第四章、符号测度

§4.1 符号测度

- $(X, \mathscr{F})$ 是可测空间. 研究对象:

$$\varphi(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}.$$

- 若 f 的积分存在, 则 φ 满足可列可加性.
- 定义4.1.1. 若 $\varphi : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ 满足可列可加性且 $\varphi(\varnothing) = 0$, 则称 φ 为符号测度. 若 $|\varphi(A)| < \infty, \forall A \in \mathscr{F}$, 则称 φ 是有限的. 若 $\exists X$ 的划分 $\{A_n\}$ 使 $|\varphi(A_n)| < \infty, \forall n$, 则称 φ 是 σ 有限的.
- 注: φ 具有可加性.

命题 (命题4.1.1)

二择一:

$$\text{或者 } \varphi(A) < \infty, \quad \forall A \in \mathscr{F};$$

$$\text{或者 } \varphi(A) > -\infty, \quad \forall A \in \mathscr{F}.$$

- 反证法: 若$\exists A, B$ 使得$\varphi(A) = \infty$, $\varphi(B) = -\infty$. 则

$$A \cup B = A + B \backslash A \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \infty.$$

$$\text{同理, } A \cup B = B + A \backslash B \Rightarrow \varphi(A \cup B) = -\infty.$$

  矛盾!

- 注: 约定 $\varphi(A) > -\infty, \forall A \in \mathscr{F}$.
- 注: 以下总假设φ 是符号测度, 所有集合均$\in \mathscr{F}$.

命题 (命题4.1.2)

若$A \supseteq B$ 且$|\varphi(A)| < \infty$, 则$|\varphi(B)| < \infty$.

- $A = B + A \backslash B$.
- 若$\varphi(B) = \infty$, 则$\varphi(A) = \infty$.
  若$\varphi(B) = -\infty$, 则$\varphi(A) = -\infty$.

命题 (命题4.1.3)

若$A_1, A_2, \cdots$ 两两不交且$\left|\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right| < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(A_n)| < \infty.$$

- 令$I = \{n : \varphi(A_n) > 0\}$, $J = \{n : \varphi(A_n) < 0\}$;

$$B = \sum_{n \in I} A_n, \quad C = \sum_{n \in J} A_n.$$

- $B, C \subseteq A$, 故$0 \leqslant |\varphi(B)|, |\varphi(C)| < \infty$.
- $\sum_{n \in I} |\varphi(A_n)| = \varphi(B)$, $\quad \sum_{n \in J} |\varphi(A_n)| = |\varphi(C)|$.
- 注: 若$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$, 则$\varphi(B) = \infty$, $-\infty < \varphi(C) \leqslant 0$.

§4.2 Hahn 分解和Jordan 分解

- 设φ 是符号测度, 所有集合均$\in \mathscr{F}$.
- 例, $\varphi(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu$.

$$\varphi(A)=\int_{A\cap\{f>0\}} f\mathrm{d}\mu+\int_{A\cap\{f<0\}} f\mathrm{d}\mu=\int_A f^+\mathrm{d}\mu-\int_A f^-\mathrm{d}\mu.$$

- 若X 的分割$\{X^+,X^-\}$ 满足:

$$\varphi(A)\geqslant 0,\ \forall A\subseteq X^+;\quad \varphi(A)\leqslant 0,\ \forall A\subseteq X^-,$$

则称$\{X^+,X^-\}$ 为φ 的Hahn 分解.

- 若φ^+,φ^- 是测度且

$$\varphi=\varphi^+-\varphi^-,$$

则称该式为φ 的Jordan 分解.

- 注: 若μ,ν 为测度, 则$\mu\pm\nu: A\mapsto\mu(A)\pm\nu(A)$.

- 目标: 找出X^+ 与X^-. 等价地, 找出φ^+.

$$\varphi(A \cap X^+) = \varphi^+(A).$$

- 记

$$\varphi^*(A) := \sup\{\varphi(B) : B \subseteq A\}.$$

- φ^* 非负、单调, $\varphi^*(\varnothing) = 0$.

引理 (引理4.2.1)

若$\varphi(A) < \infty$, 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon \subseteq A$ 使得

$$\varphi(A_\varepsilon) \geqslant 0 \text{ 且 } \varphi^*(A \backslash A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

- 反证法: 若$\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\spadesuit: \forall A_0 \subseteq A, \text{ 或者 } \varphi(A_0) < 0 \text{ 或者 } \varphi^*(A \backslash A_0) > \varepsilon_0.$$

- 取$A_0 = \varnothing$, 则$\varphi^*(A) > \varepsilon_0$.
- 于是$\exists B_1 \subseteq A$ 使$\varphi(B_1) > \varepsilon_0$, 由$\spadesuit$ 知$\varphi^*(A - B_1) > \varepsilon_0$.
- 于是$\exists B_2 \subseteq A - B_1 \subseteq A$ 使$\varphi(B_2) > \varepsilon_0$.
- $\varphi(B_1 + B_2) > 0$, 由$\spadesuit$ 知$\varphi^*\big(A - (B_1 + B_2)\big) > \varepsilon_0 \ \cdots\cdots$
- 令$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, 则$\varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n) = \infty \Rightarrow \varphi(A) = \infty$.

引理 (引理4.2.2)

设$\varphi(A) < 0$, 则$\exists A_0 \subseteq A$ 使得

$$\varphi(A_0) < 0 \text{ 且 } \varphi^*(A_0) = 0.$$

- 由引理4.2.1, $\exists C_1 \subseteq A$ 使$\varphi(C_1) \geqslant 0$ 且$\varphi^*(A \backslash C_1) \leqslant \varepsilon_1 := 1$.
- 令$A_1 := A - C_1$, 则$\varphi(A_1) < 0$, $\varphi^*(A_1) \leqslant \varepsilon_1 = 1$.
- ★★, $A_1 = A_2 + C_2$, $\varphi(C_2) \geqslant 0$ 且$\varphi^*(A_2) \leqslant \varepsilon_2 := \frac{1}{2}$. $\cdots$
- 令$C := \sum_{n=1}^{\infty} C_n$. $A_0 = A - C =\downarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
- $\varphi(A_0) < 0$:

$$\varphi(A) < 0, \quad \varphi(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(C_n) \geqslant 0.$$

- $\varphi^*(A_0) = 0$:

$$0 \leqslant \varphi^*(A_0) \leqslant \varphi^*(A_n) \leqslant \varepsilon_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

