学期望，则有：

$$940 = p(1080)(1.08)^{-1}$$

解得：$p = 0.94$。即：（没有任何收益的）风险概率为 6%，无风险利率 8%。另一方面，前面的高收益率 14.89%与风险概率的关系为：

$$14.89\%\times0.94+(-100\%)\times0.06=8\%$$

这表明，从直观上看，存在无风险利率 8%的投资条件下，考虑投资于违约风险 6%的投资是不一定合算的，很难说后一种债券是较好的选择。

更一般的情况，可以考虑：在时刻 $1,2,\ldots n$ 的预计收益现金流为 $R_1, R_2, \ldots, R_n$；实际（随机）现金流为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$；能够正常得到这些收益的概率（且互相独立）分别为：$p_1, p_2, \ldots, p_n$，其中 p_t 表示可以得到收益 R_t 的可能性，用概率论的语言可表示为 $p_t=\Pr(X_t=R_t)=1-\Pr(X_t=0)$，$t=1,2,\ldots,n$；如果市场的无风险利率为 i，这组收益现值的数学期望为：

$$\text{EPV}=\sum_1^n R_t(1+i)^{-t}p_t \tag{7.1.7}$$

这时候，对应的风险投资收益率为满足下面方程的解 i_p：

$$\sum_1^n R_t(1+i)^{-t}p_t=\sum_1^n R_t(1+i_p)^{-t}$$

显然有：$i_p>i$。

结论 7.1 如果概率 $p_t=p^t\ (t=1,2,\ldots,n)$，则有(7.1.7)式的特殊表达：

$$\text{EPV}=\sum_1^n R_t\left(\frac{p}{1+i}\right)^t=\sum_1^n R_t(v_{p,i})^t$$

其中 $v_{p,i}$ 为经过某种修正后的新的贴现因子：

$$v_{p,i}=\frac{p}{(1+i)}<v=\frac{1}{(1+i)}$$

证明 直接可由条件得到结论。

结论 7.2 在结论 7.1 条件下，对应的风险溢价为：

$$\frac{1-p}{p}(1+i)$$

而且给定风险溢价水平，也可以反解出单位时间的风险不发生概率：

$$p=\frac{1+i}{\text{溢价}+(1+i)}$$

证明 若形式上将 $v_{p,i}$ 看作是贴现因子，则对应的新的“收益率”为：

$$i^p=\frac{i}{p}+\frac{1-p}{p}>i$$

这意味着，在上述风险形式下的“收益率”与现金流形式无关，而且一定大于无风险收益率，这时的风险溢价为：

$$i^p - i = \frac{i}{p} + \frac{1-p}{p} - i = \frac{1-p}{p}(1+i)$$

风险发生概率根据溢价公式直接可得到。证毕。

注 上述结论表明在无风险利率水平固定时，风险溢价水平随风险程度的下降（ p 上升）而下降，直至为零。

例 7.3 已知两年期无风险年实利率为 2.40%，1）现有如下两年期的公司债券：第一年底息票收入不发生违约的概率为 95%；无论第一年是否违约，第二年底息票与本金收入不发生违约的概率为 90.25%。计算该公司债券的风险溢价。2）若已知上述产品的风险溢价为 8%，第一年底息票收入不发生违约的概率为 p；无论第一年是否违约，第二年底息票与本金收入不发生违约的概率为 p^2，计算 p。

解 1）由结论 7.2，有：

$$\text{风险溢价} = \frac{1-95\%}{95\%}(1+2.40\%) = 5.39\%$$

所以该公司债券的风险收益率为： 7.79%

2）由结论 7.2，有：

$$\frac{1+2.4\%}{8\%+(1+2.40\%)} = 92.75\%$$

若上述产品按照 10.40%的风险收益率出售，则意味着：第一年底息票收入不发生违约的概率为 97.25%；第二年底息票与本金收入不发生违约的概率为 94.5756%。

§7.2 利率期限结构

7.2.1 利率期限结构的定义

定义 7.2 因投资期限的不同而造成的投资到期收益率的变化结构被称为利率的期限结构。

在大多数金融市场中，不同的投资期限往往对应不同的收益水平，在每个交易时期都会存在一组市场利率，表示不同投资期限对应的利率。例如国债市场在每次的发行时刻将公布不同期限债券的收益率，而且一般情况下，这些利率具有随投资期限增加而逐渐上升的趋势。利率呈现的这种趋势就是利率的期限结构。下面从几个角度说明利率的期限结构。

大多数债券市场发达的资本市场是以国债或信用等级最高的债券的收益率作为市场无风险利率（或简称利率）的代表。中国的情况比较特殊，这里以银行的储蓄利率来分析利率的期限结构并不一定很合适，但这些数据是最公开和便于获取的。

1）在固定时点的利率模型

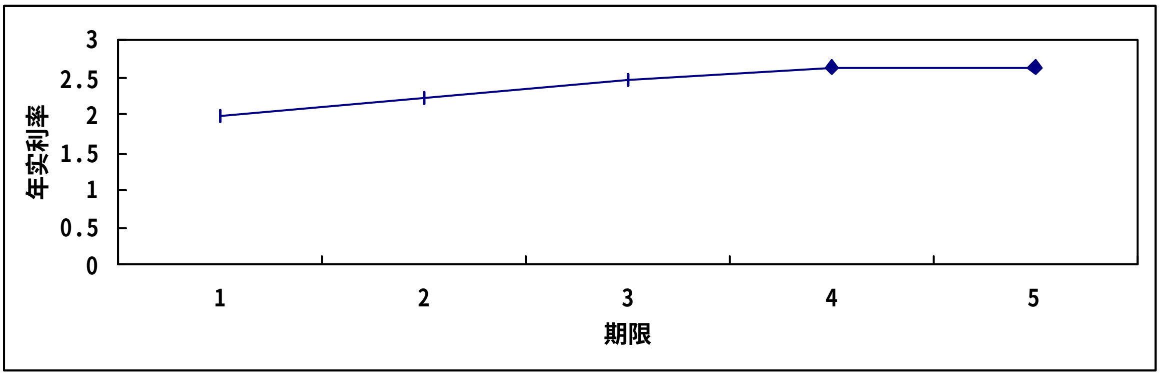
表 7.1 为中国人民银行公布的定期储蓄利率表，在每次公布的利率表中，不同的存款期限有不

同的年利率，即年利率水平与投资期限有关，图 7.1 为表 7.1 对应的利率与期限的关系图。

表 7.1 人民币存款整存整取年利率表(2002 年 2 月 21 日起执行)

