第三章 投资收益分析

几乎所有的投资活动都是以收益为目的的。收益(yield)的直观定义为：投资者在一定的时间内将一定的资本经过投资活动取得的收入。衡量收益效果的简单方法是考虑投资价值的变化量。从这个角度看，对投资收益的分析过程与货币的时间价值分析有相类似的地方，两者都是关心变化量（增量），都要考虑时间因素的作用。本章将第二章考虑的相对简单的年金方式现金流推广到一般的现金流，考虑相应的现金流价值计算。投资和融资活动是金融活动中两个主要的部分。虽然现实中这两类活动的形式差别非常大，但是从基本现金流的角度看，有很多一致的地方，而投资活动往往更直观和线条清晰。所以本章的前两节都是以投资活动为背景介绍基本的价值分析方法，第三节则更多以融资活动为背景。

§3.1 基本投资分析

现实中的投资活动千差万别，但是如果将各类投资活动的价值分析方法抽象出来，还是有一些基本的原理和方法。首先，我们讨论三个基本的价值分析工具。

3.1.1 常用的三种基本分析方法和工具。

1．贴现现金流分析（Discounted Cash Flows，简称 DCF 分析）

要介绍贴现现金流分析技术，先要对投资过程进行现金流刻画。投资活动往往是涉及两个以上个体的活动，最简单的情形时只有两个个体，例如：投资者与市场、投资基金的投资者与基金本身，也有时称投资方和融资方，同样的一次现金流发生，对双方来说流量相同，但流向却完全相反，在实际中，就会有不同的说法。例如：存款（deposit）或缴费（contribution）对投资者来说都是资金向外流出，而对投资资金（fund）本身来说是一个向内的流入。所以从投资资金的角度看，这个值为正。

一般从基金分析的角度，用字母 C（contribution）表示某个时刻的净流入量。如果 $C \geq 0$，则表示投资者有一笔净流出，投资资金有一笔净流入；如果 $C < 0$ 结果则正好相反。而取款（withdrawal）或收入（return）对投资者来说都表示资金流向为净流入，对基金本身表示净出，一般用字母 R 表示。显然，对于同一笔业务，在同一时刻，因为所处角度的不同而得到的这两个量数值相同、符号相反。即：在投资期间的任何时刻 t，有：

$$R_t = -C_t \qquad (3.1.1)$$

例如：某项目在第三年底收入 50,000 元，但支出 100,000 元，则有：C_3=50,000， R_3=-50,000。如果只是有了一组现金流 C_t 或 R_t，并不能直接看出项目的收益情况。

关于 DCF 分析方法的定义很多，这里列举两种：

1）“现金流转贴现”(discounted cash flow)（薛立亚等编，英汉经济综合词典，中国对外翻译出版公司，1986 年，页：245）:指按一定的利率计算某一时期内现金流动的现值，进而计算投资收益的方法。

2）“现金流转贴现法”(discounted-cash-flow method)（薛立亚等编，英汉经济综合词典，中国对外翻译出版公司，1986 年，页：245）：一种衡量投入资本收益的方法。用利率来表示某投资项目的价值，根据这个利率，该投资项目的未来总收入扣除从开始到目前为止的贴现利息后等于其原始投资。

总之，DCF 方法可以简述为：对任意一组分别于时刻 0，1，⋯，n 发生的“收益”现金流 R_0，R_1，R_2，⋯，R_n，以年利率 i 计算该投资回报流在投资之初的净现值 $P(i)$，有时称为 NPV，即：

$$P(i) = \sum_0^n v^t R_t \tag{3.1.2}$$

若上述现金流不考虑当前投入，即 $R_0 = 0$，这时，从投资一方看，$P(i)$ 表示以年利率 i 计算的当前的投入，常常也意味着不同收益水平下该投资项目的价格，若将其看作为年利率 i 的函数，则以此表示投资的效益。

更一般地，考虑连续方式的现金流 $R_t, 0 \le t \le n$，则有如下表示：

$$P(i) = \int_0^n v^t R_t dt \tag{3.1.3}$$

例 3.1 考虑一个 10 年的投资项目：第一年初投资者投入 10,000 元，第二年初投入 5,000 元，然后，每年初只需维护费用 1,000 元。该项目期望从第六年底开始有收益：最初为 8,000 元，然后每年增加 1,000 元。用 DCF 方法讨论该项目的投资价值。

解 用 DCF 方法的语言表述从投资一方看该项目的现金流如下：

表 3.1 例 3.1 投资项目的贴现现金流分析。

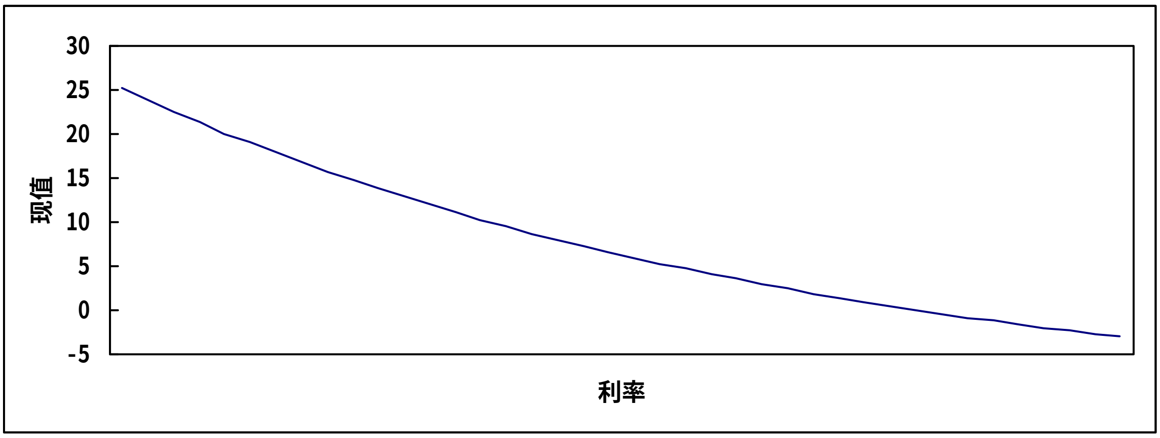
时刻 t	投入	收益	C_t	R_t
开 始 t=0	10,000	0	10,000	-10,000
第 1 年底 t=1	5,000	0	5,000	- 5,000
第 2 年底 t=2	1,000	0	1,000	- 1,000
第 3 年底 t=3	1,000	0	1,000	- 1,000
第 4 年底 t=4	1,000	0	1,000	- 1,000
第 5 年底 t=5	1,000	0	1,000	- 1,000
第 6 年底 t=6	1,000	8,000	- 7,000	7,000
第 7 年底 t=7	1,000	9,000	- 8,000	8,000
第 8 年底 t=8	1,000	10,000	- 9,000	9,000

第 9 年底 $t=9$	1,000	11,000	-10,000	10,000
第 10 年底 $t=10$	0	12,000	-12,000	12,000
总计	23,000	50,000	-27,000	27,000