定理 (定理4.2.3, Hahn 分解)

Hahn分解存在惟一:

$$\varphi(A)=0,\ \forall A\subseteq X_1^+\Delta X_2^+=X_1^-\Delta X_2^-=X_1^+X_2^-+X_1^-X_2^+.$$

- (1) 往证$\mathscr{F}^- := \{A:\varphi^*(A)=0\}$ 是σ 环.
- (1.a) $\mathscr{F}^-$ 非空: $\varnothing\in\mathscr{F}^-$;
- (1.b) 若$A_1,A_2\in\mathscr{F}^-$, 则$A_1\backslash A_2\in\mathscr{F}^-$:

$$0\leqslant\varphi^*(A_1\backslash A_2)\leqslant\varphi^*(A_1)=0.$$

- (1.c) 若$A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{F}^-$ 两两不交, 则$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}^-$:

$$\varphi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(B\cap A_n)\leqslant 0,\quad \forall B\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}A_n.$$

- (2) 往证Hahn 分解存在: $\exists X^{\pm}$ 使得

$$X^+ + X^- = X, \quad \varphi(AX^+) \geqslant 0 \geqslant \varphi(AX^-), \ \forall A.$$

- 不妨设(约定) $\varphi(A) > -\infty, \forall A$.

  记$\alpha := \inf\{\varphi(A) : A \in \mathscr{F}^-\}$. $\quad \varnothing \in \mathscr{F}^- \Rightarrow \alpha \leqslant 0$.

- 取$\{A_n\} \in \mathscr{F}^-$ 使$\varphi(A_n) \to \alpha$. 则$X^- := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}^-$.

- $\alpha = \varphi(X^-) > -\infty$: $X^- \backslash A_n \in \mathscr{F}^-$,

$$\begin{aligned}\varphi(X^-) =& \varphi(A_n) + \varphi(X^- \backslash A_n) \\ \leqslant& \varphi(A_n) + \varphi^*(X^- \backslash A_n) = \varphi(A_n) \to \alpha.\end{aligned}$$

- $\forall A$, $\varphi(AX^-) \leqslant \varphi^*(AX^-) \leqslant \varphi^*(X^-) = 0$.

- 令$X^+ = X - X^-$. 往证$\varphi(AX^+) \geqslant 0, \forall A$.

- 令$X^+ = X - X^-$. 往证$\varphi(AX^+) \geqslant 0, \forall A$.

  反证法: 假设$\exists A \subseteq X^+$ 使$\varphi(A) < 0$.

- $\exists A_0 \subseteq A$ 使$\varphi(A_0) < 0$, 且$\varphi^*(A_0) = 0$, i.e. $A_0 \in \mathscr{F}^-$.

- $A_0 + X^- \in \mathscr{F}^-$, 且

$$\varphi(A_0 + X^-) = \varphi(A_0) + \varphi(X^-) < \alpha.$$

  与α 的定义矛盾!

- (3) 往证惟一性. 设$X_1^{\pm}$ 与$X_2^{\pm}$ 都是Hahn 分解.
- $A \subseteq X_1^+ \Delta X_2^+ = X_1^+ \cap X_2^- + X_2^+ \cap X_1^-$.
- $A_1 = A \cap \star$, 则

$$\left.\begin{aligned} A_1 \subseteq X_1^+ &\Rightarrow \varphi(A_1) \geqslant 0 \\ A_1 \subseteq X_2^- &\Rightarrow \varphi(A_1) \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(A_1) = 0.$$

- 同理, $\varphi(A \cap \star) =$. 从而

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap \star) + \varphi(A \cap \star) = 0.$$

定理 (定理4.2.4, Jordan 分解)

Jordan分解存在惟一:

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-, \quad 且\ \varphi^+ = \varphi^*,\ \varphi^- = (-\varphi)^*.$$

- $\varphi^\pm$ 都是测度, 且不妨设(约定) φ^- 有限:

$$\varphi^+(A) = \varphi(A \cap X^+), \quad \varphi^-(A) := -\varphi(A \cap X^-).$$

- $\varphi(A) = \varphi(A \cap X^+) + \varphi(A \cap X^-) = \varphi^+(A) - \varphi^-(A)$.
- $\varphi^* \leqslant \varphi^+$: $\forall B \subseteq A$, $\varphi(B) \leqslant \varphi^+(B) \leqslant \varphi^+(A)$.
- $\varphi^+ \leqslant \varphi^*$: $A \cap X^+ \subseteq A$.
- $(-\varphi)^* \leqslant \varphi^-$: $\forall B \subseteq A$, $-\varphi(B) \leqslant \varphi^-(B) \leqslant \varphi^-(A)$.
  $\varphi^- \leqslant (-\varphi)^*$: $A \cap X^- \subseteq A$.

- 注: $\varphi=\mu-\nu$ 分解不惟一, 例: $\mu=\varphi^{+}+\phi, \nu=\varphi^{-}+\phi$.
- 注: $\varphi^{\pm}$ 的支撑不交. 若$\phi\neq 0$ 则$\varphi^{\pm}+\phi$ 的支撑相交:
- φ 的上变差: φ^{+}; 下变差: φ^{-}.
- φ 的全变差: $|\varphi|:=\varphi^{+}+\varphi^{-}$.
- 引理*: $|\varphi|(A)=0$ iff $\varphi(B)=0, \forall B\subseteq A$.
- $\Rightarrow$:

$$|\varphi|(A)=0\Rightarrow\begin{cases}\varphi^{\pm}(A)=0\\ |\varphi|(B)=0\end{cases}\Rightarrow\varphi^{\pm}(B)=0\Rightarrow\varphi(B)=0.$$

- $\Leftarrow$: 记φ 的Hahn 分解为$X^{\pm}$, 则

$$\varphi(X^{\pm}\cap A)=0\Rightarrow\varphi^{\pm}(A)=0\Rightarrow|\varphi|(A)=0.$$

- 注: $|\varphi(A)|\leqslant|\varphi|(A)$. 仅当$|\varphi|(A)=0$ 时, A 才可以被忽略.

§4.3 Radon-Nikodym 定理

- $(X, \mathscr{F})$ 是可测空间, μ 是测度, φ 是符号测度.
  以下事件、函数均可测.
- 定义4.3.1. 若存在a.e. 下惟一的可测函数f 使得

$$\varphi(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F},$$

则称f 为φ 对于μ 的Radon-Nikodym 导数,
简称R-N 导数或导数, 记为$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$.