期限（年）	0.5	1	2	3	5
公布年利率（%）	1.89	1.98	2.25	2.52	2.79
年实利率（%）	1.899	1.980	2.225	2.459	2.646

图 7.1 人民币定期储蓄利率（%）期限结构(2002 年 2 月 21 日起执行)



2）利率的整体期限结构。

另一方面，不同时期公布的利率表在整体上具有一种结构或趋势，表 7.2 为 1980-2000 年中国的储蓄利率变化情况。

表 7.2 1980-2002 年实际年利率表

期限 / 生效	3 月期	6 月期	1 年期	2 年期	3 年期	5 年期	8 年期
1980 年 4 月 1 日		4.37	5.76		6.42	6.90	7.01
1982 年 4 月 1 日		4.37	6.84		7.36	7.17	7.01
1985 年 4 月 1 日		5.47	6.84		7.36	7.17	7.01
1985 年 8 月 1 日		6.21	7.2		7.68	7.98	7.88
1988 年 9 月 1 日		6.58	8.64	8.79	8.90	9.02	9.01
1989 年 2 月 1 日	7.78	9.20	11.34	11.57	11.71	11.80	11.63
1990 年 4 月 15 日	6.45	7.89	10.08	10.44	10.70	10.99	10.95
1990 年 8 月 21 日	4.39	6.58	8.64	8.96	9.21	9.52	9.68
1991 年 4 月 21 日	3.28	5.47	7.56	7.63	7.68	7.71	7.67
1993 年 5 月 15 日	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.90	10.15
1993 年 7 月 11 日	6.83	9.20	10.98	11.09	10.99	11.10	11.38
1996 年 5 月 1 日	4.95	7.33	9.18	9.45	9.81	9.90	
1996 年 8 月 23 日	3.37	5.47	7.47	7.63	7.68	7.71	
1997 年 10 月 23	2.91	4.18	5.67	5.77	5.86	5.92	
1998 年 3 月 25 日	2.91	4.18	5.22	5.43	5.86	5.92	
1998 年 7 月 1 日	2.82	4.00	4.77	4.75	4.72	4.75	
1998 年 12 月 7 日	2.82	3.36	3.78	3.88	3.98	4.14	
1999 年 6 月 10 日	1.99	2.17	2.25	2.40	2.63	2.73	
2002 年 2 月 21 日		1.899	1.980	2.225	2.459	2.646	

在相同的投资期限条件下，不同年份的利率水平也有变化。

图 7.2 为各个年份的 1 年期储蓄的利率水平的变化趋势。

以上这些现象都是利率的期限结构（term structure of interest rates）。另一个描述这种现象的术语是"收益率曲线"（yield curves），它是将利率用投资期限表示的曲线。

当然，在自由竞争的市场中也会及其偶然地出现短期利率超过长期利率的情形。常称之为"颠倒的利率曲线"（inverted），如德国和法国在 1993 年 3 月 17 日从隔夜利率到五年期利率的利率曲线就出现了颠倒的现象，美国在八十年代初期的利率曲线也是颠倒的。对这种现象的一种解释是：短期利率过高通常归于政府紧缩的货币政策或通货膨胀率较高，而长期利率则更侧重对正常收益的期望。另一种常见的模式是"无息利率曲线"（flat yield curve），从图形上看是一条与时间轴平行的直线，表明在这段时间内投资者不希望投资市场或通货膨胀率在今后一段时间内出现戏剧性的变化。

3）即期利率与远期利率

定义 7.3 在当前时刻的（利率表）收益曲线上给出的利率被称为"即期利率"（spot rates），它只用一个时间坐标表示；另外与之对应的是所谓的"远期利率"（forward rates），它表示在未来某个时刻的同期利率，它需要两个时间坐标（利率的观测时刻和利率对应的投资期限）。

