北京大学数学科学学院高等代数 (II) 期末考试题

班级 ____ 姓名 ________ 学号 ________ 成绩 _____

一. (本题共 40 分) 给定有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的多项式 $f(x)=x^4+3x^2+3$.

1. (本题 5 分) 证明 $f(x)$ 为 $\mathbb{Q}$z 中的不可约多项式.
2. (本题 5 分) 设 α 是 $f(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 内的一个根. 定义

$$\mathbb{Q}[\alpha]=\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2\}.$$

证明: 对于任意的 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 有 $g(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$; 又对于任意的 $\beta,\gamma\in\mathbb{Q}[\alpha]$, 有 $\beta\gamma\in\mathbb{Q}[\alpha]$.

3. (本题 5 分) 接上题. 证明: 若 $\beta\in\mathbb{Q}[\alpha]$, $\beta\neq 0$, 则存在 $\gamma\in\mathbb{Q}[\alpha]$, 使得 $\beta\gamma=1$.
4. (本题 15 分) 找出 $f(x)$ 的一个 sturm 序列. 判断 $f(x)$ 有几个实根.
5. (本题 10 分) 求下面三阶方阵在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-3\\1&0&0\\0&1&-3\end{pmatrix}.$$

二. (本题 10 分) 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 内求下列齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\\3x_1+2x_2-2x_4=0\\3x_1+x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}$$

的解空间的正交补空间的一组标准正交基.

三. (本题 15 分) 给定数域 K 上的多项式 $f(x)=x^3+px+q$. 设 $f(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 内的三个根是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 求 K 上的首 1 三次多项式 $F(x)$, 它以 $\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2$ 为三个根.

四. (本题共 15 分) 设 $\mathbf{A}$ 是 n 维酉空间 V 内的一个 Hermite 变换.

1. (本题 5 分) 证明 $\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E}$ 可逆, 这里 i 为虚单位.
2. (本题 10 分) 证明 $\mathbf{U}=(\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E})$ 为酉变换.

五. (本题 10 分) 设 $\mathbf{A}$ 是 n 维酉空间 V 内的一个线性变换. 如果 $\mathbf{A}$ 的特征向量都是 $\mathbf{A}^*$ 的特征向量, 证明 $\mathbf{A}$ 是正规变换.

六. (本题 5 分) 证明在 n 维欧氏空间 V 中两两夹钝角 (即夹角大于 $\frac{\pi}{2}$) 的向量不能多于 $n+1$ 个.

七. (本题 5 分) 考察复数域上全体 n 阶方阵所成的集合 $M_n(\mathbb{C})$. 它关于矩阵的加法及实数与矩阵的数乘组成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 设 M 为其子空间, 且满足: (i) 若 $A,B\in M$, 则 $AB\in M$; (ii) 若 $A\in M$, $A\neq 0$, 则 A 可逆, 且 $A^{-1}\in M$.

1. 证明: 任给 $A\in M$, 则 $A=aE(a\in\mathbb{R})$ 或 $A=aE+B$, 这里 $a\in\mathbb{R}$ 且 $B^2=bE$ $(b\in\mathbb{R},\ b<0)$.
2. 令 $N=\{A\in M|A^2=bE,b\in\mathbb{R},b<0\}$, 证明 N 是 M 的子空间.

试题答案与评分标准

一． 1. 取 $p=3$, 利用 Eisenstein 判别法.

2. 设 $g(x)=q(x)f(x)+r(x)$ $(\deg r(x)<3$ 或 $r(x)=0)$, 则 $g(\alpha)=r(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$.

(到此得 3 分)

若 $\beta=h_1(\alpha)$, $\gamma=h_2(\alpha)$, 令 $h(x)=h_1(x)h_2(x)$, 则 $\beta\gamma=h(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$.

(到此得 5 分)

3. 设 $\beta=b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2$. 令 $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$. 因 $f(x)$ 不可约且 $\deg g(x)<\deg f(x)$, 故 $(f(x),g(x))=1$.

(到此得 2 分)

于是有 $u(x),v(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$. 即得 $v(\alpha)g(\alpha)=1$. 而 $v(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$, 令 $\gamma=v(\alpha)$ 即可.

(到此得 5 分)

4. 令 $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=\frac{f'(x)}{3}=\frac{3x^2+6x}{3}=x^2+2x$,

$$f_0(x)=(x+1)f_1(x)+(-2x+3),\quad \text{取 } f_2(x)=2x-3;$$

$$f_1(x)=(\frac{1}{2}x+\frac{7}{4})f_2(x)+\frac{21}{4},\qquad \text{取 } f_3(x)=-1.$$

于是 $f_0(x),f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 为 $f(x)$ 的一个 sturm 序列.