- 定义4.3.2. 若$\forall A \in \mathscr{F}$,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0,$$

则称φ 对μ 绝对连续, 记作$\varphi \ll \mu$.

- 注: $\varphi \ll \mu \quad \text{iff} \quad \varphi^{\pm} \ll \mu \quad \text{iff} \quad |\varphi| \ll \mu$..

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A \cap X^{\pm}) \Rightarrow \varphi^{\pm}(A) = \varphi(A \cap X^{\pm}) = 0.$$

- 往证: 若μ 是σ 有限的且$\varphi \ll \mu$, 则$\frac{d\varphi}{d\mu}$ 存在.

命题4.3.2		命题4.3.3		命题4.3.4		定理4.3.5
φ有限	$\to$	φ σ有限	$\to$	φ任意		
μ有限					$\to$	μ σ有限.

引理 (引理4.3.1)

设φ, μ 都是有限测度. 则

$$\exists f \in \mathscr{L} := \left\{ g \in L_1 : g \geqslant 0, \int_A g \mathrm{d}\mu \leqslant \varphi(A), \ \forall A \right\}$$

$$\text{使得} \int_X f \mathrm{d}\mu = \beta := \sup \left\{ \int_X g \mathrm{d}\mu : g \in \mathscr{L} \right\}.$$

- 注: 因为φ 有限, 所以$\beta \leqslant \varphi(X) < \infty$.
- 取$g_1, g_2, \cdots \in \mathscr{L}$ 使$\int_X g_k \mathrm{d}\mu \to \beta$. 令

$$f_n := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} g_k.$$

- $f_n \uparrow f := \sup\limits_{k\geqslant 1} g_k$, 则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\mathrm{d}\mu = \beta.$$

- $B_{n,1} = \{f_n = g_1\}$,

$$B_{n,k} = \{f_n = g_k > \max\{g_1, \cdots, g_{k-1}\}\} = \{f_n = g_k\}\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}\{f_n = g_i\}.$$

- $f \in \mathscr{L}$: $f \geqslant 0$, 且

$$\int_A f\mathrm{d}\mu \leftarrow \int_A f_n\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n}\int_{A\cap B_{n,k}} f_n\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n}\int_{A\cap B_{n,k}} g_k\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\varphi(A\cap B_{n,k}) = \varphi(A).$$

命题 (命题4.3.2)

设φ, μ 都是有限测度. 若$\varphi \ll \mu$, 则$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 存在, 且$\in L_1$.

- $f \in \mathscr{L} \Rightarrow \nu$ 是测度. 往证$\nu \equiv 0$.

$$\nu(A) := \varphi(A) - \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}.$$

- ν_n 是($\uparrow$ 的)符号测度.

$$\nu_n(A) := \nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F}.$$

- 记ν_n 的Hahn 分解为$X_n^{\pm}$. 往证$\nu(X^{\pm}) = 0$, 其中

$$X^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^+, \quad X^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^-.$$

- $\nu(X^-) = 0$: $X^- \subseteq X_n^-$, 故

$$0 \leqslant \nu(X^-) = \nu_n(X^-) + \frac{1}{n}\mu(X^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(X^-) \to 0.$$

- $f+\frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+}\in\mathscr{L}$:

$$\begin{aligned}\int_A\left(f+\frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+}\right)\mathrm{d}\mu =&\varphi(A)-\nu(A)+\frac{1}{n}\mu(X_n^+\cap A)\\ \leqslant&\varphi(A)-\nu(X_n^+\cap A)+\frac{1}{n}\mu(X_n^+\cap A)\\ =&\varphi(A)-\nu_n(X_n^+\cap A)\leqslant\varphi(A).\end{aligned}$$

- $\mu(X^+)=0$:

$$\int_X\left(f+\frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+}\right)\mathrm{d}\mu\leqslant\beta=\int_X f\mathrm{d}\mu\Rightarrow\mu(X_n^+)=0,\forall n.$$

- $\varphi\ll\mu\Rightarrow\varphi(X^+)=0$, 故$\nu(X^+)=0$.
- $\int_X|f|\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu=\varphi(X)<\infty$, 故$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}\in L_1$.

命题 (命题4.3.3)

设φ 是σ 有限的符号测度，μ 是有限测度. 若$\varphi \ll \mu$，则$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 存在，$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 是μ-a.e.有限的，且积分存在.

- 设φ 有限. 则$\varphi^{\pm}$ 均为有限测度，且$\varphi^{\pm} \ll \mu$. 于是$\frac{\mathrm{d}\varphi^{\pm}}{\mathrm{d}\mu}$ 存在.
- $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\varphi^{+}}{\mathrm{d}\mu} - \frac{\mathrm{d}\varphi^{-}}{\mathrm{d}\mu}$:

$$\varphi(A) = \varphi^{+}(A) - \varphi^{-}(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\varphi^{+}}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu - \int_A \frac{\mathrm{d}\varphi^{-}}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu.$$

- 假设命题成立. 记φ 的Hahn 分解$X^{\pm}$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi^{+}}{\mathrm{d}\mu}\right|_{X^-} = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi^{-}}{\mathrm{d}\mu}\right|_{X^+} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}\right)^{\pm} = \frac{\mathrm{d}\varphi^{\pm}}{\mathrm{d}\mu}.$$

- 设φ 是σ 有限的. $X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 且$|\varphi(A_n)| < \infty$, $\forall n \geqslant 1$.
- 在$(A_n, A_n \cap \mathscr{F})$ 上, R-N 导数f_n 存在且a.e. 有限.

$$f_n := \frac{\mathrm{d}\varphi|_{A_n \cap \mathscr{F}}}{\mathrm{d}\mu|_{A_n \cap \mathscr{F}}}, \quad \text{即 } \varphi(A) = \int_A f_n \mathrm{d}\mu, \ \forall A \subseteq A_n.$$

- 令$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{I}_{A_n}$, 则$f$ a.e. 有限.

$$\varphi(A \cap A_n) = \int_{A \cap A_n} f_n \mathrm{d}\mu = \int_{A \cap A_n} f \mathrm{d}\mu, \quad \forall A.$$

- f 的积分存在: 不妨设φ^- 有限, 取$A = \{f < 0\}$, 则

$$\varphi(\{f < 0\} \cap A_n) = -\int_{A_n} f^- \mathrm{d}\mu \Rightarrow \int_X f^- \mathrm{d}\mu = -\varphi(f < 0) < \infty.$$

- 故 $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap A_n} f \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu$.