因此，利率期限结构可以指即期利率在投资期限上的结构，例如图 7.1 中的曲线；也可以指远期利率的结构，表 7.3 给出了不同时间的远期利率水平。

如果用 i_t 表示期限为 t 的即期利率， f_t 表示今后时刻 t 期限为 1 年的远期利率，在没有套利机会的市场中应该有如下的关系：

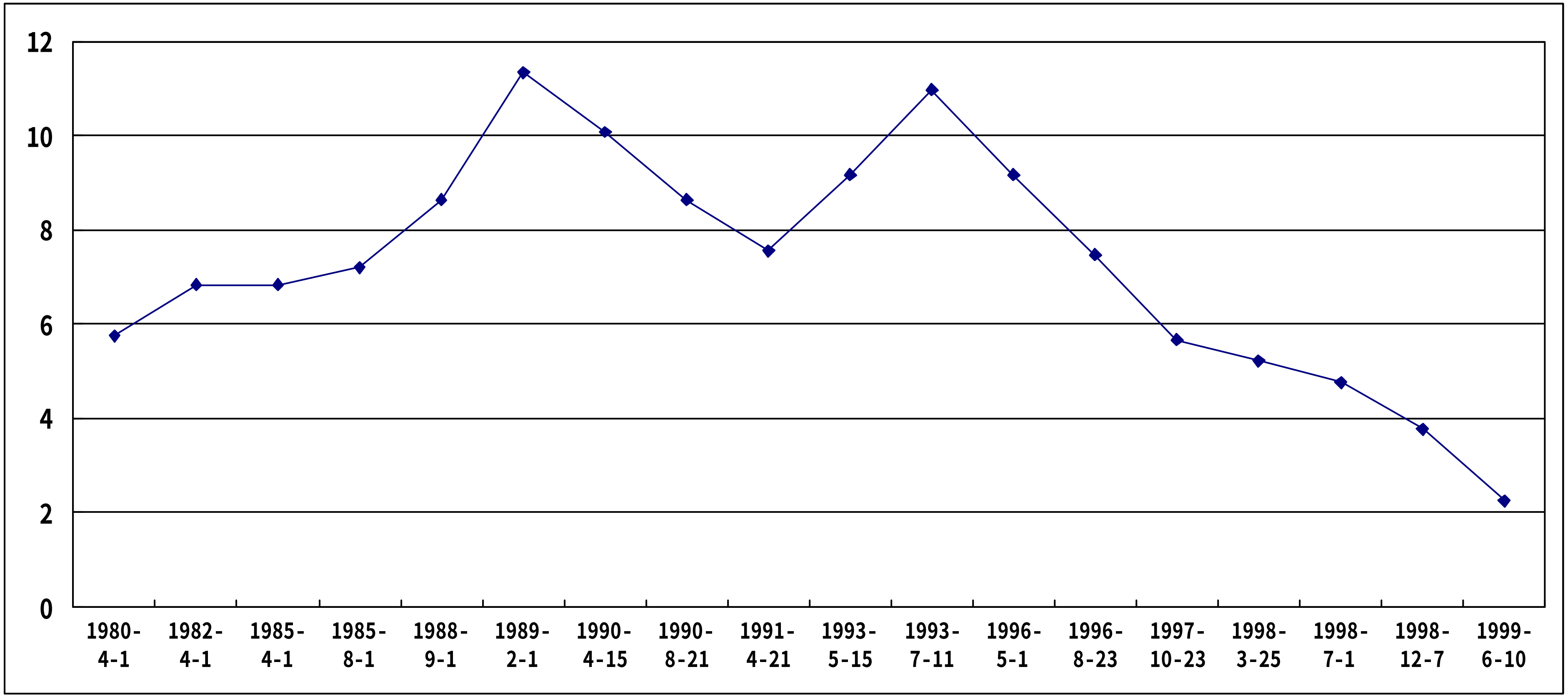
$$(1+i_t)^t=\prod_{s=1}^{t}(1+f_s)$$

f_t 既表示了利率的期限变化，也表示了时间变化。显然， f_t 是由一组即期利率 i_t 构造的，也就是说，市场上公布的一组即期收益率中包含了对远期收益率的预测。

表 7.3 1998-1999 银行储蓄年实利率和（预期）远期利率表

生效时间 / 期限	1999-6-10		1998-12-7		1998-7-10		1998-3-25	
	年实利率	远期利率	年实利率	远期利率	年实利率	远期利率	年实利率	远期利率
1 年	2.25		3.78		4.77		5.22	
2 年	2.40	2.30	3.88	3.98	4.75	4.73	5.43	5.64
3 年	2.63	3.00	3.94	4.06	4.68	4.54	5.80	6.54
5 年	2.73	2.93	4.14	4.44	4.75	4.86	5.92	6.10

图 7.2：不同时点一年期利率折线图（1980-1999）



在考虑利率期限结构的前提下计算投资收益，会使问题复杂许多。例如，以贴现现金流方法计算 IRR，如果用即期利率进行计算，那么，净现值公式为：

$$\text{NPV}=\sum_{1}^{n} R_t (1+i_t)^{-t} \tag{7.2.1}$$

其中：i_t 表示期限为 t 的即期利率。

希望大家仔细体会上面这个现值公式与前面 DCF 技术现值公式的区别。大多数情况下，用这种变化利率分析的结果要优于用一个固定利率分析的结果。下面通过一个例子来具体说明。

表 7.4 示范利率

投资期限	即期年利率
1	7.00%
2	8.00%
3	8.75%
4	9.25%
5	9.50%

例 7.4 两种 5 年期的债券 A 和 B。A 的年息率为 5%；B 的年息率为 10%。分析 A 和 B 两种债券的收益情况。

解 首先，直观地看，B 的年息票收入要优于 A，B 每年可以收回面值的 10%，A 每年只能收回面值的 5%。

但是，如果用相同的年收益率定价（例如 7%），两种债券对投资者来说是无差异的。即：

$P_A = 1+(0.05-0.07)a_{\overline{5}|0.07} = 0.917996$，$P_B = 1+(0.10-0.07)a_{\overline{5}|0.07} = 1.123006$

虽然 B 的年息票收入要优于 A，但是当初的价格也是高的。

如果用即期利率（例如表 7.4 所示的利率）进行分析又会有更合理的解释：

$$P_A = 0.05[(1.07)^{-1}+(1.08)^{-2}+(1.0875)^{-3}+(1.0925)^{-4}+(1.095)^{-5}]+(1.095)^{-5} = 0.830559,$$

$$P_B = 0.1[(1.07)^{-1}+(1.08)^{-2}+(1.0875)^{-3}+(1.0925)^{-4}+(1.095)^{-5}]+(1.095)^{-5} = 1.025891$$

如果还要考虑远期利率，收益计算将更加复杂。下面用一个例子说明。

例 7.5 某企业需要一笔大额借款，期限两年，该企业的收益曲线如表 7.1 所示。这个企业有两种选择：一是以当前的两年期贷款利率 8%借款两年；二是先借款一年，利率 7%，一年后再以当时的一年即期利率借款一年。讨论在什么情况选择第一种方式，什么情况下选择第二种方式。

解 如果用 f 表示第二年的一年期远期利率，则有：

$$(1.08)^2 = (1.07)(1+f)$$

即：f =.0901。所以，如果企业认为一年后的一年期远期利率将超过 9.01%，则选择第一种方式；不然则选择第二种方式。解毕。

在远期利率的描述上，必须指明递延的时间和利率的期限。例如：今后第 3 年到第 8 年间的远期利率表示递延 3 年的 5 年远期利率。

在利率期限结构中采用即期利率和远期利率的计算，导致了投资和借贷的更复杂的分析方法。这已成为许多复杂的现代金融业务的基础，包括更全面的套利保值策略。

例7.6 利用表 7.4 中的即期利率计算每年底 1000 元，共计 5 年的年金的现值。其等价的年收益率为多少?

解 现值为：

$$1000[(1.07)^{-1}+(1.08)^{-2}+(1.0875)^{-3}+(1.0925)^{-4}+(1.095)^{-5}]=3906.63$$

等价收益率满足：$a_{\overline{5}|i}=3.90663$，用叠代方法得到：8.83% 。解毕。

通过以上的讨论可以看出，利率的期限结构对投资收益的计算和衡量有很大的影响。

7.2.2 期限结构的理论与模型

对于利率存在期限结构现象，有许多理论上的定性研究和实证方面的模型研究。特别是 1980 年代以来，构造利率期限结构的数学模型的研究非常活跃。下面介绍一些重要的理论与模型。

1）理性预期理论（expectations theory ）

1896 年首次提出。一般形式为：长期债券的平均年收益率（ y ）是预期远期利率（ f_t ）的几何平均。因为满足：

$$(1+y)^n=(1+f_1)(1+f_2)\cdots(1+f_n)=\prod_1^n(1+f_t) \tag{7.2.2}$$

所以有：

$$y=\sqrt[1/n]{\prod_{t=1}^n(1+f_t)}$$

如果用 S_n （ S_0＝1）表示 n 期单位零息票债券的到期总收益，则远期利率可以表示为：

$$f_t=\frac{S_t}{S_{t-1}}-1, t=1,2,\ldots,n \tag{7.2.3}$$

例 7.7 在例 7.6 中，如果后三年的远期利率都比例 7.6 表中给出的水平高 1%。计算年金在 0 时刻的现值及等价收益率，并与例 7.6 的结果进行比较。