(到此得 8 分)

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	1
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	2

$f(x)$的实根数 $=W(-\infty)-w(+\infty)=2-1=1$.

(到此得 15 分)

(若 sturm 序列中 $f_2(x),f_3(x)$ 的符号弄错，其他做法正确，得 8 分)

5. A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\lambda^3+3\lambda^2+3=f(\lambda)$, 有一个实根，两个共轭复根，故 A 在 $\mathbb{C}$ 内的 Jordan 标准形为对角矩阵，且主对角线元素互不相同.

(到此得 6 分)

于是 A 的最小多项式即为其特征多项式 $f(\lambda)$.

(到此得 10 分)

二. 所求的正交补空间即为由系数矩阵的行向量生成的子空间.

(到此得 3 分)

因

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故它的一组基. 可取为 $\alpha_1=(1,0,6,0)$, $\alpha_2=(0,1,-9,1)$.

(到此得 5 分)

正交化:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \alpha_1,\\ \varepsilon_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)} = (\frac{54}{37}, 1, -\frac{9}{37}, -1)\end{aligned}$$

(到此得 8 分)

单位化，得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{37}}(1,0,6,0), \qquad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{5736}}(54,37,-9,-37).$$

(到此得 10 分)

(若方法正确，计算有错，扣 2-6 分)

三.

$$\begin{aligned}F(x) &= (x-\alpha_1^2)(x-\alpha_2^2)(x-\alpha_3^2)\\ &= x^3 - \sigma_1(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2) + \sigma_2(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2) - \sigma_3(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2).\end{aligned}$$

(到此得 3 分)

因为

$$\begin{aligned}\sigma_1(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2) &= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\\ &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3) = -2p,\\ \sigma_2(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2) &= \alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2\\ &= (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)^2 - 2(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2)\\ &= p^2 - 2(-q)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = p^2,\\ \sigma_3(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2) &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 = (-q)^2 = q^2,\end{aligned}$$

(以上 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 各得 4 分)

故 $F(x) = x^3 + 2px^2 + p^2x - q^2$.

(到此得 15 分)

四. 1. 因为 Hermite 变换的特征值为实数，故对于任一 $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, 都有 $\mathbf{A}\alpha \neq \mathrm{i}\alpha$, 即 $(\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E})\alpha \neq 0$. 故 $\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E}$ 可逆.

2. 因 $\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E}$ 均可逆，而 $(\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E})\mathbf{U} = \mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E}$, 故

$$\mathbf{U}^*(\mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E}) = \mathbf{U}^*(\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E})^* = (\mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E})^* = \mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E}.$$

(到此得 4 分)

于是

$$(\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E})\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}^*(\mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E}) = (\mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E}) = (\mathbf{A}-\mathrm{i}\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathrm{i}\mathbf{E}),$$

由此得 $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{E}$.

(到此得 10 分)

五. 对 n 作数学归纳法. $n=1$ 时结论显然成立. 设对 $n-1$ 维酉空间结论成立. 当 $\dim V = n$ 时, 设 λ_0 为 $\mathbf{A}$ 的一个特征值, $\mathbf{A}\alpha = \lambda_0\alpha$ $(\alpha \neq 0)$, 则 $\mathbf{A}^*\alpha = \mu_0\alpha$. 令 $M = L(\alpha)$. 此时 $M^\perp$ 为 $\mathbf{A}^*$ 和 $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$ 的公共不变子空间.

(到此得 5 分)

限制在 $M^\perp$ 上, $\mathbf{A}|_{M^\perp}$ 和 $\mathbf{A}^*|_{M^\perp}$ 互为共轭变换. 显然 $\mathbf{A}|_{M^\perp}$ 的特征向量也是 $\mathbf{A}^*|_{M^\perp}$ 的特征向量. 于是, 按归纳法假设, $\mathbf{A}|_{M^\perp}$ 为 $M^\perp$ 上的正规变换: $\mathbf{A}|_{M^\perp}\mathbf{A}^*|_{M^\perp} = \mathbf{A}^*|_{M^\perp}\mathbf{A}|_{M^\perp}$. 显然又有 $\mathbf{A}\mathbf{A}^*\alpha = \lambda_0\mu_0\alpha = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\alpha$, 故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$, 即 $\mathbf{A}$ 为正规变换.