命题 (命题4.3.4)

设φ 是符号测度, μ 是有限测度. 若$\varphi \ll \mu$, 则$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 及其积分存在. 又若φ 是σ 有限的, 则f 是μ-a.e. 有限的.

- (1) 往证$\mathscr{G}$ 是σ 环.

$$\mathscr{G} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n : |\varphi(A_n)| < \infty, n = 1, 2, \cdots \right\}.$$

- $\varnothing \in \mathscr{G}$; 不交并封闭; 差封闭:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \backslash \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash B)$$

其中, $A_n \backslash B \subseteq A_n$ 故$|\varphi(A_n \backslash B)| < \infty$.

- (2) $\exists B \in \mathscr{G}$ 使得$\mu(B) = \gamma := \sup\{\mu(A) : A \in \mathscr{G}\}$.

$$\text{取 } B_n \in \mathscr{G}, \mu(B_n) \to \gamma \in [0, \infty), \ B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{G} \text{ 即可.}$$

- (3) 在$(B, B \cap \mathscr{F})$ 上, φ 是σ 有限的, μ 有限.

故R-N 导数$g = \frac{\mathrm{d}\varphi|_{B\cap\mathscr{F}}}{\mathrm{d}\mu|_{B\cap\mathscr{F}}}$ 存在, 是μ-a.e. 有限的, :

$$\varphi(C) = \int_C g \mathrm{d}\mu, \ \forall C \subseteq B. \quad \text{不妨设(按约定)} \int_B g^- \mathrm{d}\mu < \infty.$$

- (4) 在$(B^c, B^c \cap \mathscr{F})$ 上, $\forall C \subseteq B^c$,

$$\mu(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(C) = 0; \qquad (\varphi \ll \mu)$$

$$\mu(C) > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(C) = \infty. \quad (\text{否则 } B + C \in \mathscr{G} \text{ 与 } \star\&* \text{ 矛盾})$$

于是, $\varphi(C) = \int_C \infty \mathrm{d}\mu, \ \forall C \subseteq B^c$.

- (5) 令$f = g\mathbf{I}_B + \infty\mathbf{I}_{B^c}$, 则$f$ 的积分存在:

$$\int_X f^- \mathrm{d}\mu = \int_B g^- \mathrm{d}\mu < \infty.$$

- $\forall A$,

$$\begin{aligned}\varphi(A) =&\varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) = \int_{A\cap B} g \mathrm{d}\mu + \int_{A\cap B^c} \infty \mathrm{d}\mu \\ =& \int_{A\cap B} f \mathrm{d}\mu + \int_{A\cap B^c} f \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

- 当φ 是σ 有限时, $X \in \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{G} = \mathscr{F} \Rightarrow$ 可取$B = X$, 故

$$f \overset{\text{a.e.}}{=} g, \quad \text{a.e.有限}.$$

定理 (定理4.3.5)

设φ 是符号测度, μ 是σ 有限的测度. 若$\varphi \ll \mu$, 则$\frac{d\varphi}{d\mu}$ 及其积分存在. 又若φ 是σ 有限的, 则f 是μ-a.e. 有限的.

- 取$\{A_n\}$ 使得$X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 且$\mu(A_n) < \infty$, $\forall n$.
- 在$(A_n, A_n \cap \mathscr{F})$ 上, R-N 导数$f_n := \frac{d\varphi|_{A_n \cap \mathscr{F}}}{d\mu|_{A_n \cap \mathscr{F}}}$ 存在:

$$\varphi(A) = \int_A f_n d\mu, \ \forall A \subseteq A_n.$$

- 不妨设(按约定) $\varphi(A) > -\infty$, $\forall A$. 故

$$\int_A f_n^- d\mu < \infty, \quad \forall n.$$

- 令$f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{I}_{A_n}$. 则$f$ 积分存在:

$$\int_X f^- \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^- \mathrm{d}\mu = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap \{f<0\}} f \mathrm{d}\mu$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap \{f<0\}} f_n \mathrm{d}\mu = -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n \cap \{f<0\})$$
$$= -\varphi(f<0) < \infty. \quad (\text{由不妨设/约定})$$

- $\forall A$,

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap A_n} f \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu.$$

- 当φ 是σ 有限时, 在A_n 中f_n 是μ-a.e. 有限的, 故f 是μ-a.e. 有限的.

例1(μ 不是σ 有限的). $X=\mathbb{R}$, $\mathscr{F}=\{A\subseteq X: A$或$A^c$至多可数$\}$.

- 令
$$\mu(A)=\begin{cases}\#(A), & \#(A)<\infty,\\ \infty, & \#(A)=\infty.\end{cases}$$
则μ 不是σ 有限的!

- 令
$$\varphi(A)=\begin{cases}0, & \text{若}A\text{ 至多可数},\\ 1, & \text{若}A^c\text{ 至多可数}.\end{cases}$$

- $\varphi\ll\mu$:
$$\mu(A)=0\Rightarrow A=\varnothing\Rightarrow\varphi(A)=0.$$

- $f=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 不存在. 否则
$$0=\varphi(\{x\})=\int_{\{x\}}f\mathrm{d}\mu=f(x)\cdot\mu(\{x\})=f(x),\ \forall x\Rightarrow f\equiv 0.$$

§4.4 Lebesgue 分解

- 设$(X, \mathscr{F})$ 是可测空间, φ, ϕ 都是符号测度.
  以下事件、函数均可测.
- 若$\varphi \ll |\phi| = \phi^+ + \phi^-$, 则称$\varphi$ 对ϕ 绝对连续, 记作$\varphi \ll \phi$.
- 注: $\varphi \ll \phi$ iff $|\varphi| \ll |\phi|$.
- 证: $\Rightarrow$: $\varphi \ll |\phi| \Rightarrow |\varphi| \ll |\phi|$, ✓.
  $\Leftarrow$: $|\phi|(A) = 0 \Rightarrow |\varphi|(A) = 0 \Rightarrow |\varphi(A)| \leqslant 0$.

- 定义4.4.1. 若$\exists N\in\mathscr{F}$ 使得

$$|\varphi|(N^c)=|\phi|(N)=0,$$

则称φ 与ϕ 相互奇异, 记为$\varphi\perp\phi$.