解 首先计算例 7.6 在后三年的远期利率水平以及提高后的远期利率水平：

第三年：$f=\dfrac{(1+8.75\%)^3}{(1+8.00\%)^2}-1=10.26\%$，提高后为：11.26%

第四年：$f=\dfrac{(1+9.25\%)^4}{(1+8.75\%)^3}-1=10.76\%$，提高后为：11.76%

第五年：$f=\dfrac{(1+9.5\%)^5}{(1+9.25\%)^4}-1=10.51\%$，提高后为：11.51%

然后计算后三年新的即期利率：

三年期提高后为：$\sqrt[3]{(1+8.00\%)^2(1+0.1126)}-1=9.08\%$，

四年期提高后为：$\sqrt[4]{(1+8.75\%)^3(1+0.1176)}-1=9.50\%$，

五年期提高后为：$\sqrt[5]{(1+9.25\%)^4(1+0.1151)}-1=9.70\%$，

年金的现值：

$$1000[(1.07)^{-1}+(1.08)^{-2}+(1.0908)^{-3}+(1.095)^{-4}+(1.097)^{-5}]$$
$$=3887.66$$

等价收益率满足：$a_{\overline{5}|i}=3.88766$，得到：$i$=9.02%。解毕。

2）流动性偏好理论(liquidity preference theory)

J.R.Hicks(1939)和 J.M.Culbertson(1957)对纯预期理论进行了修正，提出了流动性偏好假设，认为长期利率是对预期短期利率与流动性的补偿之和。所谓的流动性补偿是指：大多数投资者偏好持有短期债券，为了吸引投资者持有期限较长的债券，必须给他们一定的补偿。现实生活中，个人和企业都更偏好于短期投资，以便能尽快收回他们的资金，保持资金的"流动性"。因此，长期投资应该以较高的利率吸引投资者。

3）通货膨胀风险报酬理论（inflation premium theory）

投资者对未来的通胀情况的不确定性有所担忧，因此，需要提高利率来弥补这种风险。

7.2.3 利率风险的度量

由于利率期限结构的作用，未来现金流的时间性在利率敏感分析中起着重要的作用，直观看，现金流发生的时间越远，对利率变化越敏感，如果是一组现金流，就需要用一个量表示这一组现金流的时间性质。描述金融产品时效性的一个基本指标是到期期限(term to maturity)。但是仅凭此还不能完全区别不同金融产品的时间性。进一步的考虑用"等时间法（method of equated time）"刻画现金流的一种投资期限。基本思想是：将现金流的发生时刻以流量为权数进行加权平均，得到一个等价时间，设 $R_1, R_2,\ldots,R_n$ 为时刻 $1,2,\ldots,n$ 的一组同方向的现金流。记：

$$\bar{t}=\frac{\sum_{1}^{n} tR_t}{\sum_{1}^{n} R_t} \tag{7.2.4}$$

例 7.8　对前面考虑的两种 5 **年期债券：**A **的年息率为** 5%；B **的年息率为** 10%**。求等价时间。**

解　债券 A **年息率** 5%**，所以**

$$\bar{t}_A=\frac{\sum_{1}^{5} 5t+5\times100}{5\times5+100}=4.60$$

债券 B **年息率** 10%**，所以**

$$\bar{t}_B=\frac{\sum_{1}^{5} 10t+5\times100}{5\times10+100}=4.33$$

也可以说：债券 A **的平均回收期为** 4.6 **年；债券** B **的平均回收期为** 4.3 **年，无论什么收益率环境，**5%**息率的债券比** 10%**息率的债券的平均回收期要长。解毕。**

将上面的思想进一步深入，就有所谓的投资“期度”（duration）**的概念。最常见的是** Macaulay **期度，简单记作**$\bar{d}$ **：**

$$\bar{d}(i)=\frac{\sum_{1}^{n} tR_t v^t}{\sum_{1}^{n} R_t v^t}, v=(1+i)^{-1} \tag{7.2.5}$$

显然$\bar{d}(i)$ **是实利率** i **的函数**（**注意：这里又回避了即期利率和远期利率的问题**）**，而且，** $\bar{d}(i)$ **越小说明对利率风险越不敏感。关于期度有如下结论。**

结论 7.3　1）**若** i=0，**则有：** $\bar{d}(i)=\bar{t}$ **，** $\bar{d}(i)$ **退化为等价时间；**

2）**如果** R_k =0, 0< $k<n$ **，现金流只有一次发生，则**$\bar{d}(i)$ **退化为** n **。一般有：** $0<\bar{d}(i)\le n$ **。**

证明　由公式（7.2.5）**可直接得到结论。证毕。**

结论 7.4　$\bar{d}(i)$ **是** i **的递减函数，并且**

$$\frac{\partial\bar{d}}{\partial i}=-vs_i^2$$

最后的一个记号 s_i^2 **是延用概率统计中方差的概念，具体说明如下：**

考虑取值于 $\{1,\cdots,t,\cdots,n\}$ **上的随机变量** X^i （ i **表示对应的收益率**）**，而且有：**

$\Pr(X^i=t)=\dfrac{R_t v^t}{\sum_{1}^{n} R_t v^t},1\le t\le n$**，则有：** $E[X^i]=\bar{d}(i),\mathrm{var}(X^i)=s_i^2$

证明　由公式（7.2.5）

$$\frac{\partial\bar{d}}{\partial i}=-v[\frac{\sum_{1}^{n}t^{2}R_{t}v^{t}}{\sum_{1}^{n}R_{t}v^{t}}-(\frac{\sum_{1}^{n}tR_{t}v^{t}}{\sum_{1}^{n}R_{t}v^{t}})^{2}]$$

$$=-vs_{i}^{2}$$

证毕。

结论 7.5　1）零息票债券：$\bar{d}(i)=n$ **，对利率最为敏感。**

2）**息票债券：**　$\bar{d}(i)=n[1+\frac{\frac{\ddot{a}_{\overline{n|}i}}{n}-1}{1+(g-i)a_{\overline{n|}i}}\frac{g}{i}]$

3）**固定年金：**　$\bar{d}(i)=\frac{(Ia)_{\overline{n|}i}}{a_{\overline{n|}i}}$

4）**永久年金：**　$\bar{d}(i)=\frac{(Ia)_{\overline{\infty|}i}}{a_{\overline{\infty|}i}}=\frac{1}{d}=1+\frac{1}{i}>1$