该项目前 10 年的 NPV 函数为：

$$P(i)=1000(-10-5v-v^2-v^3-v^4-v^5+7v^6+8v^7+9v^8+10v^9+12v^{10}),v=(1+i)^{-1}$$

即：$P(i)$ 为 v 的 10 次多项式。图形为：



2．收益率

与前面从利息出发考虑利率的思路类似，投资收益率（yield rate）也是将收益与原始投入作比值，考虑投资的相对收益水平。所以，在一定程度上它会更明确的从本质上揭示投资的效益。

收益率的数学表示为：在项目的"收益"现金流中，当 R_0 为当前投入时，若利率 i 使得 $P(i)=0$，则称 i 为收益率（yield rate），严格表述为：收益率表示当收入资金的现值与投入资金的现值相等时，所对应的利率。换句话说，如果项目以这样的（年）平均收益率进行经营，将保证项目的所有收支贴现到项目开始时刻的现值是平衡的。因此，收益率实际上是一种临界利率，它使得项目在开始时刻的价值收支平衡。

另外，在商业和金融中常用内部回报率（internal rate of return）表示这个量。例如下面的定义：

1）（IRR）"内部收益率"（薛立亚等编，英汉经济综合词典，中国对外翻译出版公司，1986 年，页：442）：评价投资项目的一种方法，是根据项目未来收益的现金流量贴现分析求出投资项目的收益率。当将其应用于投资项目现金流量中所反映的利润和成本流量贴现时，所得出的净现值为零，从而提供了投资收益率的盈亏临界点。在有资本限额的情况下多使用这种投资评价方法。

2）（［美］约翰·道森等编，聂庆平 李必龙 译， 英汉金融与投资词典，中国金融出版社 1992 年，页：257）：当投资的未来收入（现金）流现值等于投资成本时的贴现率。它需经过试验和修正过程最后确定。当现金流出（投资成本）和现金流入（投资收入）的净现值等于零时，使用贴现率作为内部收益率；当内部收益率高于要求的收益率（在资本预算中称为篱笆率）时，投资可以进行。同时，收益率的计算是与时间有关的。

关于收益率有以下几点说明：

1）收益率是直观地评价在投资期限内的可能年平均收益水平。

讨论例 3.1 的收益率。 项目前 10 年的收益率满足以下方程：

$$1000(-10-5v-v^2-v^3-v^4-v^5+7v^6+8v^7+9v^8+10v^9+12v^{10})=0$$

解得：$i=$ 12.96%，而且是唯一解。如果只考虑前 9 年的投资情况，通过求解类似的方程，可以得到该项目在前 9 年的收益率近似为 9%；如果考虑前 8 年的情况，收益率近似为 4%。因此，投资期限对收益率的影响是非常重要的。

例 3.2 考虑两种可选的投资项目：A) 投资 5 年，每年的利率为 9% ；B）投资 10 年，每年的利率为 8%。如果两种投资的收益无差异，计算：如果选择 A，5 年后应将资金用于年利率为多少的投资?

解 设所求利率为 i，应该有：$(1+0.09)^5(1+i)^5=(1+0.08)^{10}$，解得 $i=7.01\%$

换句话说，如果项目 A 在 5 年后的再投资收益率大于 7.01%，则项目 A 优于项目 B；如果项目 A 在 5 年后的再投资收益率小于 7.01%，则项目 A 比项目 B 的收益差一些。只有当项目 A 在 5 年后的再投资收益率等于 7.01%时，项目 A 与项目 B 在 10 年内的投资收益都是 8%。

2）收益率的存在性和唯一性。

从直观上看，对于确定的一组现金流，它的收益率应该是唯一的，但是，按照定义它可以不是唯一的。例如：已知：$R_0=-100$，$R_1=230$，$R_2=-132$。则 NPV 为：

$$P(i)=-100+230v-132v^2 \quad \text{或} \quad (1+i)^2-2.3(1+i)+1.32=0$$

进而得到 10%或 20%两种收益率，它们的含义是：若第一年的收益率为 10%（20%），则 100 元在第一年底的价值为 110（120）元，“取出”230 元，实际透支 120（110）元，透支部分以收益率 10%（20%）计算，在第二年底的价值为 132 元。

收益率唯一的最常见的情形是：在项目中所有的现金流动只改变一次方向。更直观地是：前期业务的所有净资金都是相同的流向，后期业务都是相反方向的净资金流向。用数学的语言表示：存在 $0<k<n$，使得，当 $t=0,1,...,k$ 时，有：$R_t\le 0$；当 $t=k+1,k+2,...,n$ 时，有：$R_t\ge 0$ 。具体在例 3.1 的项目中就是 $k=5,n=10$。实际上，根据给出的 Descarte 法则，收益率的个数最多为现金流改变方向的次数。（Descarte 符号法则见附录）

3．未结投资价值（outstanding balance）

投资收益分析也可以在投资期间的各个时刻考虑，在投资中间的每个时刻既有已发生的现金流也有未发生的现金流，因此，投资价值的表示一般有两种方法，如果具体用 B_t 表示时刻 $t(0\le t\le n)$ 的未结投资价值，则有：

方法一：回溯法

$$B_t^r=\sum_0^t(1+i)^{t-s}C_s,t=0,1,2,\dots,n \tag{3.1.4}$$

方法二：预期法

$$B_t^p = \sum_{s=t}^{n} v^{s-t} C_s, t = 0,1,2,\ldots,n \tag{3.1.5}$$

它们都表示已有投资收益在时刻 t **的价值，另外还有递推的表示方法：**

$$B_0 = C_0 \tag{3.1.6}$$

和

$$B_t = B_{t-1}(1+i) + C_t \qquad 1 \le t \le n \tag{3.1.7}$$

从投资者看， $B_t > 0$ **表示负债；** $B_t < 0$ **表示盈利。**

那么，投资收益率的定义还可以表示为使现金流的终值（投资结束时的未结投资价值）为零的隐含收益率，即

$$B_n = 0 \tag{3.1.8}$$

的解。该收益率使投资恰好在第 n **个时刻达到累积收支平衡。**

B_t **也可以用来判断收益率是否唯一：如果对所有** $t = 0,1,\ldots,n-1$ **，有** $B_t > 0$ **；且假定** $-1 < i < 1$ **。则式（3.1.8）中的解** i **是唯一的。简单证明如下：设同时存在两个收益率** i **和** j **，使得** (3.1.8)**成立，不失一般性可以假设：** $j > i$ **。设** i **和** j **在时刻** t **对应的未结投资余额分别为** B_t **和** $B_t^{'}$ **，** $t = 0,1,\ldots,n$ **。则有：**

$$B_0^{'} = B_0 = C_0$$

$$B_1' = B_0'(1+j) + C_1 = B_0(1+j) + C_1 > B_0(1+i) + C_1 = B_1$$

对于一般的 $k(1 \le k \le n)$ **，已知** $B_{k-1}' > B_{k-1}$ **，有：**

$$B_k' = B_{k-1}'(1+j) + C_k > B_{k-1}(1+j) + C_k > B_{k-1}(1+i) + C_k = B_k$$

因此有： $B_n' > B_n = 0$**。这与** j **的定义矛盾。**

下面，用两个例子说明，有时收益率也不能完全表示投资的收益情况。

例 3.3　甲以年利率 10%**从乙处融资** 1 **万元，期限一年；同时，甲将这笔资金投资于年利率** 12% **的项目。问：在这个投融资项目中甲的收益率为多少**?