- 引理4.4.1. $\varphi\perp\phi$ 当且仅当$\exists N\in\mathscr{F}$ 使得

$$\varphi(A\cap N^c)=\phi(A\cap N)=0,\quad \forall A.$$

- 证: 由§4.2 "引理*: $|\varphi|(A)=0$ iff $\varphi(B)=0, \forall B\subseteq A$", ✓.
- 引理4.4.2. 若$\varphi\ll\phi$ 且$\varphi\perp\phi$, 则$\varphi\equiv 0$.
- 证: 取$N\in\mathscr{F}$ 使得$\star\star$. 于是, $|\varphi|(N)=0$. 故$|\varphi|(X)=0$.

- Lebesgue 分解: φ, ϕ 都是σ 有限的符号测度, 则存在(惟一的一组) σ 有限的符号测度φ_c, φ_s 使得

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s; \quad \varphi_c \ll \phi; \quad \varphi_s \perp \phi.$$

- 惟一性的证明: 对任意满足$|\phi|(N) = |\varphi_s|(N^c) = 0$ 的N,

$$\varphi_c(A) = \varphi_c(AN)+\varphi_c(AN^c) = \varphi_c(AN^c) = \varphi(AN^c); \quad \varphi_s(A) = \varphi(AN).$$

若有两种分解, 取$N = N_1 \cup N_2$ 即可.

- 证明顺序:

命题4.4.3		命题4.4.4		定理4.4.5		推论4.4.6
φ : f.m.	$\to$	σ f.m.	$\to$	σ f.s.m.		
μ : f.m.	$\to$	σ f.m.			$\to$	σ f.s.m..

命题 (命题4.4.3)

设φ,μ 都是有限的测度，则存在有限测度 φ_c,φ_s 使得:

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s; \quad \varphi_c \ll \mu; \quad \varphi_s \perp \mu.$$

- $\varphi \ll \varphi + \mu$, 故$f := \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}(\varphi+\mu)}$ 存在，且$0 \leqslant f \leqslant 1$, ($\mu$-a.e.):

$$0 \leqslant \int_A f \mathrm{d}(\varphi+\mu) = \varphi(A) \leqslant (\varphi+\mu)(A) = \int_A \mathbf{1} \mathrm{d}(\varphi+\mu), \ \forall A.$$

- $\star\star$: 令$N = \{f = 1\}$,

$$\varphi_c(A) := \varphi(A \cap N^c); \quad \varphi_s(A) := \varphi(A \cap N).$$

- 注: φ_s 由N 支撑，φ_c (往证: 与μ) 由$N^c = \{0 \leqslant f < 1\}$ 支撑.

- $N=\{f=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}(\varphi+\mu)}=1\}$, $N^c=\{0\leqslant f<1\}$,

$$\varphi_c(A):=\varphi(A\cap N^c);\quad \varphi_s(A):=\varphi(A\cap N).$$

- $\varphi_s\perp\mu$: $\varphi_s(N^c)=0$; 且$\mu(N)=0$:

$$\varphi(N)=\int_N f\mathrm{d}(\varphi+\mu)=\int_N \mathbf{1}\mathrm{d}(\varphi+\mu)=\varphi(N)+\mu(N).$$

- $\varphi_c\ll\mu$: 若$\mu(A)=0$, 则

$$\int_{AN^c}(1-f)\mathrm{d}(\varphi+\mu)=\mu(AN^c)=0\Rightarrow\varphi_c(A)\leqslant(\varphi+\mu)(AN^c)=0.$$

命题 (命题4.4.4)

设φ, μ 都是σ 有限的测度，则存在σ 有限的测度φ_c, φ_s 使得：

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s; \quad \varphi_c \ll \mu; \quad \varphi_s \perp \mu.$$

定理 (定理4.4.5, Lebesgue 分解)

设φ 是σ 有限的符号测度，μ 是σ 有限的测度.

则存在惟一的一对 σ 有限的符号测度φ_c, φ_s 使得$\star$.

推论 (推论4.4.6)

设φ, ϕ 都是σ 有限的符号测度，则存在惟一的一对σ 有限的符号测度φ_c, φ_s 使得$\star$.

例. 分布与随机变量的分布.

- 设μ 是$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上的概率分布, λ 是Lebesgue 测度.
- 若$\mu \ll \lambda$, 则称μ 为连续型, 称$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ 为μ 的(概率分布)密度.
- 若$\mu(\{x\}) > 0$, 则称x 为μ 的原子. μ 有限$\Rightarrow D$ 可数,

$$D = D_\mu := \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}, \quad \text{记 } D = \{x_n, n \geqslant 1\}.$$

- 若$\mu(D) = 1$, 则称μ 为离散型, 记$p_n = \mu(\{x_n\})$, $\forall n$.
  称$\{(x_n, p_n), n \geqslant 1\}$ 为μ 的(概率)分布列.
- 若$\mu \perp \lambda$ 且$\mu(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 则称μ 为奇异型.

- μ 是有限测度, λ 是σ 有限的测度.
- μ 关于λ 的Lebesgue 分解:

$$\mu = \mu_c + \mu_s; \quad \mu_1 := \mu_c \ll \lambda; \quad \mu_s \perp \lambda.$$

- μ 的所有原子组成可数集D. 令

$$\mu_2(A) := \mu_s(A \cap D), \quad \mu_3 := \mu_s - \mu_2.$$

- 令$\alpha_i := \mu_i(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$. 则

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

- 若$\alpha_i = 1$, 则$\mu = \mu_i$. 此时μ 为连续型/离散型/奇异型.
- 若$\alpha_i > 0$, 则可将μ_i 归一化为分布, $\tilde{\mu}_i := \frac{1}{\alpha_i}\mu_i$.
- 若$\alpha_i = 0$, 则任取一个同类型分布作为$\tilde{\mu}_i$.
- 存在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 连续型分布$\tilde{\mu}_1$, 离散型分布$\tilde{\mu}_2$, 奇异型分布$\tilde{\mu}_3$ 使得: $\star\star$ 且

$$\mu = \alpha_1\tilde{\mu}_1 + \alpha_2\tilde{\mu}_2 + \alpha_3\tilde{\mu}_3.$$

- 设$(X, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间, ξ 为随机变量.
- ξ 的分布: $\mu = \mu_\xi = P \circ \xi^{-1}$.
- 若$\alpha_1 = 1$, 则μ_ξ 为连续型, 此时称ξ 为连续型r.v., 称μ_ξ 的密度$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\lambda}$ 为ξ 的(概率分布)密度.
- 若$\alpha_2 = 1$, 则μ_ξ 为离散型, 此时称ξ 为离散型r.v., 称μ_ξ 的分布列为ξ 的分布列.
- 若$\alpha_3 = 1$, 则μ_ξ 为奇异型, 此时称ξ 为奇异型r.v..