证明　1）**对于零息票债券，当** $1\le t<n$ **时，** $R_t=0$；**当** $t=n$ **时，** $R_t=C$，**所以由公式**（7.2.5）**可得**

$$\bar{d}(i)=n$$

2）**设** $C=1$，**有：** $R_t=g,1\le t\le n-1,R_n=1+g$

$$\sum_{1}^{n}tR_{t}v^{t}=nv^{n}+g(Ia)_{\overline{n|}i}$$

所以由公式（7.2.5）**可得**

$$\bar{d}(i)=n[1+\frac{\frac{\ddot{a}_{\overline{n|}i}}{n}-1}{1+(g-i)a_{\overline{n|}i}}\frac{g}{i}]$$

对任意的兑现值，期度相同都是上面的表达式，这里不再详细证明。

3）**对固定年金，那么有** $1\le t\le n,R_t=R$，**代入公式**（7.2.5）**可得结论。这里不再详细证明。**

4）**由** 3），**令** $n\to\infty$ **既可得结论。**

证毕。

由上述结论还可以进一步证明在投资相同和期限相同的条件下，年金方式的期度小于息票债券的期度，这表明年金方式比债券方式的风险小。前面对年金现金流与债券现金流在偿还本金速度上的区别已有结论，与这里的结论是一致的。

1．$\bar{d}(i)$ **的近似计算。**

将 $\bar{d}(i)$ 在 $i=0$ 点作一阶展开：

$$\bar{d}(i) \approx \bar{d}(0) + \bar{d}'(0)i \qquad （7.2.6）$$

其中：
$$\bar{d}(0) = \frac{\sum_1^n tR_t}{\sum_1^n R_t}，\quad \bar{d}'(0) = -[(\frac{\sum_1^n t^2 R_t}{\sum_1^n R_t}) - (\frac{\sum_1^n tR_t}{\sum_1^n R_t})^2] \triangleq -s_0^2 < 0$$

则有：
$$\bar{d}(i) \approx \bar{d}(0) - i s_0^2$$

若取：

$$i_0 \triangleq \frac{\bar{d}(0)}{s_0^2} = \frac{\sum_1^n tR_t \sum_1^n R_t}{\sum_1^n R_t \sum_1^n t^2 R_t - (\sum_1^n tR_t)^2} \qquad （7.2.7）$$

因为：$i_0 = \dfrac{E[X^0]}{\mathrm{var}[X^0]}$，所以，适当选取 n 后，一般有：$0 < i_0 < 1$。当投资现金流确定后，i_0 使得投资期度达到最小，在 i_0 附近的利率风险最小。当利率 i（从左边）接近 i_0 时，$\bar{d}(i)$ 近似为零。对于债券方式和年金方式现金流的 i_0 有如下结论。

结论 7.6 1）年金：$i_0 = \dfrac{6}{n-1}$

2）息票债券：$i_0 = \dfrac{6n(n-1)g^2 + 6(3n+1)g + 12}{g(n-1)[n(n+1)g + 2(2n-1)]}$

证明 1）对于年金

$$\sum_1^n R_t = nR，\quad \sum_1^n tR_t = \frac{n(n+1)}{2}R，\quad \sum_1^n t^2 R_t = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}R$$

代入公式（7.2.7）得 $i_0 = \dfrac{6}{n-1}$

2）对于息票债券不妨设 $C=1$，有：$R_t = g, 1 \le t \le n-1, R_n = 1+g$，那么

$$\sum_1^n R_t = ng+1，\quad \sum_1^n tR_t = \frac{n(n+1)}{2}g + n，\quad \sum_1^n t^2 R_t = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}g + n^2$$

代入公式（7.2.7）得 $i_0 = \dfrac{6n(n-1)g^2 + 6(3n+1)g + 12}{g(n-1)[n(n+1)g + 2(2n-1)]}$

证毕。

注 上述结论 1）中计算的 i_0 在大多数情况下是非常大的数值（ n 为 20 时，近似为 31%），显然这个结果的实际意义不大。

2． **分析投资组合的期度与组合中各种资产期度的关系。**

设有m种资产的投资组合，$\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$表示各种资产的投资单位数，第$k$（$1 \le k \le m$）种资产单位投资的回报现金流为$\{R_1^k, R_2^k, \cdots, R_n^k\}$（注意：允许$R_t^k, 1 \le t \le n$为零）。如果所有资产均以利率$i$贴现，则第$k$（$1 \le k \le m$）种资产的期度为：

$$\bar{d}_k(i) = \frac{\sum_1^n t R_t^k v^t}{\sum_1^n R_t^k v^t}, v = (1+i)^{-1}$$

这时投资组合的现金流为：$R_t = \sum_{k=1}^m w_k R_t^k, 1 \le t \le n$，投资组合的期度为：

$$\bar{d}(i) = \frac{\sum_{t=1}^n t R_t v^t}{\sum_{t=1}^n R_t v^t} = \frac{\sum_{t=1}^n t(\sum_{k=1}^m w_k R_t^k) v^t}{\sum_{t=1}^n (\sum_{k=1}^m w_k R_t^k) v^t} = \frac{\sum_{k=1}^m w_k \sum_{t=1}^n t R_t^k v^t}{\sum_{k=1}^m w_k \sum_{t=1}^n R_t^k v^t} = \frac{\sum_{k=1}^m w_k \bar{d}_k(i) \sum_{t=1}^n R_t^k v^t}{\sum_{k=1}^m w_k \sum_{t=1}^n R_t^k v^t}, v = (1+i)^{-1}$$

记：$\tilde{w}_k = w_k \sum_{t=1}^n R_t^k v^t, 1 \le k \le m$。如果所有资产都是以利率$i$定价的，则$\tilde{w}_k$就是第$k$（$1 \le k \le m$）种资产的初始投资额，$\frac{\tilde{w}_k}{\sum_{t=1}^n \tilde{w}_k}$即为第$k$（$1 \le k \le m$）种资产的投资额在投资组合总投资额中的比例。

上面的计算表明：

$$\bar{d}(i) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \tilde{w}_k} \sum_{k=1}^m \tilde{w}_k \bar{d}_k(i)$$

即：投资组合的期度为组合中各种资产期度的加权平均，权重为各种资产的投资比例。

为了进一步理解$\bar{d}$的含义和作用，请看下例。

例 7.9 假设实利率 8%，计算以下现金流的投资期限：A－10 年期无息票债券；B－年息率 8% 的 10 年期债券；C－10 年期抵押贷款的固定偿还；D－红利固定的优先股票。

解 投资 A：显然有 $\bar{d}$ =10

投资 B：以单位兑现值计算：$\bar{d} = \frac{.08(Ia)_{\overline{10|}} + 10v^{10}}{.08a_{\overline{10|}} + v^{10}} = 7.25$