解　对甲来说，有：

$$B_0 = 10{,}000 - 10{,}000 = 0\text{；}\quad C_1 = 10{,}000 \times 0.10 - 10{,}000 \times 0.12 = -2{,}000$$

$$B_1 = 0 \times 1.10 - 2{,}000 = -2{,}000$$

所以，不存在 i **，使** $B_1 = 0$**。也可以说，对于任何的收益率** i **都不能使甲在投资结束时的未结余额为零。实际上，甲必定净收入** 2000 **元，甲在没有净投入的条件下却有净收入** 2000 **元。甲的投资效果是非常好的。但是，一方面没有一个收益率可以反应这一点；另一方面甲可以做的更好，如果甲能够以年利率** 15%**投资，那么甲的利润为** 5000 **元。同样地，也没有一个收益率可以表示这两种投资的差异。因此，在这种情况下，只是从定义出发计算的收益率无法表示投资的收益效果。**

例 3.4　已知某账户的当前余额为 100 万元，在第一年底提出 150 万元，在第二年底又投入 90 万元。计算该项目中甲的收益率。

解　对投资一方来说，有：

$$B_0 = 1{,}000{,}000 > 0\text{；}\quad B_1 = 1{,}000{,}000(1+i) - 1{,}500{,}000$$

$$B_2 = 1{,}000{,}000(1+i)^2 - 1{,}500{,}000(1+i) + 900{,}000$$
$$= 10{,}000[100i^2 + 50i + 40] > 0$$

也就是说，对于任何利率 i**，投资者的最终结果（在第二年底）都是亏损。具体有：** $i = 0.1$**时，甲在第一年底提出 150 万元，提款之后的余额为** $2{,}000{,}000 \times (1.10) - 1{,}500{,}000 = 700{,}000$ **。那么，在第二年底，以** $i = 0.1$ **计算投资者最多可以借出** $700{,}000 \times (1.10) = 770{,}000 < 900{,}000$ **。换个角度看，在这个项目中，无论考虑什么样的年利率，都不能刻画该项目的收益情况。**

3.1.2　再投资分析

这里所讲的再投资严格说是指：本金第一次计息后的利息收入以新的投资利率进行的投资。

1. **只有一次性投资的再投资分析**

初始投资 1 元，每年（1 个计息期）的利率为 i**，有时称之为直接投资（贷款）利率；投资的回报方式为：逐年（1 个计息期）收回利息，结束时收回本金；同时将每年的利息收入以年利率** j **进行再投资，有时称之为再投资（贷款）利率。计算投资结束时（第** n **年底）的总收益。流程图如下：**

原始投资　1

```
|-------|-------|------------------------------|
0       1       2       ……                   n
```

利息收入　　i　　i　　……　　i

因为利息收入可以进行再投资，所以等价于金额为 i **的** n **次期末年金（利率** j **）。投资的累积值为：**

$$1 + i s_{\overline{n|}j} \tag{3.1.9}$$

如果上式中 $j = i$**，则上式等于** $(1+i)^n$ **。它就是一般的终值计算公式。**

当 $j > i$ **时，** $1 + i s_{\overline{n|}j} > 1 + i s_{\overline{n|}i} = (1+i)^n$ **再投资使得最终收益大于直接投资收益。**

当 $j < i$ **时，** $1 + i s_{\overline{n|}j} < 1 + i s_{\overline{n|}i} = (1+i)^n$ **再投资使得最终收益小于直接投资收益。**

所以，在考虑再投资的情形，实际收益率（用 r **表示）应介于投资回报率** i **与再投资率** j **之间。**

$$(1+r)^n = 1 + i\, s_{\overline{n|}j} \tag{3.1.10}$$

即： $\min(i, j) \le r \le \max(i, j)$ **。**

例 3.5 50 万元的 10 年期贷款，年利率 8%。如果还款额同时以年利率 7%进行再投资。计算以下三种方式的实际收益率。1）到期一次还清；2）每年还利息，到期还本金；3）每年等额分期偿还。

解 1）到期一次还清。没有进行再投资的可能。实际收益率为 8%。

2）每年还利息，到期还本金，包括再投资的终值为：$500{,}000[1+0.08 s_{\overline{10}|.07}] = 1{,}052{,}568.89$

实际收益率 r 满足： $500{,}000(1+r)^{10} = 1{,}052{,}568.89$

得到： $r = 7.728\% < 8\%$ 。这表明实际的贷款利率低于 8%，因为考虑了再投资利率。

3）每年分期还清。每年的还款 R 满足： $Ra_{\overline{10}|.08} = 500{,}000$

所有这些还款的再投资终值之和为： $Rs_{\overline{10}|.07} = 50{,}000\dfrac{s_{\overline{10}|.07}}{a_{\overline{10}|.08}} = 1{,}029{,}255.51$

实际收益率 r 满足： $500{,}000(1+r)^{10} = 1{,}029{,}255.51$

得到： $r = 7.4897\% < 7.728\%$ ，这是因为这种方式的还款“速度”比第二种方式（每年 40,000 元）高；但是，仍然有 $r > 7\%$，这是因为有年利率 8%在起作用。

2. 有分期投资的再投资分析

每年（1 个计息期）初投资 1 元，每年（1 个计息期）的投资利率为 i，有时称之为直接投资（贷款）利率；投资的回报方式为：逐年（1 个计息期）收回利息收入，结束时一次收回所有投资；同时将每年的利息收入以年利率 j 进行再投资，有时称之为再投资（贷款）利率。计算投资结束（第 n 年底）时的总收益。流程图如下：

原始投资	1	1	1	⋯	⋯	1	
时间	0	1	2	3	⋯	$n-1$	n
利息收入		i	$2i$	$3i$	⋯	$(n-1)i$	$n\,i$

利息收入是递增的 n 次的期末年金（利率 j）。那么，投资的累积值为：

$$n + i(Is)_{\overline{n}|j} \tag{3.1.11}$$

如果上式中 $j = i$，则上式等于 $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$， 它就是再投资利率没有变化时的终值计算公式；

当 $j > i$ 时， $n + i(Is)_{\overline{n}|j} > n + i(Is)_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ 再投资使最终收益大于直接投资收益；

当 $j < i$ 时， $n + i(Is)_{\overline{n}|j} < n + i(Is)_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ 再投资使最终收益小于直接投资收益。