- 连续型r.v. 函数的期望:

$\xi : (X, \mathscr{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, $g : (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}) \hookleftarrow$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{E}g(\xi) &= \int_X g \circ \xi \mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu_\xi = \int_{\mathbb{R}} g \frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} g \cdot p_\xi \mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

§4.5 条件期望和条件概率

- 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间.
- 设$\mathscr{G}$ 是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数:

$$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F} \quad 且\mathscr{G} 是\sigma 代数.$$

- 以下, 事件、函数都关于$\mathscr{F}$ 可测, 集合系都是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数.

- 定义4.5.1. 假设f 的积分存在. 称满足下列(1), (2) 的f^* 为f 关于$\mathscr{G}$ 的条件期望, 记为$\mathrm{E}(f|\mathscr{G})$.

  (1) f^* 是$(\Omega, \mathscr{G}, P)$ 上积分存在的可测函数;

  (2) $\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E}f^*\mathbf{I}_A = \mathrm{E}f\mathbf{I}_A, \quad 即 \int_A f^*\mathrm{d}P = \int_A f\mathrm{d}P.$$

- 注: $\mathrm{E}(f|\mathscr{G})$ 存在, 指一族在$(\Omega, \mathscr{G}, P)$ 中a.s. 相等的r.v..

条件期望的性质

- 设$\{A_t, t \in T\} \subseteq \mathscr{F}$. 若$\forall n \geqslant 2$, $\{t_1, \cdots, t_n\} \subseteq T$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{t_i}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_{t_k}\right),$$

则称$\{A_t, t \in T\}$ 相互独立.

- 设$\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}$, $\forall t \in T$. 若任取$A_t \in \mathscr{E}_t$, $t \in T$, 总有$\{A_t, t \in T\}$ 相互独立, 则称$\{\mathscr{E}_t, t \in T\}$ 相互独立.
- 设$\{f_t, t \in T\}$ 是随机变量族. 若$\{\sigma(f_t), t \in T\}$ 相互独立, 则称$\{f_t, t \in T\}$ 相互独立.
- 引理4.5.1. 设f 是积分存在的r.v.. 若f 与$\mathscr{E}$ 相互独立(即, $\sigma(f)$ 与$\mathscr{E}$ 相互独立), 则

$$\mathrm{E}(f\mathbf{I}_A) = (\mathrm{E}f) \cdot P(A).$$

定理 (定理4.5.2)

设f, g 是积分存在的r.v., $\mathscr{G}, \mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数.

(1) (可测性) 若$f \in \mathscr{G}$, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} f$. Esp, $\mathrm{E}(a|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} a$.

(2) (独立性) 若f 与$\mathscr{G}$ 独立, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}f$.

Esp, 可取$\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$.

(3) (重条件期望公式) 若$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}_0$, 则

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(f|\mathscr{G})|\mathscr{G}_0\right) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(f|\mathscr{G}_0)|\mathscr{G}\right).$$

(4) (单调性) 若$f \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} g$, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} \mathrm{E}(g|\mathscr{G})$. Esp, $g = |f|$.

(5) (线性) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 若$a\mathrm{E}f + b\mathrm{E}g$ 有意义, 则

$$\mathrm{E}(af + bg|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} a\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) + b\mathrm{E}(g|\mathscr{G}).$$

定理 (定理4.5.2)

设f, g 是积分存在的r.v., $\mathscr{G}, \mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数.

(1) (可测性) 若$f \in \mathscr{G}$, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} f$. Esp, $\mathrm{E}(a|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} a$.

(2) (独立性) 若f 与$\mathscr{G}$ 独立, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}f$. Esp, $\{\varnothing, \Omega\}$.

- (1) 可测性: ✓. $f^* := f \in \mathscr{G}$.
  强调: a.s. 提及的零测集$\in \mathscr{G}$.
- (2) 独立性: $f^* := \mathrm{E}f \in \mathscr{G}$, 且$\forall A \in \mathscr{G}$

$$\mathrm{E}f\mathbf{I}_A = (\mathrm{E}f)P(A) = \mathrm{E}f^*\mathbf{I}_A.$$

- 特别地, f 与$\{\varnothing, \Omega\}$, 故

$$\mathrm{E}(f|\{\varnothing, \Omega\}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}f.$$

定理 (定理4.5.2)

设f, g 是积分存在的r.v., $\mathscr{G}, \mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数.

(3) (重条件期望公式) 若$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}_0$, 则

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(f|\mathscr{G})|\mathscr{G}_0\right) \stackrel{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(f|\mathscr{G}_0)|\mathscr{G}\right).$$

- (3) 重条件期望公式: 记$f^* := \mathrm{E}(f|\mathscr{G})$, 则$f^* \in \mathscr{G}$.
- 一方面,

$$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}_0 \Rightarrow f^* \in \mathscr{G}_0 \Rightarrow \mathrm{E}(f^*|\mathscr{G}_0) \stackrel{\text{a.s.}}{=} f^*;$$

- 另一方面, 记$\hat{f} := \mathrm{E}(f|\mathscr{G}_0)$, 则$\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E} f^* \mathbf{I}_A = \mathrm{E} f \mathbf{I}_A \stackrel{A \in \mathscr{G}_0}{=} \mathrm{E} \hat{f} \mathbf{I}_A,$$

故$f^* = \mathrm{E}(\hat{f}|\mathscr{G})$.

定理 (定理4.5.2)

设f,g 是积分存在的r.v., $\mathscr{G},\mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数.

(4) (单调性) 若$f \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} g$, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} \mathrm{E}(g|\mathscr{G})$. Esp, $g=|f|$.

- (4) 单调性: $\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E}f^*\mathbf{I}_A = \mathrm{E}f\mathbf{I}_A \leqslant \mathrm{E}g\mathbf{I}_A = \mathrm{E}g^*\mathbf{I}_A.$$

P 是σ 有限的(概率测度), 故$f^* \leqslant g^*$ (在$(\Omega,\mathscr{G},P)$ 中) a.s..

(习题三、4)

定理 (定理4.5.2)

设f, g 是积分存在的r.v., $\mathscr{G}, \mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数.