(到此得 10 分)

六. 对 n 作数学归纳法. $n=1$ 时结论显然成立. 设对 $n-1$ 维欧氏空间结论成立. 当 $\dim V = n$ 时, 若 V 内有 $n+2$ 个向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ 两两夹钝角, 于是 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$ $(1 \le i < j \le n+2)$. 令 $M = L(\alpha_{n+2}$. 则 $V = M \oplus M^\perp$. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n+1$, 设

$$\alpha_i = k_i\alpha_{n+2} + \beta_i, \quad (\beta_i \in M^\perp).$$

因 $(\alpha_i, \alpha_{n+2}) = k_i(\alpha_{n+2}, \alpha_{n+2}) < 0$, 故 $k_i < 0$. 又当 $i \neq j$ 时,

$$(\alpha_i, \alpha_j) = k_ik_j(\alpha_{n+2}, \alpha_{n+2}) + (\beta_i, \beta_j) < 0,$$

而 $k_ik_j(\alpha_{n+2}, \alpha_{n+2}) > 0$, 故 $(\beta_i, \beta_j) < 0$. 这样, $M^\perp$ 是 $n-1$ 维欧氏空间, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}$ 是 $M^\perp$ 内 $n+1$ 个两两夹钝角的向量, 与归纳假设矛盾.

(若证明中有实质性的思想, 但没有完成证明, 可得 1-2 分)

七. 1. 若 $M = \{0\}$, 结论显然成立. 下面设 $M \neq \{0\}$. 取 $A \in M$, $A \neq 0$, 则 $A^{-1} \in M$, 于是 $E = AA^{-1} \in M$. 考虑

$$E, A, A^2, \cdots.$$

由于 $\dim M \le n^2$, 故有

$$A^k = c_0E + c_1A + \cdots + c_{k-1}A^{k-1} \qquad (c_0, c_1, \cdots, c_{k-1} \in \mathbb{R}).$$

令 $f(x) = x^k - c_{k-1}A^{k-1} - \cdots - c_0 \in \mathbb{R}[x]$. 有

$$f(x) = (x-a_1)^{e_1}\cdots(x-a_r)^{e_r}(x^2+p_1x+q_1)^{f_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{f_s},$$

其中 $a_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $p_j^2 - 4q < 0$ $(1 \le 1 \le r,\ 1 \le j \le s)$. 于是

$$0 = f(A) = (A-a_1E)^{e_1}\cdots(A-a_rE)^{e_r}(A^2+p_1A+q_1E)^{f_1}\cdots(A^2+p_sA+q_sE)^{f_s}.$$

因 $A - a_iE \in M$, $A^2 + p_jA + q_jE \in M$, 由上式及 M 满足的条件推知必有某个 $A - a_iE = 0$ 或某个 $A^2 + p_jA + q_jE = 0$. 若 $A^2 + p_jA + q_jE = 0$, 即

$$(A + \frac{p_j}{2}E)^2 - \frac{p_j - 4q_j}{4}E = 0.$$

令 $B = A + \frac{p_j}{2}E$, 即为所求.

(到此得 3 分)

2. 将 $\mathbb{C}$ 看作 $\mathbb{R}$ 上的 2 维线性空间，定义映射

$$\mathrm{Tr}:\ M \to \mathbb{C},$$

其中 $\mathrm{Tr}(A)$ 为 $A \in M$ 的迹． Tr 显然是 $\mathbb{R}$-线性映射.

(i) 若 $A \in N$ 且 $A \neq 0$, 则 $A^2 = bE$ $(b \leq 0)$. A 的最小多项式为 $\lambda^2 - b$ 无重根，故 A 在 $\mathbb{C}$ 内相似于对角矩阵，主对角线上的元素为 $\pm\sqrt{b}$ 为纯虚数．于是 $\mathrm{Tr}(A)$ 为纯虚数 (注意：相似矩阵的迹相同).

(ii) 反之, 设 $A \in M$ 且 $\mathrm{Tr}(A)$ 为纯虚数. 若 $A = 0$, 显然 $A \in N$. 否则 $A \neq aE$ $(a \in \mathbb{R})$. 由上面 1. 的结果知 $A = aE + B$, 且 $B^2 = bE$ $(a, b \in \mathbb{R},\ b < 0)$. 于是 $\mathrm{Tr}(A) = na + \mathrm{Tr}(B)$. 而 $\mathrm{Tr}(B)$ 为纯虚数，故必有 $a = 0$, $A = B \in N$.

由 (i),(ii) 知： N 是 M 中迹为纯虚数的矩阵的全体．由此即知 N 关于 (实数) 数乘和加法封闭，故 N 是 M 的子空间.

(到此得 5 分)