在上述这种情况下，实际的收益率(用 r 表示)应介于投资回报率 i 与再投资率 j 之间。满足：

$$n + i(Is)_{\overline{n}|j} = \ddot{s}_{\overline{n}|r} \tag{3.1.12}$$

例 3.6 某基金的投资者：每年初投入 1 万元，共计十年。基金本身的年回报率为 7%，年底支付。分别对再投资利率为 5%和 8%两种情况，讨论投资者的实际收益率。

解 1） j =5%，基金在第十年底的终值为： $10{,}000[10+.07(Is)_{\overline{10}|.05}]=144{,}900$

这个结果介于 $10{,}000\,\ddot{s}_{\overline{10}|.05}=132{,}070$ 和 $10{,}000\,\ddot{s}_{\overline{10}|.07}=147{,}840$ 之间，

所以，该基金的实际收益率 r 满足：

$10{,}000\,\ddot{s}_{\overline{10}|r}=144{,}900$ 解得： $r=6.65\%$

2） j =8%，基金在第十年底的终值为： $1000[10+.07(Is)_{\overline{10}|.08}]=149{,}400$

这个结果介于 $10{,}000\,\ddot{s}_{\overline{10}|.08}=156{,}460$ 和 $10{,}000\,\ddot{s}_{\overline{10}|.07}=147{,}840$ 之间，

所以，该基金的实际收益率 r 满足：

$10{,}000\,\ddot{s}_{\overline{10}|r}=149{,}400$ 解得： $r=7.19\%$

§3.2 收益率计算

在实利率的定义中，有一个基本的假定：在整个计算期内本金不变、利率不变，并且在期末得到利息。但在大量的实际问题中，例如：各类投资账户中，常常会在投资期间对投资账户进行新资金的投入或资金提取。

例 3.7 某股民的股票买卖和资金账户的情况如下：

时间（年）	交易情况	费用	红利分配
0	持有 1000 股 每股 5.00 元	2%	
0.5	用红利收入买入股票 每股 4.00 元	无	0.2 元/股
1	另购入 500 股 每股 4.50 元	2%	
1.5	以每股 5.00 元出售所有股票	2%	0.25 元/股

问：在过去的一年半中，该股民的投资收益如何?

这时，实利率的计算变得很复杂，主要原因是“本金”的数值很难确定，只能计算广义的实利率。本节介绍三种收益率计算方法。

3.2.1. 资本加权法 （dollar-weighted rates or money-weighted rate）

这种方法的核心是：只考虑资本量的宏观变化，不区分具体的投资时间和数量。

1. 一年（短）期

首先考虑投资期限为一个利息换算期（一年）的情形，假定其中只有有限次的资本的投入（或提取）。引入以下记号：A— 投资基金在开始时的规模；B— 投资基金在结束时的规模；I— 利息收入；C_t—时刻$t(0<t<1)$投入的净资本量；C—整个计算期内新投入的总的净资本量：

$$C=\sum_t C_t$$

${}_a i_b$—在时刻b投入 1 元经过时间a产生的利息收入，$a\geq 0, b\geq 0, a+b\leq 1$。

实际上，延用前面的记号，有：$A=B_0$，$B=B_1$，${}_1 i_0=i$。在这种情况下的资本平衡公式为：

结束时的资本量 = 开始时的资本量 + 总净资本投入 + 利息收入

这也成为利息I的定义方法。

即：

$$B=A+C+I \tag{3.2.1}$$

另外，如果将I理解为在此期间投入的所有本金的利息收入（以${}_a i_b$表示）之和，则有下面的严格表达式：

$$I=iA+\sum_t C_t\,{}_{1-t}i_t \tag{3.2.2}$$

其中i为年收益率。显然，由式（3.2.2）是很难得到i的计算式，必须考虑i与${}_a i_b$的关系，化简计算。下面给出两种简化计算的假定：

1）复利假设：

$${}_{1-t}i_t=(1+i)^{1-t}-1 \tag{3.2.3}$$

则有利息计算公式（3.2.2）的简化公式：

$$I=iA+\sum_t C_t(1+i)^{1-t}-C=iA+(1+i)\sum_t C_t v^t-C \tag{3.2.4}$$

实际上，由公式（3.2.4）仍然无法得到收益率的分析表达式，只能用数值方法近似求解。但是，这时可以有B的表达式：

$$B=(1+i)A+(1+i)\sum_t C_t v^t \tag{3.2.5}$$

2）线性假设：

$${}_{1-t}i_t=(1-t)i \tag{3.2.6}$$

它很像单利计算，但是可以证明：式（3.2.6）与单利计算时的连续利率是不同的。【具体证明如下：单利的连续利率为：

$$d_t=\frac{i}{1+it} \tag{3.2.7}$$

由公式（3.2.6）的假设可以得到：

$$\exp\left(\int_t^1 d_r\,dr\right)=1+{}_{1-t}i_t=1+(1-t)i$$

或 $\int_t^1 d_r\,dr = \ln[1+(1-t)i]$

进而得到：

$$d_t = \frac{i}{1+i(1-t)} \qquad 0 \le t \le 1 \tag{3.2.8}$$

显然，式（3.2.7）与式（3.2.8）不同。 】

将假设（3.2.6）代入（3.2.2），可以得到：

$$i = \frac{I}{A+\sum_t C_t(1-t)} \tag{3.2.9}$$

一般称该式为资本加权收益率计算公式。上式中的分子就是利息收入；而分母可以看作是平均的资本投入量，有时称之为“资本单位”(exposure associated with i)。当然，因为公式（3.2.9）是在类似于单利的假设下得到的，所以，严格地说它并不是实利率。但在许多情况下（特别是 C_t 相对于 A 很小），这个结果非常接近于实利率。在实用中还可以考虑对公式（3.2.9）的进一步简化。例如：

1） 假定所有新的净投入都是在时刻 $t=k$ 进行的，则有：

$$i = \frac{I}{A+(1-k)C} = \frac{I}{A+(1-k)(B-A-I)} = \frac{I}{kA+(1-k)B-(1-k)I} \tag{3.2.10}$$

2） 假定所有新的净投入都是在时刻 $t = 1/2$ 进行的，则有：

$$i = \frac{2I}{A+B-I} \tag{3.2.11}$$

B. 投资期限超过 1 年的情形

首先考虑离散情况。已知投资期是从 0 到 n，余额和现金流为：$B_0, B_1, \ldots, B_n$ 和 $C_0, C_1, \ldots, C_n$。在复利方式下，有：

$$B_k = B_0(1+i)^k + \sum_0^k C_j(1+i)^{n-j}, k = 0,1,\ldots,n$$

通过数值计算反解出 i。

以上的所有讨论都可以推广到连续情形，即：新资本的投入是连续的。对于任意 $t(0 \le t \le n)$，用 B_t 表示时刻 $t(0 \le t \le n)$ 的“资本账户未结余额”（outstanding fund balance），同时假定新资本的投入以函数 C_t 连续进行，因此有以下定义：

$$B_t = B_0(1+i)^t + \int_0^t C_s(1+i)^{t-s}\,ds \tag{3.2.12}$$

其中 i 为实利率。

如果考虑用连续利率表示，更一般的定义为：

$$B_t = B_0 \exp(\int_0^t d_s ds) + \int_0^t C_s \exp(\int_s^t d_u du) ds \tag{3.2.13}$$