(5) (线性) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 若$a\mathrm{E}f + b\mathrm{E}g$ 有意义, 则

$$\mathrm{E}(af + bg|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} a\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) + b\mathrm{E}(g|\mathscr{G}).$$

- (5) 线性: 若$\star$ 有意义, 则$h = af + bg$ (a.s.有意义且)积分存在, 故$h^* := \mathrm{E}(af + bg|\mathscr{G})$ 存在.
- 记$f^* := \mathrm{E}(f|\mathscr{G})$, $g^* := \mathrm{E}(g|\mathscr{G})$, 则$a\mathrm{E}f^* + b\mathrm{E}g^* = a\mathrm{E}f + b\mathrm{E}g$ 有意义, 故$\hat{h} := af^* + bg^*$ (a.s.有意义且)积分存在.
- $\hat{h} = h^*$ a.s.: $\hat{h} \in \mathscr{G}$, 且$\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E}\hat{h}\mathbf{I}_A = a\mathrm{E}f^*\mathbf{I}_A + b\mathrm{E}g^*\mathbf{I}_A = a\mathrm{E}f\mathbf{I}_A + b\mathrm{E}g\mathbf{I}_A = \mathrm{E}h\mathbf{I}_A.$$

- 归纳: $\mathrm{E}f + \mathrm{E}g + \mathrm{E}h$ 有意义$\Rightarrow (f + g + h)^* \overset{\text{a.s.}}{=} f^* + g^* + h^*$.

定理 (定理4.5.3)

设$f, f_1, f_2, \cdots$ 是积分存在的r.v., $\mathscr{G}$ 是$\mathscr{F}$ 的子σ 代数.

(1) (Levi 定理、单调收敛定理) 若$0 \leqslant f_n \uparrow f$ a.s., 则

$$0 \leqslant \mathrm{E}(f_n|\mathscr{G}) \uparrow \mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \text{ a.s.};$$

(2) (Fatou 引理) 若$f_n \geqslant 0$ a.s., 则

$$\mathrm{E}\left(\liminf_{n\to\infty} f_n|\mathscr{G}\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(f_n|\mathscr{G}) \text{ a.s.};$$

(3) (Lebesgue 控制收敛定理) 若$|f_n| \leqslant g \in L_1$, $n = 1, 2, \cdots$ 且$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ a.s., 则

$$\mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty} f_n|\mathscr{G}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(f_n|\mathscr{G}) \text{ a.s..}$$

- (1)单调收敛定理: 若$0 \leqslant f_n \uparrow f$ a.s., 则

$$f_n^* := \mathrm{E}(f_n|\mathscr{G}) \in \mathscr{G}, \text{ 非负且}\uparrow \text{a.s..}$$

- 记$\hat{f} = \uparrow \lim_{n\to\infty} f_n^*$, 则$\hat{f} \in \mathscr{G}$.
- $\hat{f} = f^* := \mathrm{E}(f|\mathscr{G})$: $\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E}\hat{f}\mathbf{I}_A = \uparrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}f_n^*\mathbf{I}_A = \uparrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}f_n\mathbf{I}_A = \mathrm{E}f\mathbf{I}_A.$$

- (2) Fatou 引理. 若$f_n \geqslant 0$ a.s., $\forall n$, 则

$$g_n := \inf_{m\geqslant n} f_m \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n =: f \Rightarrow g_n^* \uparrow f^*.$$

- $g_n \leqslant f_n \Rightarrow g_n^* \leqslant f_n^* \Rightarrow f^* \leqslant \liminf_{n\to\infty} f_n^*$ a.s..
- (3) Lebesgue 控制收敛, 略.

定理 (定理4.5.4, 条件期望的线性)

设f, g 是r.v., f, fg 的积分存在, $g \in \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. 则

$$\mathrm{E}(fg|\mathscr{G}) = g\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \text{ a.s..}$$

- 设$f, g \geqslant 0$. 对g 用典型方法.
- 记$f^* = \mathrm{E}(f|\mathscr{G})$. 设$g = \mathbf{I}_A$, 其中$A \in \mathscr{G}$. ⋆⋆ 成立: $\mathbf{I}_A f^* \in \mathscr{G}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left((\mathbf{I}_A f^*) \times \mathbf{I}_B\right) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(f|\mathscr{G})\mathbf{I}_{AB}\big) \\ \overset{AB\in\mathscr{G}}{=} &\mathrm{E}f\mathbf{I}_{AB} = \mathrm{E}\big((f\mathbf{I}_A) \times \mathbf{I}_B\big), \quad \forall B \in \mathscr{G}. \end{aligned}$$

- $g = \mathbf{I}_A \to g \geqslant 0$: 条件期望的线性、单调收敛定理.

- 去掉$f,g\geqslant 0$ 的假设. 按f,g 的符号划分Ω,

$$\Omega_1=\{f,g\geqslant 0\},\quad \Omega_2=\{f,g<0\},\quad \Omega_3,\Omega_4.$$

- fg 的积分存在, 故$(fg)_i=fg\mathbf{I}_{\Omega_i}$ 积分都存在且可和.
- 由条件期望的线性, $\mathrm{E}(fg|\mathscr{G})=\sum_i\mathrm{E}((fg)_i|\mathscr{G})$.
- $\mathrm{E}((fg)_i|\mathscr{G})$:

$$(fg)_1^*=(f^+g^+)^*=g^+(f^+)^*,$$
$$(fg)_3^*=(-f^+g^-)^*=-(f^+g^-)^*=-g^-(f^+)^*,$$
$$\Rightarrow(fg)^*=g^+(f^+)^*+g^-(f^-)^*-g^-(f^+)^*-g^+(f^-)^*=gf^*.$$

条件分布$\mathscr{L}(\eta|\xi = x)$.

- 假设ξ, η 为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的两个随机元.
  $\xi : (\Omega, \mathscr{F}, P) \to (X, \mathscr{F}_X, \mu_\xi)$, $\mathscr{G} = \sigma(\xi) \subseteq \mathscr{F}$.
  $\eta : (\Omega, \mathscr{F}, P) \to (Y, \mathscr{F}_Y, \mu_\eta)$.
- 设ζ 为随机变量, 期望存在. 记$\zeta^* = \mathrm{E}(\zeta|\xi) := \mathrm{E}(\zeta|\mathscr{G})$.
  则$\zeta^* \in \mathscr{G}$. 由定理1.5.4, $\exists \varphi : (X, \mathscr{F}_X) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 使得

$$\zeta^* = \varphi(\xi), \quad P\text{-a.s..}$$

- 定义4.5.3. 称满足$\star$ 的$\varphi(\cdot)$ 为ζ 关于ξ 的给定值的条件期望.
  记为$\mathrm{E}(\zeta|\xi = \cdot)$.