投资 C：以单位固定收入计算：$\bar{d} = \frac{(Ia)_{\overline{10|}}}{a_{\overline{10|}}} = 4.87$

这个结果与收入的数量无关。

投资 D：以单位红利计算： $\bar{d}=\dfrac{(Ia)_{\overline{\infty|}}}{a_{\overline{\infty|}}}=13.5$

这个结果与红利水平无关。

比较以上结果：优先股票是所有投资中期限最长的；抵押贷款的收回是所有投资中投资期限最短的。这与直观的长线投资和短线投资的情况恰好吻合。解毕。

另一种考虑投资效果的直观分析是：观察利率变化对净现值的影响（也可以说是对即期利率的另一种反映）。为此，引入净现值“波动率”（volatility）的概念，用 $\bar{v}$ 表示：

$$\bar{v}=-\frac{P'(i)}{P(i)} \tag{7.2.8}$$

因为 $P'(i)$ 是对利率变化造成的净现值变化的度量，而 $\dfrac{P'(i)}{P(i)}$ 则将这个度量相对化和单位化，所以，它类似于连续贴现率的概念，后者是对累计值的变化的一种相对度量。另外，通过适当的公式推导，有以下关系：

$$\bar{v}=\frac{\bar{d}}{1+i} \tag{7.2.9}$$

从这个意义上讲，常称波动率为“修正期限”（modified duration）。

投资期限和修正期限的概念提供了对平均投资期的描述方法。在考虑再投资风险时非常有用。例如 D 和 C 是两种投资收益率相同的债券，但是 C 的期限为 5，D 的期限为 10；这意味着：一方面，D 能够比 C 多一倍的时间保证这种预期的投资收益率，降低了再投资利率下降的风险；另一方面，C 比 D 更具有流动性，也就是说能够较早地收回资金。

期度和修正期度的计算使用最为广泛的是在债券的利率风险管理领域，它们成为债券评估的主要工具之一，而在这种评估中有一些约定俗成的计算，现介绍如下。

1） 债券期度的近似计算。

基本公式为：

$$\text{债券期度}=\frac{\text{收益率下降后的价格-收益率上升后的价格}}{2\text{（初始价格）（收益率变化的百分比）}}$$

具体：Δi 表示收益率的变化量（非负）；P_0 表示初始价格；P_+ 表示收益率增加 Δi 后的价格；P_- 表示收益率减少 Δi 后的价格。则有

$$\text{期度}=\frac{P_- - P_+}{2P_0(\Delta i)} \tag{7.2.10}$$

也称之为“有效期度”（effective duration）。这个近似计算相当于：

$$P'(i)\approx\frac{P(i+\Delta i)-P(i-\Delta i)}{2(\Delta i)}$$

这种近似计算在使用中非常方便，例如：20 年期息率 9%的美式债券，以收益率 6%计算的价格

为 134.6722，如果考虑收益率变化 20 个基点，即：收益率升至 6.2%或降至 5.8%，价格分别变化为 131.8439 和 137.5888。计算得期度为 10.66。一方面表示该债券的平均收回期为 10 年，另一方面表示，如果收益率变化 100 个基点，价格将变化（上升与下降同等对待）10.66%。

2） 期度可用于表述债券价格变化的百分比。

如果不考虑价格上升和下降两个方向的区别，则有：

$$\text{价格变化百分比} = -\text{期度} \times \Delta i \times 100$$

§7.3 资产负债管理

对于大多数金融机构而言，不仅要考虑投资问题，还都存在着对资产和负债两方面的管理问题，例如：从某种角度看，商业银行的资产大多是以贷款合约体现的，负债则是以储蓄合约代表的；基金管理的资产是它的投资，负债为它对基金投资人承诺的资本赎回和收益；养老金管理中，资产为养老金投入和投资，负债为养老金的领取。资产负债管理的目标是：保证资产能够及时、准确的匹配对机构的负债要求。资产负债管理的具体过程无非是从资产和负债两个方面进行调整，大多数情况的负债现金流模式是事先给定的，或者不容易进行调整，所以资产负债管理更多的是落实在对资产的管理上。

截止前一节，本书中的大多数讨论在很大程度上是对投资（资产）进行分析，目标是保证最大收益。在这一节，讨论经营的整体效果，对资产的管理是多目标的，至少要考虑收益和对负债的保证这两个方面。某些金融机构（银行、保险公司或养老基金等）必须研究资产与负债的内在关系。研究这两个方面面临的风险。如果将净现金流定义为资产现金流和负债现金流的差。那么正的净现金流就意味着资产现金流超过了负债现金流，从而产生了需要进行再投资的溢额现金。如果在净现金流为正的情形利率下降，则不得不以比初始利率低的水平进行再投资，一般称这种现象为再投资风险。另一方面，负的净现金流意味着匹配负债责任所需的现金不足，则需要变现资产或者从公司内部或外部借款，如果在净现金流为负的情形利率上升，那么对债券或及其他的固定收入证券的变现将导致资本损失，因为利率上升使得这些证券的价值下降了。这种情形被称为抽回投资风险，或价格风险。

适当简化后，用现金流 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 表示时刻 $1,2,\ldots, n$ 发生的资产流；用现金流 $L_1, L_2, \ldots, L_n$ 表示时刻 $1,2,\ldots, n$ 发生的负债流。核心问题是如何在这两组现金流之间达到均衡（equilibrium），或者保持余额（资产与负债的差）在安全的范围内。

下面用一个例子说明。某金融机构准备连续发行一种一年期的金融产品（如：短期债券、定期存单），利率固定。该机构在对这些融资资金进行投资时，面临以下风险：无论是选择长期投资还是短期投资，当金融市场利率变化时，该机构本身都存在投资收益率损失的风险。具体分析如下：

1）进行长期投资，例如：平均投资期 2 年，即：$\bar{d}$ =2。那么，当市场利率上升时，原产品的认购者自然会在一年后要求收回资金。该机构不得不转卖（以较低的价格）其资产以支付这些合同（责任），因此，造成资产价值的损失。这表明，在市场利率上升时期，对短期负债选择资产的长期投资，将有利率损失的风险，或称资产负债的不匹配（matching）。2）资金进行短期投资，例如：平均投资期不到一年，$\bar{d}$ =0。这时的风险为利率市场利率下调。如果市场利率下调，因为所选择的投资要在年内进行再投资，所以，利息收入将相对有所下降，也许不足以偿还原金融产品的应付利息。以上两种情况，都出现了资产的收益不能保证负债的问题。