或者用微分方程表示：

$$dB_t = (d_t B_t + C_t) dt \tag{3.2.14}$$

该式还有一个很直观有趣的实际解释：左边是余额在时刻 $t(0 \le t \le n)$ **的瞬间变化率；右边表明这个变化由两部分组成：**（1）**利息对资本余额的作用；**（2）**瞬间新投入的资本。**

例 3.7（**续**）**现金流和余额为：**

$B_0 = 1000 \times 5 \times (1+2\%) = 5100$，$C_1 = 500 \times 4.5 \times (1+2\%) = 2295$，

$B_{1.5} = (1000 + \frac{200}{4} + 500)[5 \times (1-2\%) + 0.25] = 7982.5$

设： $j = \frac{i^{(2)}}{2}$ **半年名义收益率，由**(3.2.12)**有：** $B_{1.5} = B_0(1+j)^3 + C_1(1+j)$

代入具体数据为： $7982.5 = 5100(1+j)^3 + 2295(1+j)$

解得： $j \cong 3.1\%$，**该股民在这一年半的名义年收益率约为** 6.2%**。**

□

例 3.8 ：**某活期账户年初余额为** 1000 **元。在四月底存入** 500 **元；在六月底和八月底分别提取** 200 **元和** 100 **元。年底余额为** 1236 **元。用资本加权法近似计算年收益率。**

解：已知： $A = 1000$；$C_{1/3} = 500$，$C_{1/2} = -200$，$C_{2/3} = -100$；$B = 1236$

因此有： $I = 1236 - (1000 + 500 - 200 - 100) = 36$

用公式（3.2.9），**有：**

$$i = \frac{36}{1000 + 500\frac{2}{3} - 200\frac{1}{2} - 100\frac{1}{3}} = 3\%$$

实际上，我们可以认为该活期账户的年利率为 3%；**另一方面，如果已知上面活期账户的年利率为** 3%，6 **月底**（**一般国内活期储蓄的利息结算时间**）200 **元提款之前的账户余额应为：**

$$B = A + C + I$$
$$= 1000 + 500 + 3\%(1000 + 500\frac{1}{6}) = 1613.13$$

□

例 3.9 ：**某保险公司一年的经营数据如下：**

年初资产：10,000,000　**保费收入：**1,000,000

投资收入：530,000　**保单赔付：**420,000

投资成本：20,000　**其它费用：**180,000

近似计算该公司在这个年度的实际收益率。

解： A = 10,000,000 ; I = 530,000 − 20,000 = 510,000

B = 10,000,000 + 1,000,000 + 530,000 − 420,000 − 20,000 − 180,000

= 10,910,000

$$i = \frac{2I}{A+B-I} = 5\%$$ □

2. **时间加权法** time-weighted rates of interest

这种方法的核心是：对于投资账户的每次（因新资本的投入或提取造成）变动，都随时进行利息结算，计算当时的阶段收益率，然后计算整个投资期的综合收益率。这样可以将资金的变动情况通过收益率体现出来。另外，全年的投资收益即与新资本的净投入量有关也与具体投资时间有关。

时间加权法的具体算法为：

1） **首先考虑投资期限为一年。假设在一年中有** $m-1$ **次的资金投入或提取，即：时刻** $0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<1$ **的净投入分别为** $C_1,\ldots,C_{m-1}$**。因此，将一年分为** m **个小区间，用时间图表示如下：**

|---------------|-----------------------|-------------------|

时间	0	t_1	$\cdots$	t_{m-1}	1
资金投入		C_1	$\cdots$	C_{m-1}	
资金余额	B_0	B_1	$\cdots$	B_{m-1}	B_m
收益率		j_1	$\cdots$		j_m

准确地说，对于任意 $t(0 \le t \le m)$**，**B_t **表示在时刻** $t(0 \le t \le m)$ C_t **未投入前一瞬间的投资资金余额。自然有：** $B_0 = A$ **和** $B_m = B_1$**。** j_t **表示第** $t(1 \le t \le m)$ **个子区间的实际收益率，所以有：**

$$B_t = (1+j_t)(B_{t-1}+C_{t-1})$$

或：

$$j_t = \frac{B_t}{B_{t-1}+C_{t-1}} - 1 \qquad 1 \le t \le m \tag{3.2.15}$$

那么，由此定义全年的收益率 i **为满足以下方程的解：**

$$1+i = (1+j_1)(1+j_2)\cdots(1+j_m) = \prod_{t=1}^{m}(1+j_t)$$

进而可以表示为：

$$i = \prod_{t=1}^{m}(1+j_t) - 1 \tag{3.2.16}$$

2） 任意期限n。其它符号相同，只是时间表示为：$0< t_1 < \cdots < t_{m-1} < n$。投资期间的平均年收益率$i$满足：

$$(1+i)^n = \prod_{t=1}^{m}(1+j_t) \tag{3.2.17}$$

时间加权法着重揭示（市场）内在整体的投资性能；而资本加权法只是度量（个体）实际的投资结果。

例 3.10：甲从 1985 年至 1990 年每年初向退休基金存款 10,000 元。已知该基金在 1985 到 1989 年的年收益率分别为 13%、11%、9%、9%和 10%。分别用资本加权法和时间加权法计算甲在这五年中的平均回报率。

解：1）这里的投资期限超过了一年，所以在使用资本加权法时要推广前面的算法。

首先计算 1990 年底的账户余额：

$$\begin{aligned}&10{,}000[(1+13\%)(1+11\%)(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)+(1+11\%)(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)\\&+(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)+(1+9\%)(1+10\%)+(1+10\%)]=66{,}958.37\end{aligned}$$

因此，年收益率i应满足：$10{,}000\ddot{s}_{\overline{5}|i}=66{,}958.37$，解得：$i = 9.90\%$。

这个收益率结果与每年的存款额有很大的关系，想象一下：甲在 5 年中每年的存款不是等额的，但总额仍然为 5 万元，结果会有很大的变化。

2）已知：$j_1 = .13$，$j_2 = .11$，$j_3 = .09$，$j_4 = .09$，$j_5 = .10$。解得：

$$i=[(1+13\%)(1+11\%)(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)]^{1/5}-1=10.39\%$$

这个收益率计算结果与每年的存款额无关，它反应了该基金在这几年的平均收益情况。

□

例 3.11 ：某账户在年初的余额为 100,000；5 月 1 日余额为 112,000 元，同时投入 30,000 元；到 11 月 1 日余额降为 125,000 元，同时提取 42,000 元。在下一年的 1 月 1 日又变为 100,000 元。分别用（1）资本加权法（2）时间加权法计算年收益率。