- 定义4.5.4 若二元函数

$$\nu_x(B) = \nu(x, B),\ x \in X, B \in \mathscr{F}_Y$$

满足:

(1) $\forall x \in X$, ν_x 是$\mathscr{F}_Y$ 上的分布,

(2) $\forall B \in \mathscr{F}_Y$, $\nu(\cdot, B) = P(\eta \in B | \xi = x)$, μ_ξ-a.s.. 即

$$\mathrm{E}\mathbf{I}_{\{\eta \in B\}}\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}} = \mathrm{E}\nu(\xi, B)\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}},$$

则称它为η 关于ξ 的给定值的正则条件分布, 记为$\mu_{\eta|\xi}(\cdot, \cdot)$.

- 注: 概率论中记为$\mu_{\eta|\xi}(B|x)$.

- 假设$\eta:(\Omega,\mathscr{F},P)\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 是随机变量.
- 推论4.5.8. η 关于ξ 的给定值的正则条件分布 $\mu_{\eta|\xi}(\cdot,\cdot)$ 存在, 且条件期望= 对正则条件分布求期望: $\forall$ Borel 函数h,

$$\mathrm{E}\left(h(\eta)|\xi=x\right)=\int_{\mathbb{R}}h(y)\mu_{\eta|\xi}(x,\mathrm{d}y)\quad \mu_\xi\text{-a.s.}.$$

- 简记$\nu_x(B):=\mu_{\eta|\xi}(x,B)$, $x\in X$, $B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
- $\star\star$的证明: 令$\varphi(x):=$ RHS. 即证$\varphi(\xi)=\mathrm{E}(h(\eta)|\xi)$. 需验证:

$$(1)\varphi:(X,\mathscr{F}_X)\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}});\quad (2)\ \mathrm{E}h(\eta)\mathbf{I}_{\{\xi\in A\}}=\mathrm{E}\varphi(\xi)\mathbf{I}_{\{\xi\in A\}}.$$

- $\star\star$: 上式对$h=\mathbf{I}_B$ 成立.
- $\star\star\Rightarrow\star\star$, 即$\mathbf{I}_B\to$ 任意h, 典型方法✓.

- 推论4.5.8.中存在性的证明:
  目标: $\nu_x(B) = \mu_{\eta|\xi}(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 存在.
- 方法: 找出对应的分布函数$F_x(y) = \nu_x((-\infty, y])$.
- 定义4.5.2*. 若二元函数

$$F(x, y), \quad x \in X, \ y \in \mathbb{R}$$

满足

(1) $\forall x \in X$, $F(x, \cdot)$ 是分布函数,

(2) $\forall y \in \mathbb{R}$, $F(x, y) = P(\eta \leqslant y | \xi = x)$, μ_ξ-a.s.. 即

$$\mathrm{E}\mathbf{I}_{\{\eta \leqslant y\}}\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}} = \mathrm{E}F(\xi, y)\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}},$$

则称它为η 关于ξ 的给定值的正则条件分布函数, $F_{\eta|\xi}(\cdot, \cdot)$.

定理 (定理4.5.6*)

η 关于ξ 的给定值的正则条件分布函数$F_{\eta|\xi}(\cdot,\cdot)$ 存在.

- $F(x,\cdot)$ 是分布函数, 且$F(x,y)=P(\eta\leqslant y|\xi=x)$, μ_ξ-a.s..
- $\forall r\in\mathbb{Q}$, 取$\varphi_r:(X,\mathscr{F}_X)\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_\mathbb{R})$ 使得

$$\varphi(x,r):=\varphi_r(x)=P(\eta\leqslant r|\xi=x),\quad \mu_\xi\text{-a.s..}$$

得到$X\times\mathbb{Q}$ 上的函数$\varphi(\cdot,\cdot)$.

- 回顾分布函数的三条性质: 单调、右连续、规范.
- 令$N=N_1\cup N_2\cup N_3$, 则$N\in\mathscr{F}_X$ 且$\mu_\xi(N)=0$. 其中,

$$N_1:=\{x\in X:\exists\ r_1,r_2\in\mathbb{Q},r_1\leqslant r_2\ \text{使得}\ \varphi(x,r_1)>\varphi(x,r_2)\};$$

$$N_2:=\{x\in X:\exists r\in\mathbb{Q}\ \text{使得}\ \lim_{n\to\infty}\varphi(x,r+\frac{1}{n})\neq\varphi(x,r)\};$$

$$N_3:=\{x\in X:\lim_{n\to\infty}\varphi(x,n)\neq 1\ \text{或}\ \lim_{n\to\infty}\varphi(x,-n)\neq 0\}.$$

- 固定$x \notin N$. $\varphi(x,\cdot): \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 满足单调、右连续、规范.
- 固定$x \notin N$.

$$F_{f|\mathscr{G}}(x,y) := \inf\{\varphi(x,r) : r \in \mathbb{Q}, r > a\}.$$

- $\forall x \in N$, $F_{f|\mathscr{G}}(x,y) := F(y)$, 为任取的一个分布函数.
- (1) 固定$x \in X$. 往证$F_{\eta|\xi}(x,\cdot)$ 是分布函数. ✓. (习题四、24)
- (2) 固定$y \in \mathbb{R}$. $F_{\eta|\xi}(x,y) = \lim\limits_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow y} \varphi(x,r)$, $\forall x \notin N$, 故

$$F_{\eta|\xi}(\cdot,y) \overset{\mu_\xi\text{-a.s.}}{=} \lim_{r \in \mathbb{Q}, r\downarrow y} \varphi(\cdot,r) = \lim_{r \in \mathbb{Q}, r\downarrow y} P(\eta \leqslant r|\xi)$$
$$= \lim_{r \in \mathbb{Q}, r\downarrow y} \mathrm{E}(\mathbf{I}_{\{\eta\leqslant r\}}|\xi) = \mathrm{E}(\mathbf{I}_{\{\eta\leqslant y\}}|\xi) = P(\eta \leqslant y|\xi).$$

- 注: 类似地, η 为随机向量即可.