本节主要介绍目前在资产负债管理中常用的两种计算方法。

7.3.1 免疫技术(immunization)

"免疫"这个词是由英国精算师 Frank M. Redington[1]于 1952 年在一篇名为"寿险公司评估原则回顾"的文章中提出的，他当时是英国保诚保险公司的首席精算师。从文章的题目可以看出其侧重于评估而不是资产与负债的匹配策略。在这篇历史性的文献中 Redington 提出精算师对资产和负债的评估应该采取类似的基本原理。他提议，为了使一组业务的盈余价值对利率波动"免疫"，应该使资产的平均期限与负债相等，同时使资产的现金流比负债更分散。

免疫技术的核心思想是：在给定预期投资收益率的条件下，选择资产满足：无论市场利率在预期收益率附近如何波动（上升或下降），最终的总体盈余（资产与负债的差）都不会下降。这就是希望通过免疫技术达到的目标。从方法上看，免疫方法是一种数学优化中的规划方法。

下面具体用函数关系来表达这种对资产负债不匹配风险的规避方法。首先，用 $R_t\ (t=1,2,\ldots,n)$ 表示时刻 t 的净收入（net receipt）：

$$R_t = A_t - L_t \qquad t=1,2,\ldots,n$$

记 i_0 为以下方程：

$$P(i)=\sum_{1}^{n} R_t v^t = 0$$

的解，也就是一般常说的预期收益率。当实际收益率 i 在 i_0 附近波动时，即：$i=i_0+e$，其中 e 为绝对值充分小的实数，利用 Taylor 展开，有：

$$P(i_0+e)=P(i_0)+eP'(i_0)+\frac{e^2}{2}P''(i_0+x),0<|x|<|e| \tag{7.3.1}$$

如果 i_0 满足：$P'(i_0)=0$ 且 $P''(i_0)\geq 0$，则 i_0 为 $P(i)$ 的局部最小值点，即：$\exists e>0$，使得 $P(i)\geq P(i_0),|i-i_0|<e$，因此，就达到了免疫技术的目的。

如果定义净现值的二阶导数（标准化之后）为"凸值"（convexity），记作 $\bar{c}$：

$$\bar{c} = \frac{P''(i)}{P(i)} \tag{7.3.2}$$

则免疫方法可以表述为：条件 1：净收入的修正期限为零；条件 2：净收入的凸值非负。

在现实问题中，负债的情况在很大程度上是由企业的外部环境决定的。因此，免疫技术从定义上虽然是对资产和负债两方面的调整，而实际的操作目标是调整资产的结构。由定义有：

$$P(i) = PVA(i) - PVL(i)$$
$$P'(i) = PVA'(i) - PVL'(i)$$
$$P''(i) = PVA''(i) - PVL''(i)$$

其中的 $PVA(i)$ 和 $PVL(i)$ 分别表示资产和负债流的现值。所以，一般情况下，可以将免疫技术的主要内容表述如下：

适当调整资产结构，使得：

1） 资产收益现金流的净现值不小于负债流出现金流的净现值；
2） 资产的修正投资期限（期度）与负债的修正投资期限（期度）相等；
3） 在资产收益现金流的净现值等于负债流出现金流的净现值的条件下，资产的凸值应该大于负债的凸值。

以上三条只是免疫技术的基本原则，在实际问题中必须灵活掌握。

例 7.10 甲承诺在一年后付给乙 1100 元，现在对 1000 元进行投资选择：短期资金市场的隔日变动的当前利率为 10%，另有 10%收益率的两年期无息票债券。基于免疫技术给出一种较优的投资策略。假定所有计算的年利率为 10%。

解 设 X 表示投资短期资金市场的金额，Y 表示投资债券的金额，因此，有：

$$P(i) = X + 1.21 \times Y \times (1+i)^{-2} - 1100 \times (1+i)^{-1}$$

$$P'(i) = -2.42 \times Y \times (1+i)^{-3} + 1100 \times (1+i)^{-2}$$

$$P''(i) = 7.26 \times Y \times (1+i)^{-4} - 2200 \times (1+i)^{-3}$$

进而，有：

$$P(10\%) = X + 1.21 \times Y \times (1+10\%)^{-2} - 1100 \times (1+10\%)^{-1} = 0$$

$$P'(10\%) = -2.42 \times Y \times (1+10\%)^{-3} + 1100 \times (1+10\%)^{-2} = 0$$

通过上面两个方程的简单计算，得到： $X = Y = 500$

$$P''(10\%) = 7.26 \times 500 \times (1+10\%)^{-4} - 2200 \times (1+10\%)^{-3} = 826.45 > 0$$

$P(.11) = .0406 > 0$； $P(.09) = .0421 > 0$

下面计算与这种投资策略相关的修正投资期限和凸值：

1） 关于修正投资期限，利用资产部分的表达式，有：

$$P(i) = X + 1.21 \times Y \times (1+i)^{-2} = 1000$$

[1] F.M.Redington. Review of the principles of life-office valuations. Journal of the Institute of Actuaries, 109:83-96,

$$P'(i) = -2.42 \times Y \times (1+i)^{-3} = -909.09$$

$$\bar{v} = -\frac{P'(i)}{P(i)} = .90909$$

另外，分别对短期资金市场和债券有： $\bar{v}=0$； $\bar{v} = \frac{2}{1.1}$

加权平均后，有： $\bar{v} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}\frac{2}{1.1} = 0.90909$

2） 关于凸值，有：

$$P''(i) = 7.26 \times Y \times (1+i)^{-4} = 2479.34$$

$$\bar{c} = 2.47934$$

解毕。

例 7.11 30 年期住房抵押贷款，月换算名利率 10.2%，按月偿还。计算：1）还贷现金流的修正投资期限；2）还贷现金流的凸值。

解 1）月实际利率为： $\frac{0.102}{12} = 0.0085$，将还款金额单位化以后，有：

$$\bar{v} = \frac{(Ia)_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$$

其中： $n=360$， $i=.0085$，有 $\bar{v}$ = 11,283.80/(1.0085)(112.0591) = 99.85

因此，修正的投资期限近似为 100 个月，而实际还款期为 360 个月。

2）首先，计算二阶导数：

$$P''(i) = \sum_{t=1}^{n} t(t+1)(1+i)^{-t-2} = v^2 \sum_{t=1}^{n} (t^2 + t) v^t$$

其中： $$\sum_{t=1}^{n} t^2 v^t = \frac{1}{i}[\{1 + \frac{3}{i} + \frac{2}{i^2}\} - v^n \{(n+1)^2 + \frac{2n+3}{i} + \frac{2}{i^2}\}]$$