解：该项目的时间流程为：

|----------------|----------------------------|------------|------------------|

日/月	1/1	1/5	1/11	1/1
净投入		30,000	−42,000	
余额	100,000	112,000	125,000	100,000

（1） A = 100,000，B = 100,000，C = 300,000 − 42,000 = −12,000，I = 12,000

$$i=\frac{I}{A+\sum_t C_t(1-t)}\quad=\frac{12{,}000}{100{,}000+30{,}000\times\frac{8}{12}-42{,}000\times\frac{2}{12}}=10.62\%$$

这里，新资本注入和提取的时间只在本金中起一定的作用，对利息收入没有影响。

（2） $$i\ =\frac{112{,}000}{100{,}000}\times\frac{125{,}000}{112{,}000+30{,}000}\times\frac{100{,}000}{125{,}000-42{,}000}-1=18.79\%$$

下面对于（1）和（2）的结果进行比较分析：

1） 方法（2）的收益率明显地大于方法（1）。这一点可以从三个子区间的投资收益分析得到。在前四个月和最后两个月的投资效益很好，在年中的六个月则效益较差。而恰好是在效益差的时期投入了新的资本，在效益好的时期提取了部分本金，所以，单独从资金的变化看，收益率必然不高。

2） 方法（1）的 10.62%只代表这个投资者自身在这个项目中的投资效果；而方法（2）的 18.79%则表示了投资资金本身的运行情况，它与投资者的投资行为无关。也就是说，方法（1）反映了投资者（investor）的投资效果，方法（2）反映了项目（fund）的收益情况。

3） 因此，两种方法的差异代表了投资市场本身是否平稳。一般情况下，当投资平稳或中间新投入或提取的资金与各时刻的资本余额比较相对较小时，两种方法的差异也较小。虽然方法（2）的结果较方法（1）的结果要客观一些，但是前者需要掌握更多的投资信息，即：每次资本变动时的投资余额，这一点有时很难做到。

□

3. 投资额方法和投资年方法

在投资问题中除了前面考虑的有不同时刻的资本投入和提取造成的特殊收益率计算外，还有投资基金因为组成的多样化而造成的收益率计算问题。有些投资资金是由不同的个体投资者组成，例如：养老基金是由许多个人账户组成的，每个账户不能单独进行投资，必须通过参加基金的整体投资，然后在投资收益中占有相应的份额。这些个人账户随时有资本的投入，整个基金也随时在进行投资和收益，那么，该如何计算每个账户的收益率呢？与前面的类似，还是从资本量和投资时间两方面考虑。

1）投资组合方法（portfolio）

顾名思义，这种方法是以基金的全部收入为基础，计算平均的年收益率，基金中每个账户都以该年收益率计算收益。在较短的时间内，这种方法是简单易行的。但是，如果投资期限较长，特别是利率波动较大时，采用平均利率的方法就可能会带来很大的不公平。因为，采用这种方法时，无论每个投资者是何时开始参加投资的，在每个投资年度的年收益率都是一样的。例如：某基金在某个投资年度的平均年收益率为 8%，这个收益率是基金这 5 年各种投资组合综合的投资收益水平，这几年投资市场呈上升趋势。某投资者是两年前参加该基金的，而基金这两年的年平均收益率为

10%，如果对这个投资者仍然以年 8%的收益率计算当年账户的收益，可能会使其放弃对该基金的投资，或是不能吸引更多的投资者参加该项目。

2）投资年方法（investment year）

这种方法是对每项投资即考虑它原始投资时刻的利率情况，也考虑投资期间各个时刻的利率情况。这种方法是从六、七十年代开始流行的。有时称投资期间的利率为新利率（new money rate），如下表中的第一列。银行和保险公司通常愿意采用投资年方法，以吸收储蓄和投保。一般情况下，当利率上升时，投资年方法优于投资额方法；反之，则有相反的结论。

在采用投资年方法时，因为每个时刻都可能有新的投入，所以必须计算再投资利率。在实际应用中一般有两种处理手段：1）下调指数（declining index system）。每个投资年度的资金如果需要进行再投资时，将降低其利率。换句话说，这种利率反映了剩余资金的投资效益。2）固定指数法（fixed index system）。假定每个投资年度的资本量固定，只要将原始的投资利率经过再投资利率修正后即为当前的收益率。

另外，在采用投资年方法时，常常只考虑固定的一段时间，剩余的时期仍采用投资额方法。即：只对投资者刚刚进入基金的前几年（例如 10 年）内的投资资金考虑年收益率的调整，用投资年方法调整利率的年限一般也要事先给定（例如 5 年）。

投资年方法的实际操作步骤是：构造一个二维的利率表，如表 3.2 所示。 z 表示项目的起始年代，或者是给定的一个起始年代。每一行代表原始的投资日期（用 y 表示），前面几列代表用投资年方法计算的年度内已经经过的投资时间（用 t 表示），最大年限记为 m 。每个投资都可以用原始投资年度 y 和当前日期 $y+t$ 标识。当采用投资年方法时（投资时间不超过 m ），对应的利率记为 i_t^y；当投资时间超过了投资年方法的年限 m ，则一律将利率记为 i^{y+t} 。为了简化，一般以一年为单位，且所有的资金变动都是在年初进行的。

表 3.2 投资年方法示例（ $m=5$） 单位：%

原始投资年度 y	投资年利率 i_1^y	投资年利率 i_2^y	投资年利率 i_3^y	投资年利率 i_4^y	投资年利率 i_5^y	投资额利率 i^{y+5}	投资额利率年度 $y+5$
z	8.00	8.10	8.10	8.25	8.30	8.10	$z+5$
$z+1$	8.25	8.25	8.40	8.50	8.50	8.35	$z+6$
$z+2$	8.50	8.70	8.75	8.90	9.00	8.60	$z+7$
$z+3$	9.00	9.00	9.10	9.10	9.20	8.85	$z+8$
$z+4$	9.00	9.10	9.20	9.30	9.40	9.10	$z+9$
$z+5$	9.25	9.35	9.50	9.55	9.60	9.35	$z+10$

$z+6$	9.50	9.50	9.60	9.70	9.70		
$z+7$	10.00	10.00	9.90	9.80			
$z+8$	10.00	9.80	9.70				
$z+9$	9.50	9.50					
$z+10$	9.00						

表 3.2 有两种用途：

1）计算某投资者在某投资年度的收益率。这时，只要在第一列找到相应的原始投资时间（y），然后沿水平方向找到该投资者对应的第几个投资年度，就可以得到相应的年收益率，如果投资年度超过 m，则继续沿列方向向下顺沿直至找到相应的年收益率。具体用上面的表 3.2 来计算从时刻 $z+k_1$ 开始进行的投资到达 $z+k_2$ 时刻的收益，则可以用下面的表达式计算：

$$\prod_{1}^{k_2-k_1}(1+i_t^y)$$

其中：$y=z+k_1$；当 $t>m$ 时，$i_t^y=i^{y+t}$。

例如：z =1980，考虑 1980 到 1990 期间某基金的投资收益。某人在 1982 年投资 5000 元。到 1985 年的收益为：

$$5000(1+8.5\%)(1+8.7\%)(1+8.75\%)(1+8.9\%)=6983.71$$

到 1990 年的收益为：

$$5000(1+8.5\%)(1+8.7\%)(1+8.75\%)(1+8.9\%)(1+9.0\%)(1+8.6\%)(1+8.85\%)(1+9.1\%)(1+9.35\%)$$
$$=10{,}735.31$$

因此，后五年的收益为：3751.6 元。

2）计算某给定年度的收益率。先在第一列找到对应的年份，然后沿倒对角线方向向右上方排列的一组利率都是这一年不同的投资者的可能的利率。例如：z =1980，在 1987 年可能的利率为：10.00%，9.50%，9.50%，9.30%，9.20%，8.60%。它们分别表示：1987 年刚刚参加该项目的投资者的年利率为 10.00%；1986 年参加该项目的投资者在 1987 年的年利率为 9.50%；1985 年参加该项目的投资者在 1987 年的年利率为 9.50%；1984 年参加该项目的投资者在 1987 年的年利率为 9.30%；1983 年参加该项目的投资者在 1987 年的年利率为 9.20%；1980 至 1982 年其间参加该项目的投资者在 1987 年的年利率为 8.60%。

§3.3 资本预算

所谓资本预算（capital budgeting）是指个人或企业投资者对投资方向和投资量进行决策的过程。一般考虑以下两种分析方法：一是当存在多种收益率的时候，如何考虑项目的投资决策。另一种方法，就是以事先给定的利率贴现未来的现金流，计算净现值。这个事先给定的利率常常是一种保守

的估计，是保证投资者最低受益的估计。实际上，投资者总是在实际的现金流发生之前要以一个收益率（给定利率）来计算这种投资的净现值，并按照这种设计来准备投资资金。

1. 收益率方法与净现值方法

实际的投资分析过程是由许多因素组成的，例如：要进行不同项目的风险评估、收益率分析比较以及其他与项目有关的可行性分析。这里，我们强调从收益率角度来决策项目。常采用以下两种方法：一是前面已介绍的收益率方法。实际操作时，投资者可以根据本身的融资成本和投资利润指标设置一个最小可接受收益率（interest preference rate），然后将各种项目的收益率与之相比较，排出优先次序。二是净现值方法（net present value methods），投资者用最小可接受利率 i 计算每个可选项目的净现值 $P(i)$（简称 NPV），计算公式为（3.2.2），如果 $P(i)$ 为负值，则拒绝该项目；如果 $P(i)$ 为正值，则可以考虑接受该项目，而且这个值就表示该项目所需的原始本金投入或净收益。

例 3.13：某投资项目需要在当前投入 100 元、第二年底投入 132 元，在第一年底可以收回 230 元。讨论这个项目在这两年的资本预算分析。

解：净现值公式为： $P(i) = -100 + 230v - 132v^2$

表 3.3 为不同利率下的净现值结果。

表 3.3 例 3.13 的净现值

利率 i %	0	5	10	15	20	25
NPV	-2.00	-0.68	0	0.19	0	-0.48

可以看出 10%和 20%是两个临界收益率。实际上，通过简单计算可以发现：只有当收益率介于 10%和 20%之间时，有 $P(i) > 0$，也就是说有非负的净收益现值，而且当 i=14.78%时，$P(i)$ 达到最大。但是，很有意思的是：如果投资者给定的可接受收益率为 5%，则拒绝这个项目；如果投资者给定的可接受收益率为 15%，则接受这个项目。这种结论显然是不合逻辑的。

□

例 3.14：用 NPV 方法讨论例 3.3 的项目。

解： 因为 $C_1 = -2{,}000$，$R_1 = 2{,}000$，所以 NPV 为： $P(i) = 2{,}000v$

因为 NPV 永远为正值，所以，对于任何利率，该项目都可以接受，换句话说，这个项目必定有收益。 □

例 3.15：用 NPV 方法讨论例 3.4 的项目。

解：若以 1 万元为单位，有：

$R_0 = -100$，$R_1 = 150$，$R_2 = -90$，$P(i) = -10v^2(10i^2 + 5i + 4) < 0$

无论利率为何值，$P(i)$ 均为负值，该项目必定拒绝，即：该项目必定无法受益。

□

例 3.16：将表 3.1 中的投资项目进行资本预算分析。

解：这里的净现值公式为：

$$P(i)=1{,}000(-10-5v-v^2-v^3-v^4-v^5+7v^6+8v^7+9v^8+10v^9+12v^{10})$$

表 3.4　　　　例 3.16 的净现值

利率 i (%)	0	5	10	15	20	25
NPV $P(i)$	27,000	12,675	3,695	-2,046	-5,778	-8,236

实际上，这是一个标准的投资项目的前期分析，NPV 代表了不同收益率下的净收益。

□

但是，净现值方法也不是万能的方法。见下例。

例 3.17 某投资者面临以下的两种投资项目收入（最初的投入均为一万元）：

项目	第一年底	第二年底	第三年底	收益率（%）	NPV（10%）
A	5,000	5,000	5,000	23.4	2,434.26
B	0	0	17,280	20.0	2,982.72

试对其进行投资决策分析。

解：

直观地看，依据净现值（以相同的收益率 10%计算）的比较，应该选择项目 B；依据收益率（相同的最初投入）的比较，应该选择项目 A。

进一步分析两个项目的净现值函数：

$$P_A(i)=5{,}000(a_{\overline{3}|i}-2)$$

$$P_B(i)=5{,}000[3.456(1+i)^{-3}-2]$$

经过分析比较，两个净现值函数具有以下的性质：$P_A(i)>P_B(i)$ 的解的区域为：

$$(1+i)^2+(1+i)-2.456<0$$

结论：对于 14.49%以内的收益率，选择项目 B；若收益率介于 14.49%与 20%之间，选择项目 A。

2. 项目回报率与项目融资率

从前面的讨论我们知道，如果投资期间每个时刻的未结资本余额都是正数，收益率则唯一。因此，我们可以定义一种“净投资项目”（pure investment project），即：对所有时刻 $t=1,2,\ldots,n$，有 $B_t\ge 0$。它意味着，在整个计算期间，该投资者都处于资本的投入状态，只有项目结束时一次性收回投资。同样地，也可以定义一种“净融资项目”（pure financing project），即：对所有时刻 $t=1,2,\ldots,n$，有 $B_t<0$。它意味着，在整个计算期间，该投资者不断地从项目中获得资金，他实际上已经从一个投资方变成为一个受益方。在大多数情况下，投资者常常是在以上两种状态中间不断变动，如果在投资期间两种状态都有则称为“综合项目”（mixed project）。我们知道，在净投资或净融资情形下，投资收益率是唯一的，如果我们在两种情形中分别考虑收益率，则可以得到针对不同时期的唯一收益率，对于净投资期，称收益率为“项目回报率”(project return rate)，用 r 表示；