然后，有：

$$\bar{c} = \frac{P''(i)}{P(i)} = \frac{v^2[\sum_{t=1}^{n} t^2 v^t + (Ia)_{\overline{n}|}]}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1{,}940{,}079 + 11{,}283.80}{(1.0085)^2 (112.0591)} = 17{,}121$$

解毕

7.3.2 资产负债匹配(matching of assets and liabilities)

一般有两种处理不考虑随机因素的资产负债匹配方法。

1）绝对匹配(absolute matching)或者称“专门供给”(dedication)。

基本思想是：构造一种资产组合使其收入的现金流在每个时期均与负债的现金流相匹配。例如：养老基金将为退休人员以固定的方式和金额发放退休金，为此，养老基金一般选择等级较高的无早赎债券的投资组合，例如一系列零息票债券，使其收益现金流与养老金的发放完全匹配。这种投资常被称为“专门的债券组合”（dedicated bond portfolio）。而一旦达到了这种匹配，就不需要进一步的分析和计算了。但是，现实情况中，往往难于或根本无法做到这种匹配。

例 7.12[2] 现有如下的资产负债数据：

	期度	预测的现金流				
		第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	4.2	210	69	445	180	1980
资产	4.3	194	254	41	200	2200

可选的投资资产有：

- 90 天的 T-Bill
- 2-年期息率 5%的政府债券
- 3-年期息率 6%的政府债券
- 5-年期息率 10%的政府债券

从资产负债现金流匹配的角度决定需要进行的资产交易。

解 为了达到现金流的匹配，每项负债现金流都必须有充分匹配的资产。为了做到这一点，首先从期限最长的负债开始，然后逐步后退回来。

第五年：现有的资产>负债，所以需要出售一些 5 年期的资产：

由于：

资产-负债=5 年期债券的息票收入+5 年期债券的到期本金=面值（1+息率）

所以，

$$5\text{ 年期债券的出售量}=\frac{A_5-L_5}{1+\text{息率}}=\frac{2200-1980}{1+10\%}=200$$

出售了 200 元面值的 5 年期债券后，资产负债的现金流模式变为：

	现金流				
	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	210	69	445	180	1980
原资产	194	254	41	200	2200
售出的资产	-20	-20	-20	-20	-220
调整后的资产	174	234	21	180	1980

[2] 本例选自 SoA 精算考试课程 6，2002 年 5 月考试的第 9 题。

第四年：资产负债的现金流已经匹配。

第三年：现有的负债>资产，所以需要购入一些 3 年期的资产：

$$3\text{ 年期债券的购入量}=\frac{L_3-A_3}{1+\text{息率}}=\frac{445-21}{1+6\%}=400$$

购入了 400 元面值的 3 年期债券后，资产负债的现金流模式变为：

	现金流				
	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	210	69	445	180	1980
原资产	174	234	21	180	1980
售出的资产	+24	+24	+424	0	0
调整后的资产	198	258	445	180	1980

第二年：现有的资产>负债，所以需要出售一些 2 年期的资产：

$$2\text{ 年期债券的出售量}=\frac{A_2-L_2}{1+\text{息率}}=\frac{258-69}{1+5\%}=180$$

出售了 180 元面值的 2 年期债券后，资产负债的现金流模式变为：

	现金流				
	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
负债	210	69	445	180	1980
原资产	198	258	445	180	1980
售出的资产	-9	-189	0	0	0
调整后的资产	189	69	445	180	1980

第一年：现有的负债>资产，所以需要购入一些 1 年期的资产，但是没有 1 年期的资产，可以选择购入 21 元（210-189）90 天的短期政府债券，也可以考虑短期债券与两年期债券的组合。

2）资产负债匹配

这种方法是由 J.A.Tilley[3]提出的，方法本身较为复杂，基本思想是：

在如下条件已知（或事先给定）时：

（1）负债在各个年度的现金流模式

（2）利率在投资期间的变化模式，包括新利率的情况

（3）可选的资产类，以及各个资产类在未来的利息收入和本金收回模式

（4）在投资或收回投资的项目在随后年份的模式

求解下面的决策问题：

[3] J.A. Tilley, "The matching of assets and liabilities," Transaction of Society of Actuaries, XXXII (1980)

找到可行的组合策略（各种资产类的投资比例），使得在任何的已知利率变化模式下，都可以保证最终的资产价值非负。

所以这种方法更多的是给出了一种分析和决策的理念。下面用一个例子说明 Tilley 方法的具体做法。

银行为储户提供年利率 8%的两年储蓄。提前支取利率不变。银行可能的投资工具为：A一年利率 8%的一年期国债；B一年利率 8.5%的两年期国债。这里将储户的提前支取行为简化为只在第一年底发生，设 s_1 和 s_2 分别表示储户在第一、二年底的支取金额比例。如果考虑单位储蓄，则有：

$$1=(1.08)^{-1}s_1+(1.08)^{-2}s_2$$

或

$$s_2=(1.08)^2-(1.08)s_1$$

设 p_1 和 p_2 分别表示银行投资于两种债券的比例。显然有：$p_1+p_2=1$。令 f 表示一年后的一年远期利率，A_2 表示银行在第二年底的余额：

$$A_2=[p_1(1.08)-s_1](1+f)+[p_2(1.085)^2-s_2]$$

$$=[(1.08)(1+f)-(1.085)^2]p_1+s_1(.08-f)+(1.085)^2-(1.08)^2$$

目标是：适当选取 p_1，使得无论 s_1 和 f 如何变化，都有 $A_2>0$。

需要分析 f 的波动对 A_2 的影响，进而做出对 p_1 的选择。在这里 p_1、s_1 和 f 都是未知的。问题是：如何选择 p_1 和 s_2 使 f 在一定的范围内波动时 A_2 都是非负的。当然，这个问题的结论可能是多种多样的。必须在一定的假设条件下进行决策。下面给出一种分析：

（1）**若远期利率下降，设 $f=7\%$，这意味着第一年底的提前支取的可能性不是很大，假定：$s_1=10\%$。则有：$A_2=-.021625p_1+.011825$。为了使 $A_2>0$，必须要求 $p_1<.5468$。**

（2）**若远期利率下降，设 $f=9.5\%$，这意味着第一年底的提前支取的可能性很大，假定：$s_1=90\%$。则有：$A_2=.005375p_1-.002675$。为了使 $A_2>0$，必须要求 $p_1>.4977$。**

综上所述，p_1 的选择范围是：$.4977<p_1<.5468$，相应地可以得到 p_2 的范围。