对于净融资期，称收益率为“项目融资率”(project financing rate)，用 f 表示。一般情况下，希望 r 比 f 大，因为，一个明智的投资者当然希望贷款利率要高于存款利率。

下面我们用具体计算来表示这种方法。原始的资本余额为：

$$B_0 = C_0 \tag{3.3.1}$$

随后的资本余额可以用递归公式表示：$t = 1,2,...,n$

$$B_t = B_{t-1}(1+r) + C_t, \qquad \text{当 } B_{t-1} \geq 0 \tag{3.3.2a}$$

或

$$B_t = B_{t-1}(1+f) + C_t, \qquad \text{当 } B_{t-1} < 0 \tag{3.3.2b}$$

最终的资本余额是关于 r 和 f 的多项式：

$$B_n = C_0(1+r)^{m_0}(1+f)^{n-m_0} + C_1(1+r)^{m_1}(1+f)^{n-m_1-1} + \cdots + C_n \tag{3.3.3}$$

其中：m_j 为整数，表示从时刻 j 到时刻 n 中使用利率 r 的总的区间数，当然，其它时间段内使用利率 f，且满足：$n \geq m_0 \geq m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$。

例 3.18：某投资项目为：立即投入 1600 元，两年后投入 10000 元，在第一年底收回 10000 元。（1）若 $r = f$，计算收益率 i。（2）用 f 表示 r。（3）若 r =70% 和 f = 30%，该投资项目是否可以接受？（4）若 f = 50%，（3）的结论如何？

解：

（1）令：$i = r = f$，价值方程为： $1600(1+i)^2 + 10{,}000 = 10{,}000(1+i)$

解为：i = 25%, i = 400%，因此，这是一个存在两种收益率的项目。

（2）因为，第一年初的投资余额是正值：B_0 = 1600，所以，第一年的年利率为投资利率 r：

$$B_1 = 1{,}600(1+r) - 10{,}000$$

因为：$B_2 = B_1(1+i) + 10{,}000$，所以，为了使 $B_2 = 0$，必然有：$B_1 < 0$，所以，第二年的年利率为融资利率 f：

$$B_2 = B_1(1+f) + 10{,}000$$

由 $B_2 = 0$，可以得到 r 与 f 的关系式：

$$1 + r = \frac{10{,}000}{1{,}600}\left(1 - \frac{1}{1+f}\right) \qquad r = 6.25\left(1 - \frac{1}{1+f}\right) - 1 = 5.25 - \frac{6.25}{1+f}$$

表 3.5 为该项目的投融资利率对应关系

表 3.5 例 3.18 的项目利率表 单位：%

融资利率 f	25	100	150	200	300	400
回报利率 r	25	212.5	275	317	369	400

注意，从上表看出，有两个点满足 $r = f$ **，而且，在这两个点之间有** $r > f$ **，这是一种正常的关系；但是，在这两个点之外，有** $r < f$ **。最后，** r **是** f **的递增函数。**

（3）**这种条件下的资本余额分别为：**

$$B_0 = 1600,\quad B_1 = 1600\times 1.7 - 10{,}000 = -7280$$

$$B_2 = (-7280)\times 1.3 + 10{,}000 = 536$$

因为 $B_2 > 0$**，所以投资者拒绝该项目。**

（4）**这种条件下在第二年底的资本余额为：**

$$B_2 = (-7280)(1.5) + 10{,}000 = -920$$

所以，投资者接受这个项目。

也可以从直观上考虑为什么（4）**为接受**（3）**为拒绝。这两种情况的唯一区别在于第二年内的利率** f **，投资者在第一年底的净资本收入为** 7280 **元，为了保证在第二年底对项目再投资** 10000 **元，这笔收入在第二年内的贷款利率如果为** 50%**，则可以满足，如果为** 30%**则不能满足。所以，如果借款人最多可以接受** 30%**的利率，则项目无法进行，如果借款人可以接受高达** 50%**的利率，则项目可以进行。** □

§3.4 实例分析

例 3.19 **某养老基金随时接受缴费**（contribution）**和领取**（withdrawal）**，在每笔业务结束时，结算基金的价值。**1991 **年的情况如下：**

日期	1/1/91	3/1/91	9/1/91	11/1/91	1/1/92
基金余额	1,000	1,240	1,600	1,080	900

(**单位：** 1,000)

缴费情况： 2/28/91 200,000； 8/31/91 200,000

领取情况： 10/31/91 500,000； 12/31/91 200,000

分别用资本加权法和时间加权法计算收益率。

解：由已知的基金余额，可以得到基金在各个时刻的实际余额：

$$B_{1/6} = 1240 - 200 = 1040,\quad B_{2/3} = 1600 - 200 = 1400,$$

$$B_{5/6} = 1080 + 500 = 1580 \qquad B_1 = 1100$$

资本加权法：

$$C = 200 + 200 - 500 = -100 \qquad I = 1100 - 1000 - (-100) = 200$$

$$i=\frac{200}{1000+200\times\frac{5}{6}+200\times\frac{1}{3}-500\times\frac{1}{6}}=17.38\%$$

时间加权法：

$$1+i=\frac{1040}{1000}\times\frac{1400}{1240}\times\frac{1580}{1600}\times\frac{1100}{1080}$$

$$=1.04\times1.129\times0.9875\times1.0185$$

$$=1.181$$

$$i=18.1\%$$

两种计算收益率方法的结果差异不大。

例 3.20　10,000 元贷款用于投资。有两种选择：1)每年底 3000 元回报，累计十年；2)在第二年底和第五年底回报 8000 元，在第七年底和第十年底回报 7000 元。投资者计划将所有资金存入信贷账户，如果账户余额为赤字，以年利率 15%收取利息，如果账户余额为盈利，则以年利率 9%计入利息。在两种情况下计算第十年底的余额。

解：

1）计算账户余额首次出现盈利的时刻 k：

$$10{,}000(1.15)^k<3000s_{\overline{k}|15\%}$$

解得：$k=5$。

$$B_5 = 3000s_{\overline{5}|15\%}-10{,}000(1.15)^5=1135.7$$

进而，有：

$$B_{10} = 3000s_{\overline{5}|9\%}+1135.7(1.09)^5= 18{,}129$$

2）计算账户在各个回报时刻的余额：

$$B_2 = -10{,}000(1.15)^2+8000=-5225<0$$

$$B_5 = -5225(1.15)^3+8000= 53.43>0$$

$$B_{10} = 53.43(1.09)^5+7000(1.09)^3+7000= 16{,}147$$

所以，第一种方法的盈利多一些。